INTRODUZIONE STORICA

ALLA

TEORIA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

PER IL PROFESSORE

GIACOMO BELLACCHI.

. . . . . nil dulcius est, bene quam munita tenere
[illegible]a doctrina sapientum templa serena.

LUCREZIO, libro II.

FIRENZE,
TIPOGRAFIA DI G. BARBÈRA.

1894.

PREFAZIONE.

Il celebre Newton integrò le funzioni razionali per formule algebriche, per logaritmi ed archi circolari (*); queste grandezze sono pur sufficienti ad ottenere la funzione che ha una derivata razionale $f(x, y)$ se le variabili x, y simboleggino le coordinate di una conica, ovvero esprimano rapporti fra polinomi interi ed ordinati rispetto ad una stessa lettera t. Quando invece la y rappresenti un qualunque irrazionale algebrico della x, non si può integrare il prodotto $f(x, y)\, dx$ adoperando le funzioni algebriche e le trascendenti semplici; onde gli archi delle curve di secondo, terzo.... grado si misurarono ricorrendo all' integrazione per serie. Il Fagnani scoprì gli archi dell' ellisse a differenza rettificabile e l'arco della lemniscata potersi bisecare per intersezioni di cerchi e di rette: i fratelli Bernoulli, Maclaurin e d'Alembert produssero ingegnosi lavori sugl' integrali riferentisi agli archi delle coniche e della curva elastica, alla quadratura del cono obliquo, al tempo che un punto soggetto alla gravità impiega a percorrere un arco di cerchio situato in un piano verticale, ec. Euler intuì la relazione algebrica fra le variabili dell' eguaglianza $\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$, dove $\varphi(x)$ significa una funzione quartica intera; estendendo i teoremi del Fagnani chiamò ellittico l' integrale di ciascun membro, che venne poi ridotto ad altro più semplice contenente un limite od ampiezza, ed una costante o modulo: così Euler predisse l'esistenza di trascendenti ellittiche più generali delle funzioni goniometriche. Lagrange insegnò un metodo diretto per integrare la suddetta equazione differenziale e stabilì una relazione fra i limiti di tre integrali aventi lo stesso modulo e la somma nulla; e poichè Landen con una certa sostituzione algebrica espresse l'arco dell' iperbole per archi di ellisse, il geometra torinese applicando la medesima sostituzione converse l' integrale ellittico ad un altro omonimo e di modulo minore; indi costruendo una scala di moduli ricavò serie

(*) *De quadratura curvarum.*

convergenti atte a calcolare i valori approssimati dell' integrale. L' attivo e perseverante Legendre raccolse ed ordinò le sparse dottrine, riducendo gl' integrali ellittici a tre specie, o forme canoniche, dipendenti dal modulo e dall' ampiezza, e la terza specie ancor da un parametro; durante otto lustri ci si travagliò a svolgere le regole relative all' addizione ed allo scambio dei parametri, e compilare tavole numeriche per render più breve il computo degl' integrali. Fino dall' anno 1823 Abel, meditando il trattato di Legendre, concepì il *principio d' inversione* (*), prese per argomento il valore u dell' integrale ellittico, e riguardando l' ampiezza qual funzione di u, vide il seno ed il coseno dell'ampiezza ammettere due periodi, l'uno reale e l'altro immaginario; la quale scoperta insieme ad un meraviglioso teorema sull' addizione degl' integrali iperellittici eternarono il nome del giovine autore. Il suo emulo Jacobi, generalizzando la sostituzione di Landen, trasformò l' integrale ellittico u in un altro simile ed il cui seno ampiezza fosse funzione razionale del seno ampiezza di u; come Abel discusse l' equazioni algebriche discendenti dalla moltiplicazione o divisione dell' argomento, e per radicali di secondo e terzo grado sciolse il problema di trisecare una data ampiezza; indi sulla nuova trascendente *theta* fondò la teoria delle funzioni duplo-periodiche e le decomposizioni quadratiche dei numeri interi. Gli analisti del secolo passato solevano distinguere i valori reali dagl' immaginari e rappresentare graficamente soltanto i primi; pertanto Cauchy e Puiseux introducendo la variabile complessa estesero a tutti gli enti analitici la corrispondenza geometrica dei punti di un piano; limitando con un cerchio la regione in cui una serie è convergente, operarono l' integrazione per linee rette e curve, descrissero cappi e cicli intorno ai punti di discontinuità, onde ne ricavarono i periodi multipli degl' integrali definiti, e dall'equazioni differenziali fecero scaturire le proprietà delle loro funzioni inverse.

Questo libro espone l' accennato sviluppo del pensiero scientifico, insieme ad alcune applicazioni geometriche per esercizio dei giovani studiosi.

15 agosto 1894. L' AUTORE.

(*) *Niels-Henrik Abel; Tableau de sa vie et de son action scientifique,* par BIERKNES, professeur à l' Université de Christiania. Paris, 1885.

TEORIA ELEMENTARE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE CON INTRODUZIONE STORICA.

Capo Primo.

ARCHI DELLE LINEE PIANE A DIFFERENZA RETTIFICABILE.

1. — La teorica degl' integrali ellittici ebbe origine da varie ricerche sulle linee curve proposte e risolute nei secoli XVII e XVIII dai celebri geometri i Bernoulli, Fagnani, Maclaurin ed Euler.

Giacomo Bernoulli in una breve Memoria pubblicata l'anno 1679 negli *Acta eruditorum* di Lipsia, esponendo alcune proprietà della spirale parabolica, scoprì quella di poter assegnare due archi eguali in lunghezza, sebbene dissimili e non sovrapponibili. Ei descrive la detta spirale a somiglianza della parabola conica sostituendo all' asse rettilineo una circonferenza; menato in questa un raggio fisso AB ed un altro qualunque AD, vi determina un punto M della spirale costruendo il segmento MD medio proporzionale fra la lunghezza dell' arco BD ed il parametro $2p$. Facciasi $AB=r$, $BAD=\omega$, $AM=\rho$, l'equazione polare della curva è per la costruzione precedente espressa da $(r-\rho)^2=2pr\omega$; onde il raggio vettore è nullo per $\omega=\frac{r}{2p}$. Poichè l'elemento di una curva in coordinate polari si determina con la formula $ds=\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\omega^2}$, resulta facilmente per la spirale parabolica:

$$ds=\frac{d\rho}{pr}\sqrt{p^2r^2+(r-\rho)^2\rho^2}=\frac{d\rho}{pr}\sqrt{\rho^4-2r\rho^3+r^2\rho^2+p^2r^2}.$$

L' integrale di quest' equazione preso fra i limiti r ed $r-\rho$ rappresenta la lunghezza dell' arco $BM=s$, e siccome due secoli fa non sapevasi determinare la forma della funzione avente per derivata un radi-

cale quadrico di un polinomio di grado superiore al secondo rispetto alla variabile indipendente, il Bernoulli si volse a rappresentarla con una quadratura. Egli prende sul raggio BA il segmento $BP = DM = r - \rho$ e normale al medesimo raggio la lunghezza $PM' = \sqrt{h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$, in cui h è una terza proporzionale in ordine alla costante $2p$ e la variabile $Pm = \sqrt{AP.P.B} = \sqrt{\rho(r-\rho)}$, l'estremo M' dell'ordinata ha per luogo geometrico una curva quartica, e l'area z compresa fra questa, la tangente in B e le rette $M'P$, PB è data dall' integrale $z = \int d\rho \,.\, PM' = \frac{1}{2p}\int d\rho \sqrt{\rho^4 - 2r\rho^3 + r^2\rho^2 + p^2r^2} = \frac{1}{2p} spr = \frac{s.r}{2}$. Posta l' origine O nel punto medio del raggio AB, asse delle ascisse, l' equazione della curva M' in coordinate cartesiane ortogonali assume la forma $y^2 = \frac{1}{4p^2}\left(\frac{r^2}{4} - x^2\right)^2 + \frac{r^2}{4}$; è quindi simmetrica rispetto all'asse Oy, ad ascisse eguali OP, OQ e di segno opposto $\frac{r}{2} - \rho$, $-\frac{r}{2} + \rho$ corrispondono le ordinate eguali PM', QN' e valori eguali per le aree $BEM'P$, $AE'N'Q$; e così per la relazione dimostrata $z = \frac{sr}{2}$, gli archi della spirale l'uno contato da B verso M e l'altro da A verso N saranno d'eguale lunghezza: se dunque col centro in A e raggi AP, AO, AQ si descrivono tre archi circolari che seghino la spirale nei punti M, I, N, risulteranno eguali gli archi MI, IN di questa linea ed i rimanenti BM ed NA. —

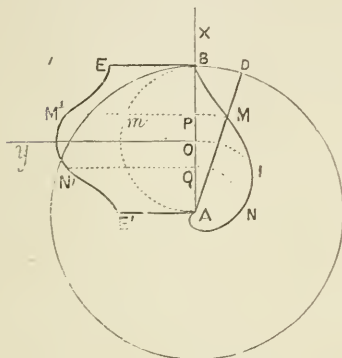
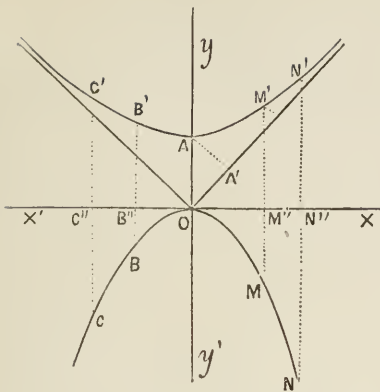



Fig. 1ª.

2. — Nei medesimi Atti di Lipsia l'anno 1698 Giovanni Bernoulli ridusse ad una ricerca analoga sulle quadrature il quesito: *Determinare geometricamente un arco parabolico che abbia con un altro dato la ragione*, n: 1.

Infatti osserva che la lunghezza dell' arco rettificato della parabola $x^2 = 2py$ coincide a differenza di un fattore costante con la formula dell' arco del trapezio mistilineo compreso fra un ramo dell' iperbole equilatera $y_1^2 - x^2 = p^2$, l' asse delle ascisse e due ordinate; poichè resulta:

$$\text{arco parabolico } s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{p}\int dx \sqrt{x^2 + p^2} = \frac{1}{p}\int y_1 dx.$$

Fig. 2a.

Sia BC l'arco parabolico s e $B'C'$ quello dell'iperbole equilatera compreso fra le ordinate corrispondenti alle stesse ascisse OB'', OC'', la relazione dimostrata equivale alla seguente (1) $BC \cdot p =$ trapezio $B'B''C''C'B'$, essendo $p = OA$ semiparametro della parabola ed anche semiasse trasverso dell'iperbole. Il suddetto integrale si compone di una parte algebrica e di un' altra logaritmica,

$u = \int dx\sqrt{x^2+p^2} = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2} + \frac{p^2}{2} log.\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right)$; si assuma per nuova variabile la proiezione z del raggio centrale OM' sull'asintoto corrispondente, si hanno facilmente le relazioni $x = \left(z - \frac{a^2}{z}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = \left(z + \frac{a^2}{z}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$, nelle quali $2a^2 = p^2$ e si dedurrà $\sqrt{x^2+p^2} = \left(z+\frac{a^2}{z}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x + \sqrt{x^2+p^2} = z\sqrt{2}$, ed (2) $u = \frac{1}{4}\left(z^2 - \frac{a^4}{z^2}\right) + a^2 log.\left(\frac{z}{a}\right)$. Si notino con b, c i valori di z per i punti B', C'; si ottiene per le precedenti eguaglianze (1) e (2) l'equazione $\widehat{BC}.p = \frac{c^2-b^2}{4} + \frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + a^2 log.\frac{c}{b}$; e similmente per un altro arco parabolico MN, chiamando con u e v i valori delle proiezioni dei raggi OM', ON', sull'asintoto deriva:

$$\widehat{MN}.p = \frac{v^2-u^2}{4} + \frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2}\right) + a^2 log.\frac{v}{u}.$$

E da queste relazioni si conchiude che la somma $\widehat{BC} \pm \widehat{MN}$ sarà algebrica, quando risulti l'equazione $log.\frac{c}{b} \pm log.\frac{v}{u} = o$, ovvero una delle seguenti $\frac{c}{b}.\frac{v}{u} = 1, \frac{c}{b} = \frac{v}{u}$. Dunque *è sempre possibile determinare più archi parabolici aventi la loro somma algebrica rettificabile.*

Il quesito proposto da Giovanni Bernoulli si traduce nell'equazione:

$$\frac{v^2-u^2}{4} + \frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2}\right) + a^2 log.\frac{v}{u} = n\frac{(c^2-b^2)}{4} + n\frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + n a^2 log.\frac{c}{b},$$

ed affinchè questa riducasi algebrica basterà porre $\frac{v}{u} = \frac{c^n}{b^n}$.

Ricavando il valore di v da questa proporzione e sostituendolo nella precedente eguaglianza si trova:

$$u^4 c^{2n}(c^{2n}-b^{2n})-n(c^2-b^2)(b^{2n}c^{2n}+a^4 b^{2n-2}c^{2n-2})u^2+a^4 b^{2n}(c^{2n}-b^{2n})=o,$$

la quale equazione biquadratica essendo priva dei termini di grado dispari rispetto all' ignota u è evidentemente costruibile con le sole linee retta e circonferenza.

3. — Un altro celebre teorema di Giovanni Bernoulli sugli archi delle curve a differenza o somma rettificabile fu da lui così enunciato senza dimostrazione negli Atti di Lipsia dell' anno 1698: *Si positis cuiusvis curvæ datæ coordinatis x et y fiat alia curva, cujus coordinatæ sunt $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ et $3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{2}\int\frac{dy^2}{dx}$, erunt ambæ curvæ genitrix et genita simul sumptæ rectificabiles. Facta enim recta, quæ se habeat ad abscissam curvæ datæ x ut cubus tangentis ad cubum subtangentis in eadem curva data, æquabitur hæc recta longitudini curvarum simul sumptarum, idest si elementum curvæ datæ vocetur ds, longitudo ejusdem D, longitudo genitæ G, erit $D+G=x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3$. Notandum hic si curva proposita versus axem sit cava et posita dx constante, $3xd^2y$ fiat majus quam $dxdy$, tunc differentia curvarum dicta rectæ æquatur.*

Per dimostrare il teorema Bernoulliano si ponga:

$$(1)\qquad \int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\int dX\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}=2\varphi(x);$$

$$(2)\qquad \int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-\int dX\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}=2\psi(x).$$

E da queste eguaglianze facilmente si ricaverà $\varphi'(x)+\psi'(x)=\frac{ds}{dx}$, $\varphi'(x)-\psi'(x)=\frac{dX}{dx}\sqrt{\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\frac{dY}{dx}\right)^2+\left(\frac{dX}{dx}\right)^2}$ a motivo della relazione $\frac{dY}{dx}=\left(\frac{dY}{dX}\right)\frac{dX}{dx}$. Eliminando fra le precedenti la funzione $\psi'(x)$, si conchiude l' equazione razionale (3) $\left(\frac{dY}{dx}\right)^2+\left(\frac{dX}{dx}\right)^2=\left(2\varphi'(x)-\frac{ds}{dx}\right)^2=$ $=4\left(\varphi'(x)\right)^2-4\varphi'(x)\frac{ds}{dx}+\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$. Ora $\frac{ds}{dx}$ è di forma irrazionale rispetto a $\frac{dy}{dx}$; dunque per ottenere un' identità fra quantità razionali si porrà $\varphi'(x)=\frac{ds}{dx}.u$, essendo u una tal funzione di x che l'integrale $2\int u\frac{ds}{dx}.dx$ divenga algebrico.

È evidente doversi avere $2u=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2+3x\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^2s}{dx^2}$, e per conseguenza $2\varphi(x)=\int\left(\frac{ds^3}{dx^3}dx+3x\frac{ds^2}{dx^2}\frac{d^2s}{dx^2}dx\right)=x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3$. L'equazione (3) assume la forma $\left(\frac{dY}{dx}\right)^2+\left(\frac{dX}{dx}\right)^2=(2u-1)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(2u-1)^2$ e diviene identica scrivendo:

$$\frac{dY}{dx}=2u-1=\frac{ds^2}{dx^2}-1+3x\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dy^2}{dx^2}(2u-1)^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Integrando queste due ultime equazioni e tralasciando le costanti si ottengono le coordinate della curva generata:

$$Y=\frac{3x}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx,\quad X=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3. \tag{4}$$

Se la curva data, le cui coordinate sono y, x, è concava verso la direzione positiva dell'asse Ox sarà $\frac{d^2y}{dx^2}<o$, e siccome x è positivo il secondo termine della derivata $\frac{dX}{dx}$ resulterà negativo; se dunque $3x\frac{d^2y}{dx^2}$ ha un valore assoluto maggiore di $\frac{dy}{dx}$, il valore di $\frac{dX}{dx}$ sarà negativo e la relazione (1) prende la forma:

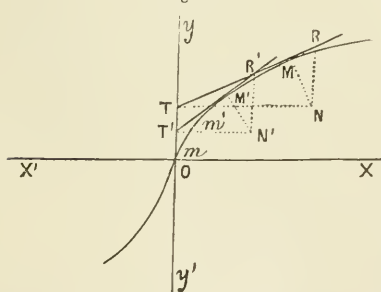
$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}-\int\sqrt{dX^2+dY^2}=x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3.$$

Esempio. — Sia data la parabola $ny=ax^n$, si deduce applicando le formule. $\frac{dy}{dx}=ax^{n-1}$, $X=a^3x^{3n-2}$, $Y=\left(\frac{3n-2}{2n-1}\right)a^2x^{2n-1}$, dalle quali resulta $Y=\frac{3n-2}{2n-1}a^{\frac{1}{2-3n}}X^{\frac{2n-1}{3n-2}}$; così per $n=2$ dalla parabola conica $y=\frac{1}{2p}x^2$ si genera la parabola cubico biquadrata $Y=\frac{4}{3}p^{\frac{1}{4}}X^{\frac{3}{4}}$. e la somma degli archi corrispondenti compresi fra l'origine e le ascisse x per la conica, ed $\left(\frac{x}{p}\right)^{3n-1}\cdot x$ per la cubico biquadrata, è eguale alla quantità algebrica $x\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

È facile dimostrare pure la seguente osservazione dello stesso Bernoulli: *Adeoque est Parabola cubicalis primaria, quæ cum se ipse comparata rectificari potest, seu in qua assignari possunt duo arcus quorum dif-*

ferentia est rectificabilis. Infatti ponendo $n=\frac{1}{3}$ si ha la parabola cubica $y=3\left(p^2x\right)^{\frac{1}{3}}$, e le coordinate della curva generata saranno $X=\frac{p^2}{x}$, $Y=3p^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$, da cui $Y=3\left(p^2X\right)^{\frac{1}{3}}$, la quale coincide con la parabola cubica; e siccome questa curva è concava verso la direzione positiva Ox, avendosi $\frac{dy}{dx}=p^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}$, $3x\frac{d^2y}{dx^2}=-2p^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}$, si conchiude che la differenza degli archi $\widehat{M_1M}=\int_{x_1}^{x_2}ds$, $\widehat{mm_1}=\int_{X_1}^{X_2}ds$ è l'espressione algebrica:

$\frac{1}{x_1}\left(x_1^{\frac{4}{3}}+p^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{x_2}\left(x_2^{\frac{4}{3}}+p^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, e le ascisse dei limiti del secondo arco sono determinate dalle relazioni $x_1X_1=x_2X_2=p^2$.

Fig. 3a.

La quantità algebrica è data dal Bernoulli sotto forma geometrica, si conducano ai punti M ed M_1 le tangenti RT, R_1T_1 sino ad incontrare l'asse Oy nei punti T e T_1, indi le normali MN, M_1N_1 che seghino respettivamente in N ed N_1 le parallele TN, T_1N_1 all'asse delle ascisse e poi da punti N, N_1 s'innalzino le perpendicolari NR, N_1R_1 le quali intersecano le tangenti nei punti R ed R_1, si avrà $TR=x_1\left[1+\left(\frac{p}{x_1}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{x_1}\sqrt{\left(x_1^{\frac{4}{3}}+p^{\frac{4}{3}}\right)^3}$, $T_1R_1=\frac{1}{x_2}\sqrt{\left(x_2^{\frac{4}{3}}+p^{\frac{4}{3}}\right)^3}$ ed arco M_1M — arco $mm_1=TR-T_1R_1$ (*).

4. — Le investigazioni dei fratelli Bernoulli furono estese dall'illustre matematico italiano conte Giulio Carlo de' Fagnani (nato in Sinigaglia il 26 settembre 1682 e morto il 18 maggio 1766) alle coniche a centro, alla lemniscata ed alle parabole di grado superiore al secondo; è bene

(*) Giacomo Bernoulli nacque a Basilea nel 27 dicembre 1654 e vi morì il 16 agosto 1705, fu professore di matematica all'Università del suo paese natío. — Giovanni Bernoulli nacque a Basilea il 27 luglio dell'anno 1667 e morì il primo gennaio 1748, dottore in medicina e professore di matematiche all'Università di Groninga. Giacomo fu il quinto e Giovanni il decimo degli undici figli di Niccola Bernoulli, negoziante e membro del gran Consiglio di Basilea.

avvertire che le rettificazioni di queste curve furono oggetto di studio dei geometri del XVII secolo e tenute per difficilissime e quasi insolubili.

Nel tomo XIX del *Giornale de' letterati d'Italia,* stampato a Venezia, comparve, trascritto da un giornale di Sinigaglia dell'anno 1714, il seguente quesito proposto dal Fagnani: *Data una parabola biquadratica primaria, che ha per equazione costitutiva* $x^4 = y$ *e data una porzione di essa, dimando che si assegni un' altra porzione della medesima curva tale che la differenza delle suddette porzioni sia rettificabile. Se i geometri si degneranno riflettere a quanto scrive l' incomparabile signor Giovanni Bernoulli negli Atti di Lipsia dell' anno 1698, alla pag. 465, dopo la linea 5, non giudicheranno questo problema affatto indegno della loro attenzione.* — Decorso un anno e non essendosi presentata alcuna soluzione nel tomo XXII del suddetto Giornale di Venezia, il Fagnani pubblicò la sua in un semplice scritto che ha per titolo: *Nuovo metodo per rettificare la differenza di due archi, uno dei quali è dato in infinite specie di parabole irrettificabili.* Stabilisce alcuni teoremi di calcolo integrale e con mirabile sintesi ne fa discendere proposizioni geometriche; è importante per la storia matematica di riassumerne i principii.

I. L' integrale $G\int x^{cm}\left(1+x^{m}\right)^{\lambda-1}dx$ si riduce alla forma $X+H\int\left(1+x^{m}\right)^{\lambda-1}dx$, in cui X denota una funzione algebrica e gli esponenti m, λ sono numeri razionali, le quantità G ed H esprimono costanti. Il Fagnani dimostra questo lemma mediante il metodo dei coefficienti indeterminati scrivendo $X=\left(1+x^{m}\right)^{\lambda}\left(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+\right.$ $\left.+Cx^{\gamma}+\ldots\right)$, ed agli esponenti $\alpha, \beta, \gamma\ldots.$ attribuisce respettivamente i valori $1-m$, 1, $1+m\ldots.$ che sono i termini di una progressione aritmetica con la ragione eguale ad m.

Differenziando i due membri dell' equazione precedente ed osservando che si ha per ipotesi $X'=\left(Gx^{cm}-H\right)\left(1+x^{m}\right)^{\lambda-1}$; soppresso il fattor comune ai due membri $\left(1+x^{m}\right)^{\lambda-1}$, si conchiude l' identità

$$Gx^{cm}-H=A\alpha x^{\alpha-1}\left(1+x^{m}\right)+Am\lambda x^{\alpha+m-1}+B\beta x^{\beta-1}\left(1+x^{m}\right)+$$
$$+B\lambda m x^{\beta+m-1}+\ldots.$$

Ordinato il secondo membro di questa eguaglianza rispetto ad x e poi identificando nei due membri i coefficienti delle stesse potenze, si avranno i valori delle indeterminate G, H, A, B, $C\ldots.$

Esempio 1°.

$$\int x^{-\frac{4}{5}}\left(1+x^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=-5x\left(1+x^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}+5\int\left(1+x^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Esempio 2°.

$$\int\frac{x^{-\frac{4}{3}}dx}{\sqrt{1+x^{-\frac{4}{3}}}}=-\frac{1}{5}x\left(1+x^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^{-\frac{4}{3}}}}.$$

II. *Il differenziale* (1) $f(x)\,dx=\dfrac{x^{n-1}(x^n+p)^{h-1}\,dx}{l^h D^h}$ *in cui si ha* $D=(x^n+p)^2+q(x^n+p)+r$, *si trasforma nell' espressione simile e di segno opposto* $-f(z)\,dz$ *per la sostituzione inversa* (2) $(x^n+p)(z^n+p)=r$.

Infatti resulta $x^{n-1}dx=-\dfrac{rz^{n-1}dz}{(z^n+p)^2}$, $(x^n+p)^{h-1}=\dfrac{r^{h-1}}{(z^n+p)^{h-1}}$ e $D=\dfrac{1}{r}\times\dfrac{(z^n+p)^2}{(z^n+p)^2+q(z^n+p)+r}$; sostituendo questi valori nel secondo membro della (1), si fa manifesta la verità della proposizione. — Posto $h=\dfrac{1}{2}$ si ottiene (3) $f(x)\,dx=\dfrac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax^{3n}+bx^{2n}+cx^n+d}}$, essendo $a=l$, $b=$ $=3l^2p+lq$, $c=3lp^2+2lpq+lr$, $d=lp^3+lp^2q+lpr$.

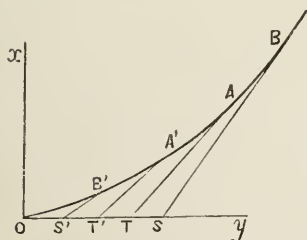
Esempi. 1°. — Nel differenziale (1) facciasi $p=q=o$, $r=l=1$, $h=-\dfrac{1}{2}$, si avrà $z=\dfrac{1}{x}$ e l' espressione $x^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}dx\sqrt{1+x^{2n}}$ si trasforma nella simile ed opposta $-z^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}dz\sqrt{1+z^{2n}}$; ed affinchè questi differenziali risultino della forma $x^{cm}\left(1+x^m\right)^{\lambda-1}dx$ si ponga $\lambda=\dfrac{3}{2}$, $m=2n$ e si avranno i valori $n=-\dfrac{2}{1+4c}$, $m=-\dfrac{4}{1+4c}$, così per $c=1$ resulta $m=-\dfrac{4}{5}$, $n=-\dfrac{2}{5}$ ed il differenziale (1) diviene $x^{-\frac{4}{5}}dx\sqrt{1+x^{-\frac{4}{5}}}$.

Nel differenziale (3) facciasi $a=1$, $b=c=o$, $d=1$ e si avrà $r=3$, $p=1$, $l=1$, $q=-3$; ed affinchè il differenziale risultante $\dfrac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1+x^{3n}}}$ riducasi alla forma $\dfrac{x^{cm}dx}{\sqrt{1+x^m}}$, si dovrà porre $cm=n-1$, $m=3n$, dai quali si deducono i valori dei numeri m, n. Invece scrivendo $cm=\dfrac{n}{2}+1$,

$m = 3n$ si ottiene $n = -\frac{2}{1-6c}$, e l'espressione $\frac{x^{\frac{6c-3}{1-6c}}dx}{\sqrt{1+x^{-\frac{6}{1-6c}}}} = \frac{x^{\frac{6c}{1-6c}}dx}{\sqrt{1+x^{\frac{6}{1-6c}}}}$

si trasforma nell' opposta simile mediante la sostituzione $z^{\frac{2}{1-6c}} =$ $= \left(1+x^{\frac{2}{1-6c}}\right) : \left(2x^{\frac{2}{1-6c}}-1\right)$; in particolare per $c = o$ il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$ si muta in $-\frac{dz}{\sqrt{1+z^6}}$ per la sostituzione $z^2 = \frac{1+x^2}{2x^2-1}$.

Se in generale una relazione algebrica collega le variabili x, z, dall' equazione differenziale $\frac{x^{cm}\,dx}{\sqrt{(1+x^m)^\varepsilon}} + \frac{z^{cm}\,dz}{\sqrt{(1+z^m)^\varepsilon}} = o$, significando con ε l' unità positiva o negativa, si deduce integrando $\int_o^x \frac{x^{cm}\,dx}{\sqrt{(1+x^m)^\varepsilon}} +$ $+ \int_o^z \frac{z^{cm}\,dz}{\sqrt{(1+z^m)^\varepsilon}} =$ costante; in virtù della prima proposizione il primo di quest' integrali si pone sotto la forma $X - \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^m)^{\varepsilon'}}}$, essendo X una funzione algebrica di x, e così operando per l' altro integrale si ottiene $\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^m)^\varepsilon}} + \int_o^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z^m)^\varepsilon}} - (X+Z) = cost.$

Il Fagnani applicò queste semplici proposizioni alla rettificazione degli archi delle parabole rappresentate dall' equazione $y = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}$. Stabilisce a priori l' identità:

$$\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}} = \frac{m+2}{m}\int_o^x dx\sqrt{1+x^m} - \frac{2}{m}x\sqrt{1+x^m},$$

e che facilmente si verifica differenziando i due membri. Sia $OP = x$ ascissa di un punto qualunque A della parabola, a cagione di $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^m$, l' integrale contenuto nel secondo membro dell' identità precedente rappresenta l' arco parabolico OA compreso fra l' origine O ed il punto A, e l' espressione $x\sqrt{1+x^m}$ è il valore del segmento della tangente com-

preso fra il punto A di contatto e l'incontro T con l'asse Oy, e perciò si ha la relazione $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}} = \frac{m+2}{m}$ arco $OA - \frac{2}{m} TA$.

Sia $OP' = z$ un altro valore dell'ascissa collegato con x per un'equazione algebrica, e z decresca al crescere di x; se A' è il punto corrispondente della parabola, si ha pure $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1+z^m}} = \frac{m+2}{m}$ arco $OA' - \frac{2}{m} T'A'$.

Aggiungendo le due eguaglianze precedenti membro a membro, nell'ipotesi che i differenziali $\frac{dx}{\sqrt{1+x^m}}$, $\frac{dz}{\sqrt{1+z^m}}$ siano eguali e disegno contrario, si ottiene $\frac{m+2}{m}\left(\text{arco } OA + \text{arco } OA'\right) - \frac{2}{m}\left(TA + T'A'\right) = cost.$

Per un'altra coppia di punti corrispondenti B e B', le cui ascisse sono x', z', notando con BS e $B'S'$ le parti delle tangenti menate ai punti B e B' fino ad intersecare l'asse Oy si trova la relazione analoga $\frac{m+2}{m}\left(\text{arco } OB + \text{arco } OB'\right) - \frac{2}{m}\left(SB + S'B'\right) = cost.$ E poichè i secondi membri contengono la medesima costante, eguagliando i primi resulta arco $AB -$ arco $A'B' = \frac{2}{m+2}\left(TA + T'A' - SB - S'B'\right)$; si conchiude che la differenza degli archi AB, $A'B'$ è una quantità algebrica. Nel caso di $m = 6$ si ha la soluzione del quesito proposto dal Fagnani per la parabola $y = \frac{1}{4}x^4$, e si è veduto che, mediante la sostituzione $z^2 = \frac{x^2+1}{2x^2-1}$, il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$ si muta nel simile ed opposto. I valori delle tangenti TA e $T'A'$ sono respettivamente $x\sqrt{1+x^6}$ e $z\sqrt{1+z^6} = \frac{3x\sqrt{(1+x^2)(x^4-x^2+1)}}{(2x^2-1)^2}$ ed i valori delle tangenti SB, $S'B'$ si deducono da quelli di TA e $T'A'$ mutando x in x'. Per $m = 4$ si ha la parabola cubica primaria $y = \frac{1}{3}x^3$, il suo arco $OA =$ $= \int_0^x dx\sqrt{1+x^4}$; e siccome per $x = \frac{1}{z}$ il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ si muta nel simile ed opposto, si avrà l'eguaglianza arco $AB -$ arco $A'B' =$

$= \frac{1}{3}\left(TA + T'A' - SB - S'B'\right)$, essendo $TA = x\sqrt{1+x^4}, T'A' = z\sqrt{1+z^4} =$ $= \frac{1}{x^3}\sqrt{1+x^4}$.

Si osservi che il teorema analitico del Fagnani consiste nell' aver dato la relazione (1) $(x^n + p)(z^n + p) = r$ per integrale particolare, cioè privo di costante arbitraria, dell' equazione differenziale:

(2) $\frac{x^{n-1} dx (x^n + p)^{h-1}}{D^h} + \frac{z^{n-1} dz (z^n + p)^{h-1}}{D_1^h} = o$, ove $D = (x^n + p)^2 +$ $+ q(x^n + p) + r$ e D_1 significa il valore che prende il polinomio D per la sostituzione di z alla variabile x. Ponendo $n = 2$, $h = \frac{1}{2}$, $p^2 + pq + r = o$, $p = \frac{l}{h}$, $2p + q = \frac{g}{f}$, si deduce $q = \frac{g}{f} - \frac{2l}{h}$, $p^2 - r = p(2p + q) = \frac{gl}{hf}$ e l'equazioni (1) e (2) per questi valori divengono (3) $fhx^2z^2 + fl(x^2 + z^2) + gl = o$,

(4) $\frac{dx}{\sqrt{(hx^2 + l)(fx^2 + g)}} + \frac{dz}{\sqrt{(hz^2 + l)(fz^2 + g)}} = o$.

Similmente per $n = 2$, $h = \frac{1}{2}$, $p^2 + pq + r = o$, $p = \frac{g}{f}$, $2p + q = \frac{l}{h}$, si ricava $q = \frac{l}{h} - \frac{2g}{f}$, $p^2 - r = p(2p + q) = \frac{gl}{fh}$ e l' equazioni (1) e (2) riduconsi (5) $fhx^2z^2 + gh(x^2 + z^2) + gl = o$, $\frac{dx}{\sqrt{(hx^2 + l)(fx^2 + g)}} +$ $+ \frac{dz}{\sqrt{hz^2 + l)(fz^2 + g)}} = o$.

Infine ponendo $n = 2$, $h = \frac{1}{2}$, $p = o$, $q = -\left(\frac{l}{h} + \frac{g}{f}\right)$, $r = \frac{lg}{hf}$, l'equazioni (1) e (2) assumono le forme (6) $xz = \sqrt{\frac{lg}{hf}}$, $\frac{dx}{\sqrt{(hx^2 + l)(fx^2 + g)}} +$ $+ \frac{dz}{\sqrt{(hz^2 + l)(fz^2 + g)}} = o$.

Il Fagnani diè i tre integrali particolari (3), (5), (6) della stessa equazione differenziale (4), ma non sembra che giungesse a quest' ultima, sibbene egli differenziando la (3) e poi dividendo la nuova eguaglianza per $2fxz$ ottenne l' equazione differenziale $h.d(xz) + l\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right) = o$, e dalla stessa (3) ricavando successivamente z ed x pose la precedente sotto la forma (7): $dx\sqrt{\frac{hx^2 + l}{fx^2 + g}} + dz\sqrt{\frac{hz^2 + l}{fz^2 + g}} = \frac{-h}{\sqrt{-fl}} d(xz)$,

ed integrando stabilì la relazione:

$$\int dx \sqrt{\frac{hx^2 + l}{fx^2 + g}} + \int dz \sqrt{\frac{hz^2 + l}{fz^2 + g}} = -\frac{h}{\sqrt{-fl}} xz + cost.\,;$$

e similmente operò per le relazioni (5) e (6). I quali risultamenti analitici furono applicati dal conte Fagnani a dimostrare il suo bel teorema: *Potersi determinare in una conica a centro* (ed in una cicloide, ec.) *infiniti archi aventi la differenza rettificabile*, essendo l'origine di essi nei vertici della curva. Questo scritto fu pubblicato nel tomo XXVI del *Giornale de' letterati d' Italia*, anno 1716, e ristampato dal medesimo Fagnani nel 2° volume delle sue *Produzioni matematiche:* Pesaro, anno 1750.

5. — In altre Memorie contenute nei tomi XXII, XXXIV... del citato Giornale di Venezia, il Fagnani si occupò di rettificare la lemniscata e giunse a scoprire mirabili proprietà di questa linea, fra le quali è singolarissima quella di potersi dividere in 2, 3, 5 parti eguali e dissimili mediante il cerchio e la retta.

L'equazione più semplice della lemniscata in coordinate cartesiane ortogonali è $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$. (*) Assumendo per variabile indipendente la corda $OM = z = \sqrt{x^2 + y^2}$, si potranno esprimere le coordinate del punto M con le formule $x = \pm \frac{z}{a} \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{2}}$, $y = \pm \frac{z}{a} \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{2}}$, e siccome per $z = o$ risulta $lim \frac{y}{x} = \pm 1$, si deduce esser le due tangenti all'origine inclinate di $\pm 45°$ all'asse della curva. Il differenziale dell'arco $OM = s$ in funzione di z è dato dall'eguaglianza $ds = \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, ed aggiungendo al numeratore la quantità nulla $z^2 dz - z^2 dz$, si ottiene $ds = dz \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{a^2 - z^2}} - \frac{z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$.

(*) La lemniscata è un caso particolare della Cassinoide, ovvero di un'altra curva di quarto grado generata nel modo seguente. Intorno ad un punto fisso O esterno ad un circolo di centro C e raggio r si faccia ruotare una trasversale, la quale intersechi la circonferenza nei punti N', N'', e la corda $N'N''$ si riporti a contare dall'origine O sulla stessa trasversale in OM. Si troverà l'equazione del punto M indicando con ρ questo segmento, d la distanza OC e con ω l'angolo MOC, e si avrà l'equazione di secondo grado $ON^2 - 2\,ON.\,d\cos\omega + d^2 - r^2 = o$, le cui radici ON', ON'' hanno per somma $2d\cos\omega$ e per prodotto $d^2 - r^2$; quindi la relazione $(ON' - ON'')^2 = \rho^2 = 4(r^2 - d^2 sen^2\omega)$ od in coordinate cartesiane ortogonali presa la retta OC per asse delle ascisse, $(x^2 + y^2)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) + 4d^2y^2 = o$. Nel caso particolare che la distanza OC sia eguale al lato del quadrato iscritto nella circonferenza si ha $d = r\sqrt{2}$, e si conchiude la lemniscata $\rho^2 = r^2\cos 2\omega$ ovvero in coordinate cartesiane $(x^2 + y^2)^2 = 4r^2(x^2 - y^2)$.

Posto $t = a\sqrt{\frac{a^2+z^2}{a^2-z^2}}$ resulta $dt = \frac{2a^3 z\,dz}{(a^2-z^2)\sqrt{a^4-z^4}}$, $\sqrt{t^4-a^4} =$ $= \frac{2a^3 z}{a^2-z^2}$, da cui $\frac{dt}{\sqrt{t^4-a^4}} = \frac{dz}{\sqrt{a^4-z^4}}$. È facile conchiudere le seguenti trasformazioni: $ds = \frac{a^2\,dt}{\sqrt{t^4-a^4}} = \frac{t^2\,dt-(t^2-a^2)\,dt}{\sqrt{t^4-a^4}} = \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-a^4}} - \frac{z}{a}\,dt$, avendosi $z = a\sqrt{\frac{t^2-a^2}{t^2+a^2}}$. Aggiungendo e togliendo il termine $\frac{t}{a}dz$ il valore di ds può scriversi sotto la forma $ds = \frac{t}{a}dz + \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-a^4}} - \frac{1}{a}d(tz)$, ed integrando si trova $s = \int_o^z dz\sqrt{\frac{a^2+z^2}{a^2-z^2}} + \int_a^t \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-a^4}} - \frac{zt}{a}$.

Ora il primo integrale del secondo membro rappresenta l'arco dell'ellisse $2x^2+y^2 = 2a^2$ compreso fra il vertice B del semiasse $a\sqrt{2}$ ed il punto N corrispondente all'ascissa $x = z$ corda della lemniscata, ed il secondo integrale rappresenta l'arco VM' dell'iperbole equilatera $x^2-y^2 = a^2$ limitato fra il vertice V ed il punto M' avente il segmento t per raggio vettore, onde l'arco della lemniscata compreso fra l'origine ed il punto M che ha per raggio vettore la variabile z è dato dall'eguaglianza:

(1) arco OM = arco ellittico BN + arco iperbolico $VM' - \frac{zt}{a}$;

da questa relazione non si può ricavare il valore del quadrante della lemniscata, perchè fatto $z = a$ resulta $t = \infty$.

Or ponendo $z = \frac{a^2}{t_1}$ il Fagnani ottiene la relazione:

$$\int_z^a -\frac{a^2\,dz}{\sqrt{a^4-z^4}} = \int_z^a -dz\sqrt{\frac{a^2+z^2}{a^2-z^2}} + \int_a^{t_1} \frac{t_1^2\,dt_1}{\sqrt{t_1^4-a^4}} - \frac{1}{z}\sqrt{a^4-z^4},$$

cioè l'arco MA della lemniscata compreso fra il punto M ed il vertice A del quadrante, a differenza di un termine algebrico è eguale alla somma dell'arco ellittico NA e di un arco VM'' della stessa iperbole equilatera contato pure sul ramo di destra, ma nel senso delle ordinate negative, e quindi la seconda eguaglianza:

(2) arco MA = arco ellittico NA + arco iperbolico $M''V - \frac{1}{z}\sqrt{a^4-z^4}$.

Aggiungendo le due eguaglianze, si trova riducendo quadrante lemni-

scata = quadrante ellittico BNA + arco iperbolico $M''VM' - \frac{at}{z}$, a motivo dell'identità $\frac{zt}{a} + \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4} = \frac{zt}{a} + \frac{(a^2 - z^2)t}{az} = \frac{at}{z}$. (*)

Si noti con ω l'angolo che il raggio vettore $OM = z$ della lemniscata fa con l'asse ox, le coordinate di M sono $x = z \cos \omega$, $y = z \, sen \, \omega$, e quindi l'equazione polare $z^2 = a^2 \cos 2\omega$, detta $\varkappa$ l'inclinazione della tangente sul raggio vettore z, si trova $tang \, \varkappa = z \frac{d\omega}{dz} = - \cot 2\omega$; da cui $\varkappa = \frac{\pi}{2} + 2\omega$. Per il qual valore si deduce quello della normale condotta dal centro sulla tangente, cioè $p = z \, sen \, \varkappa = z \cos 2\omega = \frac{z^3}{a^2}$. Ora in ogni curva l'elemento dell'area compreso fra due raggi vettori successivi è eguale ad $\frac{1}{2} p ds$; quindi l'area contenuta fra l'arco $OM = s$ della lemniscata e la respettiva corda è data dall'integrale:

$$\frac{1}{2}\int_o^z \frac{z^3 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = C - \frac{1}{4}\sqrt{a^4 - z^4};$$

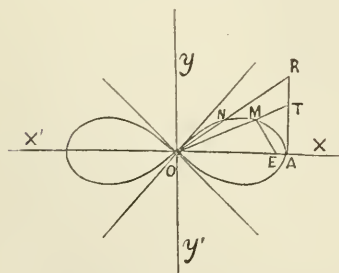
e poichè per $z = o$ l'area è nulla, si ricava $C = \frac{1}{4}a^2$: onde $S = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - z^4}}{4}$ è il valore dell'area; posto $z = a$ e moltiplicando il resultato per 4, si conchiude che *la superficie della lemniscata equivale al quadrato del suo semiasse.* Il valor coniugato $\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - z^4}}{4}$ rappresenta il segmento compreso fra la corda OM e l'arco supplementare $2q - s$, notando con q il quadrante della lemniscata. L'area S può dividersi in m settori equivalenti con raggi vettori menati per l'origine mediante costruzioni geometriche di secondo grado. — Si prolunghi la corda OM sino ad intersecare in T la tangente al vertice A e resulterà $AT = \frac{ay}{x} = a\sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$; detto u questo segmento, si riporti come corda ON sulla lemniscata: prolungando ON sino alla sua intersezione R con la tangente AT, si avrà

$$AR = a\sqrt{\frac{a^2 - u^2}{a^2 + u^2}} = z = OM.$$

Fig. 5a.

(*) Attualmente la rettificazione della lemniscata si ottiene con integrali euleriani, ovvero con integrali ellittici di prima specie. Vedasi Bertrand, *Calcul intégral*, pag. 369.

Il differenziale dell'arco $ON = s'$ è $ds' = \frac{a^2 . du}{\sqrt{a^4 - u^4}} = - \frac{a^2 . dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = - ds$;

a cagione dell' eguaglianze $du = \frac{-2a^2 z\, dz}{(a^2 + z^2)\sqrt{a^4 - z^4}}$, $\sqrt{a^4 - u^4} = \frac{2a^2 z}{a^2 + z^2}$.

Dalla relazione ottenuta $ds + ds' = o$ si conchiude $s + s' = cost.$ Si determina il valore della costante ponendo $z = a$; così l' arco $OM = s$ diviene il quadrante $ONMA$ e l' arco $ON = s'$ si annulla essendo $u = o$; quindi arco $ON +$ arco $OM = ONMA$, ovvero arco $OM =$ arco NA. Il Fagnani denominò arco diretto l' arco OM ed inverso quello contato in senso opposto e con l' origine al vertice A. Affinchè i punti N ed M coincidano col punto medio B del quadrante della lemniscata, si dovrà fare $u = z$ nella relazione $u = a\sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$, cioè $u^2 z^2 + a^2(u^2 + z^2) - a^4 = o$;

e ne risulta l' equazione $z^4 + 2a^2 z^2 - a^4 = o$, da cui $OB = a\sqrt{\sqrt{2} - 1}$; che si costruisce riportando sulla tangente al vertice A il segmento $AS = OA = a$, conducendo la bissettrice OI dell' angolo SOA, prendendo la media proporzionale AH fra le parti AS ed AI della tangente ed infine sulla congiungente OH si segherà un segmento $OB = AH$.

L' arco della parabola $y = \frac{1}{3}x^3$ misurato dall' origine ha per valore l' integrale $\int_0^x dx\sqrt{1 + x^4}$, che per l' identità del Fagnani pag. 9, si riduce alla somma $\frac{1}{3}x\sqrt{1 + x^4} + \frac{2}{3}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

Il Geometra marchigiano adopera per trasformare quest' ultimo integrale la sostituzione (1) $x^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - v^4}}{v^2}$, il cui differenziale di 1° ordine $x dx = \frac{v dv\,(1 - \sqrt{1 - v^4})}{v^4\sqrt{1 - v^4}}$, moltiplicato membro a membro per l' equazione $\frac{1}{x^2} = \frac{1 + \sqrt{1 - v^4}}{v^2}$, conduce all' eguaglianza $\frac{v dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1 - v^4}}$; inoltre dalla (1) si ricava (2) $v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}$, e quindi (3) $\frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dv}{\sqrt{1 - v^4}}$; e così riducesi a rettificare un arco di lemniscata. Anche dalla sostituzione (4) $x = \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{1 - z^4}}$ si ottiene (5) $\frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{dz\sqrt{2}}{\sqrt{1 - z^4}}$; eliminando x fra l' equazioni (2) e (4) e similmente fra le (3) e (5), risultano le relazioni

(6) $v=\frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$, (7) $\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}=\frac{2dz}{\sqrt{1-z^4}}$. È evidente che l'equazione (6) è integrale particolare della (7), e da quest' ultima si conchiude che la variabile v rappresenta la corda di un arco della lemniscata doppio di quello sotteso dalla corda z.

6. — La corda v dell'arco OM' doppio di OM, la cui corda è z, si esprime in funzione irrazionale di z applicando la precedente formula del Fagnani

(1) $v=\frac{2a^2t}{a^2-t^2}=\frac{2a^2z\sqrt{a^4-z^4}}{a^4+z^4}$, essendo t la perpendicolare ME condotta all' estremo del raggio vettore OM fino a segare l'asse nel punto E, cioè $t=\frac{AT.OM}{OA}=z\sqrt{\frac{a^2-z^2}{a^2+z^2}}$.

Si può verificare direttamente la (1); infatti posto per semplicità $a=1$ resulta (2) $dv=\frac{2(1-6z^4+z^8)\,dz}{(1+z^4)^2\sqrt{1-z^4}}$, $\sqrt{1-v^4}=\frac{1-6z^4+z^8}{(1+z^4)^2}$, e quindi ne consegue l' equazione differenziale $\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}=\frac{2dz}{\sqrt{1-z^4}}$, che precisamente significa l' elemento infinitesimale dell' arco OM' esser doppio dell' elemento simile dell' arco OM. Con successiva ripetizione delle (1) si otterranno le corde v_1, v_2, v_3.... degli archi $4s$, $8s$, $16s$,... cioè:

$$v_1=\frac{2v\sqrt{1-v^4}}{1+v^4},\quad v_2=\frac{2v_1\sqrt{1-v_1^4}}{1+v_1^4},\quad v_3=\frac{2v_2\sqrt{1-v_2^4}}{1+v_2^4},\ldots$$

Al punto M' corrisponderà il punto N' estremo dell' arco inverso AN di egual lunghezza dell' arco diretto OM' e la sua corda sarà eguale a $\sqrt{\frac{1-v^2}{1+v^2}}=\frac{1-2z^2-z^4}{1+2z^2-z^4}$ e resulta arco $N'A=$ arco $OM'=2$ arco $OM=$ $=2$ arco NA. Se l'arco OM è rappresentato da s e l'arco qualunque ON avente la corda u_1 si nota con s', l' eguaglianza arco $OM=2$ arco NA ovvero $s=2(q-s')$ differenziata diviene $ds+2ds'=o$; e quindi per la formula (1) del Fagnani si conchiude la relazione $z=\frac{2u_1\sqrt{1-u_1^4}}{1+u_1^4}$; la quale determina la corda dell' arco diretto OM doppio dell' arco inverso NA in funzione della corda dell' arco complementare $ON=s'$.

La relazione (1) dà il modo di estendere agli archi della lemniscata la proprietà degli archi circolari di potersi dividere in un numero 2^n di parti eguali mediante costruzioni della geometria elementare. Infatti ri-

ducendo razionale l'equazione (1) ed ordinando rispetto a z si trova

$$z^8 + \frac{4}{v^2} z^6 + 2z^4 - \frac{4}{v^2} z^2 + 1 = o.$$

Ora il primo membro si risolve nel prodotto dei due fattori biquadratici con potenze pari di z, $1 - \alpha z^2 - z^4$, $1 - \beta z^2 - z^4$, sendo α e β collegati dalle relazioni $\alpha + \beta = \frac{4}{v^2}$, $\alpha\beta = 4$: così vi sono due soluzioni reali positive per la corda z dell'arco metà ad ogni determinato valore di v; e questo resultamento si deduce pure dalla figura, perchè vi sono due punti M ed M' della lemniscata dalla stessa parte dell'asse Oy che distano dal centro O del segmento v; perciò ai due archi OM, OMM' corrispondono i loro punti medi m, m' aventi per distanze dal centro O le radici reali di z.

7. — Per dividere il quadrante della lemniscata in tre archi eguali OM_1, M_1M_2, M_2A, chiamando z ed u le corde degli archi OM_1, OM_2, si osserva che l'arco diretto OM_2 è della stessa lunghezza dell'arco inverso AM_1 ed è doppio dell'arco OM_1 e quindi le due relazioni $u^2 = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$, $u^2 = \frac{4z^2(1 - z^4)}{(1 + z^4)^2}$; dalle quali ne consegue l'equazione reciproca $1 + z^4 = \pm 2z(1 + z^2)$, la radice positiva minore di uno sarà la corda della terza parte del quadrante, cioè $OM_1 = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2 . \sqrt{3}}}{2}$, e la corda dell'arco $OM_2 = \frac{2}{3}$ del quadrante ha per valore:

$$OM_2 = \sqrt{\frac{1 - OM_1^2}{1 + OM_1^2}} = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}.$$

Similmente si debba dividere il quadrante della lemniscata in cinque archi eguali ON_1, N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4, N_4A: assumendo per incognite le corde $ON_2 = u$, $ON_4 = v$, a cagione dell'arco ON_4 doppio dell'arco ON_2 si ha (1) $v^2 = \frac{4u^2(1 - u^4)}{(1 + u^4)^2}$, ed inoltre essendo l'arco ON_2 doppio dell'inverso AN_4 resulta (2) $u^2 = \frac{4v^2(1 - v^4)}{(1 + v^4)^2}$; così la soluzione del problema riducesi a risolvere il sistema delle due precedenti equazioni a due incognite, le quali ridotte a forma intera divengono:

$$v^2u^8 + 4u^6 + 2u^4v^2 - 4u^2 + v^2 = o\,, \quad u^2v^8 + 4v^6 + 2v^4u^2 - 4v^2 + u^2 = o.$$

Moltiplicandole respettivamente per v^6, u^6, indi per v^2, u^2, e sottraendo i primi prodotti e i secondi, si troveranno le differenze divisibili per $u^4 - v^4$ e riducibili alle seguenti equazioni:

$$2u^4v^4 - 4u^2v^2 + v^4 + u^4 = o\,, \quad u^4v^4 + 4u^2v^2 - 1 = o.$$

Da quest'ultima si ottiene $u^2 v^2 = \sqrt{5} - 2$ e dalla prima $u^4 + v^4 =$ $= 12\sqrt{5} - 26$; si deduce $u^2 + v^2 = \sqrt{14\sqrt{5} - 30}$, $v^2 - u^2 = \sqrt{10\sqrt{5} - 22}$; e quindi:

$$v^2 = \frac{1}{2}\sqrt{14\sqrt{5} - 30} + \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5} - 22}, \quad v = \sqrt[4]{6\sqrt{5} - 13 + \sqrt{340 - 152\sqrt{5}}}$$

e la corda della quinta parte del quadrante è data dalla formula

$$z = \sqrt{\frac{1 - v^2}{1 + v^2}}.$$

Adunque si conchiude il teorema del Fagnani: *Potersi dividere il quadrante della lemniscata in archi eguali secondo i numeri* 2^n, 3.2^n, 5.2^n, *in cui* n *è un qualunque intero positivo per costruzioni geometriche di secondo grado;* ed è evidente che si potrà pure costruire con intersezioni di cerchi e rette l'arco eguale ad $\frac{1}{3.5.2^n}$ del quadrante della curva suddetta.

L'illustre matematico Guglielmo Libri (nato in Firenze da famiglia patrizia il 2 gennaio 1803 e morto in Fiesole il 28 settembre 1869) osservò in un suo lavoro d'Analisi, (*) che eliminando successivamente una delle incognite, per esempio, u fra le relazioni (1) e (2) del Fagnani, soppresso il quadrato dell'altra incognita v nell'equazione risultante, si ottiene la seguente:

$$o = V = \left[(1 + v^4)^4 + 16 v^4 (1 - v^4)^2\right]^2 - 16 (1 + v^4)^2 (1 - v^4) \left[(1 + v^4)^4 - \right.$$
$$\left. - 16 v^4 (1 - v^4)^2\right] = (v^{16} + 20 v^{12} - 26 v^8 + 20 v^4 + 1)^2 + 16 (v^{28} - 11 v^{24} +$$
$+ 25 v^{20} + 37 v^{16} - 37 v^{12} - 25 v^8 + 11 v^4 - 1)$, la quale per la sostituzione $x = v^4$ si abbassa all'ottavo grado, cioè:

$$x^8 + 56 x^7 + 172 x^6 - 600 x^5 + 2070 x^4 - 1592 x^3 - 52 x^2 + 216 x - 15 = o.$$

Ora le relazioni (1) e (2) divengono identiche nell'ipotesi di $u = v$ e coincidono con l'equazione $(1 + v^4)^2 - 4 (1 - v^4) = v^8 + 6 v^4 - 3 = o$. Inoltre le stesse relazioni (1) e (2) scritte sotto la forma $u^4 (1 + v^4)^4 -$ $- 16 v^4 (1 - v^4)^2 = o$, $v^4 (1 + u^4)^4 - 16 u^4 (1 - u^4)^2 = o$ per $u^4 = \pm v^4$ si riducono all'equazioni $(1 + v^4)^4 \pm 16 (1 - v^4)^2 = o$, $(1 + u^4)^4 \pm 16 (1 - u^4)^2 = o$, e queste evidentemente ammettono le stesse radici; V contiene pure il divisore razionale $(1 + v^4)^2 + 4 (1 - v^4) = v^8 - 2 v^4 + 5$; dunque V è di-

(*) « Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres; lu à l'Académie des Sciences de Paris le 30 septembre 1830. » — Trovasi stampata nel tomo X, pag. 167. del Giornale di Crelle.

visibile per i due trinomi $v^8 + 6v^4 - 3$, $v^8 - 2v^4 + 5$, e quindi per il loro prodotto $(1+v^4)^4 - 16(1-v^4)^2 = x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 36x - 15$, il quoziente risulta eguale ad $x^4 + 52x^3 - 26x^2 - 12x + 1$; così il polinomio V è eguale al prodotto $(v^8 - 2v^4 + 5)(v^8 + 6v^4 - 3)(v^{16} + 52v^{12} - 26v^8 - 12v^4 + 1)$.

Il primo fattore ha radici immaginarie, il secondo ha una sola radice reale positiva $v = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{3 + 2\sqrt{3}}}$ corda dell' arco OM, eguale ai $\dfrac{2}{3}$ del quadrante della lemniscata.

Infine il terzo fattore, posto $v^4 = x$ e mandato a zero, determina l' equazione di quarto grado irreducibile in fattori razionali $x^4 + 52x^3 - 26x^2 - 12x + 1 = o$, di cui due radici x_1, x_2 sono per la formula del Fagnani collegate dalla relazione $x_2 = \dfrac{16x_1(1-x_1)^2}{(1+x_1)^4}$ che si può scrivere $x_1^4 + 4x_1^3 + 6x_1^2 + 4x_1 + 1 = \dfrac{16x_1(1-x_1)^2}{x_2}$, e sottraendovi il polinomio nullo $x_1^4 + 52x_1^3 - 26x_1^2 - 12x_1 + 1$ si trova $16x_1(1 + 2x_1 - 3x_1^2) = \dfrac{16x_1(1-x_1)^2}{x_2}$; da cui si ricava $x_2 = \dfrac{1-x_1}{1+3x_1}$, ovvero $3x_1x_2 + x_1 + x_2 - 1 = o$. L' equazione di quarto grado si decomporrà in fattori quadratici col metodo del Ferrari scrivendola $(x^2 + 26x + y)^2 = 2(351 + y)x^2 + 4(3 + 13y) + y^2 - 1$, ed affinchè il trinomio contenuto nel secondo membro risulti un quadrato perfetto rispetto ad x, si dovrà avere la condizione $2(3 + 13y)^2 = (351 + y)(y^2 - 1)$, ovvero ordinando per le potenze decrescenti di y, l' equazione $y^3 + 13y^2 - 157y - 369 = o$, che ammette la radice razionale ed intera $y = 9$; così l'equazione di quarto grado assume la forma $(x^2 + 26x + 9)^2 - 5(12x + 4)^2 = o$, e perciò si decompone nelle due quadriche $x^2 + 2x(13 + 6\sqrt{5}) + 9 + 4\sqrt{5} = o$,

$$x^2 + 2x(13 - 6\sqrt{5}) + 9 - 4\sqrt{5} = o;$$

la prima ha due radici reali negative e la seconda le due radici reali positive x_1, x_2; dalle quali estraendo la radice quarta, si avranno i valori delle corde ON_2, ON_4.

8. — Le belle proposizioni del Fagnani non passarono inosservate al potentissimo ingegno di Leonardo Euler (nato a Basilea l' anno 1707 e morto a Pietroburgo nel 1783), che intravide la nuova ed ampia strada aperta all' analisi infinitesimale, ed a questo fine compose una Memoria col titolo: *Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium;* la quale è pubblicata nel tomo VI dei *Nova Commentaria* dell'Accademia di Scienze di Pietroburgo, anni 1756-57. L' Euler stabilì la formula generale per la corda dell'arco di lemniscata multiplo di un arco

dato s in funzione della corda z di quest' ultimo, generalizzando così la proposizione del Fagnani. Si noti con u la corda dell' arco ns e posto per brevità (1) $p = z\sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}}, q = u\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}$, la relazione dell' Euler consiste nell' eguaglianza (2) $v = \text{corda}\ (n+1)s = \frac{p+q}{1-pq}$. Infatti differenziando l' equazione precedente si ha $dv = \frac{dp\,(1+p^2)+dq\,(1+q^2)}{(1-pq)^2}$, ed in virtù della medesima (2) resulta:

$$\sqrt{1-v^4} = \frac{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)(1-p^2-q^2+p^2q^2-4pq)}}{(1-pq)^2}:$$

dividendo membro a membro le precedenti si ottiene:

$$(3)\ \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \left(dp\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} + dq\sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}}\right) : \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)-4pq}.$$

Per esprimere le quantità contenute nel secondo membro in funzione di u e z e dei loro differenziali, si osserva che dalle (1) si deducono le relazioni:

$$\frac{1+p^2}{1+q^2} = \frac{1+z^2}{1+u^2},\ 1-p^2 = \frac{1+u^2-z^2+u^2z^2}{1+u^2},\ 1-q^2 = \frac{1+z^2-u^2+u^2z^2}{1+z^2},$$

$4pq = \frac{4uz\sqrt{(1-u^4)(1-z^4)}}{(1+u^2)(1+z^2)}$; dalle quali facilmente consegue l' eguaglianza $(1-p^2)(1-q^2)-4pq = \frac{\left(\sqrt{(1-u^4)(1-z^4)}-2uz\right)^2}{(1+u^2)(1+z^2)}$; inoltre differenziando le (1) si trovano:

$$dp = dz\sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}} - \frac{2uz}{(1+u^2)}\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}},\ dq = du\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}} - \frac{2uz\,du}{(1+z^2)\sqrt{1-u^4}};$$

e questa a motivo dell' equazione differenziale $\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{n\,dz}{\sqrt{1-z^4}}$ (che nasce dall' ipotesi $u = \text{corda}\ ns$, $z = \text{corda}\ s$), con l' eliminazione di du assume la forma $dq = \frac{n\,dz\sqrt{1-u^4}}{1+z^2} - \frac{2uz\,dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^4}}$. Sostituendo le precedenti espressioni nella (3) si giunge all' equazione differenziale $\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{(n+1)\,dz}{\sqrt{1-z^4}}$; questa ci dimostra esser v la corda dell' arco $(n+1)s$. — Dalle formule del Fagnani si è veduto che la corda dell' arco complementare $(q-s)$ è $z_1 = \sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}$, rappresentando con v_1 la corda

dell'arco complementare dell'arco $(n+1)s$ si avrà:

$$v_1 = \sqrt{\frac{1-v^2}{1+v^2}} = \sqrt{\frac{(1-p^2)(1-q^2)-4pq}{(1+p^2)(1+q^2)}} = \frac{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}{(1+u^2)(1+z^2)-2u^2z^2}.$$

E poichè $\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)} = (1+u^2)(1+z^2)\sqrt{\frac{(1-z^2)(1-u^2)}{(1+u^2)(1+z^2)}}$, posto per brevità $(1+u^2)(1+z^2) = A$, $\sqrt{\frac{(1-z^2)(1-u^2)}{(1+z^2)(1+u^2)}} = B$, $uz = C$, risulta identicamente $A(1+B^2) = 2(1+C^2)$; e la relazione surriferita $v_1 = \frac{AB-2C}{A-2C^2}$ per l'eliminazione di A diviene $v_1 = \frac{(B-C)(1-BC)}{1-B^2C^2} = \frac{B-C}{1+BC}$.

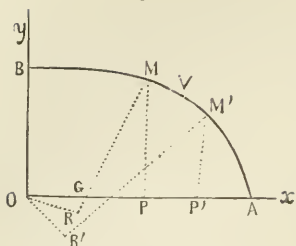
Dunque le formule ch'esprimono le corde degli archi $(n+1)s$ e $[q-(n+1)s]$ sono simili a quelle che dànno le tangenti della somma e della differenza di due archi circolari; cioè *notando respettivamente con z ed u le corde degli archi s ed ns della lemniscata, con z_1 ed u_1 le corde degli archi complementari $(q-s)$, $(q-ns)$, si hanno per le corde v e v_1 degli archi $(n+1)s$, $[q-(n+1)s]$ le relazioni* $v = \frac{uz_1+zu_1}{1-uu_1zz_1}$, $v_1 = \frac{u_1z_1-uz}{1+uu_1zz_1}$; così corda $2s = \frac{2zz_1}{1-z^2z_1^2} = \frac{2zz_1(1+z^2)}{1+z^4}$, corda $(q-2s) = \frac{z_1^2-z^2}{1+z^2z_1^2} = \frac{1-2z^2-z^4}{1+2z^2-z^4}$, corda $3s = z\left(\frac{3-6z^4-z^8}{1+6z^4-3z^8}\right)$, ec. (*)

In generale la corda di un arco multiplo dispari di s è una funzione razionale di z.

Il sommo Gauss scoprì il maraviglioso teorema: *La moltisezione della circonferenza e della lemniscata in un numero primo $p = 2^n+1$ di archi eguali, si può eseguire per costruzioni geometriche di secondo grado, cioè con intersezioni di cerchi e rette,* ei lo dimostrò solo per la circonferenza; in seguito l'illustre Abel derivò la proposizione dalla teorica della divisione delle funzioni ellittiche e dal metodo di Gauss per la soluzione dell'equazioni binomie; in questi ultimi anni il professor L. Kiepert, applicando le teoriche di Abel, ha determinato l'equazioni di secondo grado che risolvono il problema nel caso di $p = 17$. (**)

(*) Queste relazioni sono attualmente casi particolari delle formule della moltiplicazione delle funzioni ellittiche.

(**) Vedi la sua Memoria: *Siebzehntheilung des Lemniscatenumfangs durch alleinige Anwendung von Lineal und Cirkel.* Journal of Borchardt, tomo LXXV, anno 1873.

Fig. 6ª.

9. — Seguendo il metodo di Euler, si dimostrano facilmente i teoremi del Fagnani sugli archi delle coniche a differenza rettificabile.

L' arco ellittico BM contato dal vertice B del semiasse minore fino al punto M di ascissa x è definito dall' integrale $\int_o^x dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}$ in cui $e = \frac{c}{a}$. Siano ax_1, ax_2 le ascisse di due punti M ed M', il differenziale della somma dei due archi BM, BM' è eguale all' espressione $a\left(dx_1\sqrt{\frac{1 - e^2x_1^2}{1 - x_1^2}} + dx_2\sqrt{\frac{1 - e^2x_2^2}{1 - x_2^2}}\right)$, e considerando x_1, x_2 come funzioni di una stessa variabile indipendente t si osservi, che posto $\frac{1 - e^2x_1^2}{1 - x_1^2} = \frac{1}{x_2^2}$, ovvero riducendo questa a forma intera (1) $e^2x_1^2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = o$, si ottiene col differenziarla l'identità $e^2 d(x_1x_2) = \frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_1}$. Per il qual valore si avrà facilmente d (arco $BM +$ arco BM') $= a\left(\frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_1}\right) = ae^2d(x_1x_2)$, e quindi integrando si conchiude arco $BM +$ arco $BM' = ae^2x_1x_2 + C$.

I punti M ed M', le cui ascisse sono collegate dalla relazione (1), si chiamano corrispondenti od *associati*.

Il valore della costante C si otterrà osservando che per $x_1 = o$ si ha $x_2 = 1$, e però gli archi corrispondenti BM e BM' si riducono respettivamente a zero ed al quadrante ellittico $BMM'A$, onde la relazione precedente diviene (2) arco $BM +$ arco $BM' = ae^2x_1x_2 + BMM'A$, che riducesi alla forma arco $BM -$ arco $M'A = ecx_1x_2 = cex_1\sqrt{\frac{1 - x_1^2}{1 - e^2x_1^2}}$; dunque *ad un dato arco BM corrisponde un arco inverso AM', tale che la loro differenza è un' espressione algebrica.* In particolare se i punti M ed M' coincidono in V, si avrà arco $BV -$ arco $VA = ae^2x_1^2$, notando con x_1 la più piccola radice reale positiva dell' equazione $e^2x_1^4 - 2x_1^2 + 1 = o$; l' ascissa del punto V è $OV = ax_1 = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ e l' ordinata

$VP = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, onde la differenza fra gli archi BV, VA è eguale ad $\frac{(a^2-b^2)}{a^2}\frac{a^2}{a+b} = a - b$.

Il quadrato della distanza del punto V dal centro risulta $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2+b^2-2ab\cos 60^0$, dalla quale espressione si deduce potersi geometricamente costruire il punto N; perchè basterà descrivere un triangolo equilatero OAE sul semiasse OA dell'ellisse, indi sul lato AE prendere un segmento $AF = OB$ semiasse minore, e col raggio OF e centro O costruire un cerchio, il quale segherà nel punto cercato V il quadrante dell'ellisse. Se ax_o, ax'_o sono le ascisse di due altri punti associati N ed N', si avrà pure:

arco BN + arco $BN' = ae^2 x_o x'_o + C$, e sottraendovi l'altra
arco BM + arco $BM' = ae^2 x_1 x_2 + C$, si deduce
arco MN — arco $M'N' = ae^2(x_1 x_2 - x_o x'_o)$.

Così ad un dato arco MN avente l'origine in un punto qualunque M corrisponde un secondo arco $M'N'$, tale che la loro differenza è algebrica. Ora si osservi che l'ordinata del punto M è $y_1 = b\sqrt{1-x_1^2}$ e la normale $MG = n_1$ compresa fra il punto M e l'asse maggiore è eguale a $b\sqrt{1-e^2x_1^2}$; onde si ricava $x_2 = \frac{y_1}{n_1}$ e similmente $x'_o = \frac{y_o}{n_o}$; per i quali valori la relazione trovata diviene arco MN — arco $M'N' = ae^2\left(\frac{x_1 y_1}{n_1} - \frac{x_o y_o}{n_o}\right)$, (*) essendo (x_1, y_1), $(x_o\, y_o)$ le coordinate dei punti M, N ed n_1, n_o le normali condotte ai medesimi punti. Il rapporto $\frac{y_1}{n_1}$ è il coseno dell'angolo acuto τ formato dalla tangente al punto M con l'asse delle ascisse e similmente $\frac{y_o}{n_o} = \cos\tau_o$; onde posto $x_1 = \cos\alpha$, $x_o = \cos\alpha_o$, si avrà arco MN — arco $M'N' = \frac{c^2}{a}(\cos\alpha\cos\tau - \cos\alpha_o\cos\tau_o)$. (**)

L'arco ellittico $BM = a\int_0^x dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$ per $x = sen\,\varphi$ si esprime

(*) Quest'equazione fu data dall'illustre professor Augusto Grünert nei suoi *Archiv der Mathematik und Physik: Sechsundzwanzigster Theil*..., pag. 202.

(**) È sotto questa forma che il grande analista Luigi Agostino Cauchy espose il teorema del Fagnani nelle sue *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la Géométrie*, tome II.

secondo Legendre col simbolo $aE(e, \varphi) = a \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}$ e per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ottiene il quadrante; l'angolo φ fu chiamato l'ampiezza dell'integrale.

I punti associati M ed M' hanno respettivamente per coordinate $x' = a\, sen\, \varphi, y' = b \cos \varphi, x'' = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - c^2 sen^2 \varphi}} = a\, sen\, \varphi', y'' = \frac{b^2 sen\, \varphi}{\sqrt{a^2 - c^2 sen^2 \varphi}} =$ $= b \cos \varphi'$, dalle quali si deduce $tang\, \varphi\, tang\, \varphi' = \frac{a}{b}$: ponendo per brevità $c\, sen\, \varphi = A,\ c \cos \varphi = B,\ \frac{a c \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - c^2 sen^2 \varphi}} = A_1,\ \frac{b c\, sen\, \varphi}{\sqrt{a^2 - c^2 sen^2 \varphi}} = B_1$, si troverà che i punti M ed M' giacciono su due iperboli omofocali alla data ellisse ed aventi per equazioni $\frac{x'^2}{A^2} - \frac{y'^2}{B^2} = 1,\ \frac{x''^2}{A_1^2} - \frac{y''^2}{B_1^2} = 1$. Gli asintoti dei rami dell'iperbole fanno con l'asse dell'ellisse le inclinazioni θ e θ' determinate dalle eguaglianze $tang\, \theta = \frac{B}{A} = cot.\, \varphi,\ tang\, \theta' = \frac{B_1}{A_1} = \frac{b}{a} tang\, \varphi$, e quindi $tang\, \theta\, .\, tang\, \theta' = \frac{b}{a}$.

La tangente al punto M' ha per equazione $\frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} - 1 = o$, ovvero per le sostituzioni dei valori di x'', y'', $x \cos \varphi + y\, sen\, \varphi = \sqrt{a^2 - c^2 sen^2 \varphi}$, dalla quale apparisce che la normale abbassata dal centro sulla tangente fa un angolo φ con l'asse maggiore e la sua lunghezza è $p = a \sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}$, la distanza del centro dalla tangente in M si ottiene per la relazione $\frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{sen^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}} = \frac{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}}{b}$, e quindi ne consegue esser $pp' = ab$. I semidiametri dell'ellisse che hanno la stessa direzione degli asintoti sono $\rho_1 = \frac{ab}{p'}$ $\rho_2 = p'$, e perciò $\rho_1 \rho_2 = ab$. Facilmente risultano i semidiametri $OM = a\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi},\ OM' = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 sen^2 \varphi}{a^2 - c^2 sen^2 \varphi}}$ e la proiezione ortogonale del semidiametro OM sulla tangente in M essere $u = \sqrt{OM'^2 - p'^2} = \frac{c\, e\, sen\, \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}}$, che coincide col valore della differenza degli archi BM ed $M'A$: alla stessa conchiusione si giunge

mediante la proiezione ortogonale del semidiametro OM' sulla tangente al punto M'; infatti si ricava:

$$\sqrt{OM'^2 - p^2} = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2\varphi + b^4 \operatorname{sen}^2\varphi}{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2\varphi} - (a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2\varphi)} = \frac{c\,e \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Volendo costruire i punti M, M' dell'ellisse che soddisfano alla relazione:

arco BM — arco $M'A = u$, basterà risolvere rispetto a φ l'equazione $\frac{c^2 e^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi} = u^2$ e si otterranno le coordinate dei punti M, M'; al qual resultato si giunge pure osservando che la normale MG compresa fra il punto M e l'asse maggiore ha per valore $b\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$, l'ascissa di G è eguale a $\frac{c^2}{a^2} x' = c e \operatorname{sen}\varphi$, e la distanza del centro dalla normale è $OR = \frac{MP \,.\, OG}{GM} = \frac{c\,e \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$; parimente per la normale $M'G'$ si trova $OG' = \frac{c^2}{a^2} x'' = \frac{a e^2 \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$, $M'G' = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$, $OR' = OR$: dunque *le normali ai punti corrispondenti M ed M' sono distanti dal centro dell'ellisse di un segmento eguale alla differenza degli archi BM, $M'A$.* Per ottenere il massimo del segmento $OR = u$, si risolverà l'equazione $\frac{du}{d\varphi} = o$, cioè $e^2 \operatorname{sen}^4\varphi_o - 2 \operatorname{sen}^2\varphi_o + 1 = o$, da cui resulta $\operatorname{sen}^2\varphi_o = \frac{a}{c^2}(a \pm b)$. Si prenderà il segno inferiore, affinchè questa frazione non superi l'unità, e quindi $\operatorname{sen}^2\varphi_o = \frac{a(a-b)}{c^2}$, $\cos^2\varphi_o = \frac{b(a-b)}{c^2}$, $\operatorname{tang}\varphi_o = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $u = a - b$; per i quali valori i due punti M ed M' cadono nello stesso punto V, e le due iperbole omofocali coincidono in una sola, avente per semiassi $\sqrt{a(a-b)}$, $\sqrt{b(a-b)}$.

Siano x, y le coordinate del punto T d'incontro delle tangenti ai punti associati M, M', si avranno le relazioni $\frac{x'x''}{a^3} = \frac{a(b^2 - y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}$, $\frac{y'y''}{b^3} = \frac{b(a^2 - x^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}$, e dalle formule dimostrate risulta che i primi membri di queste relazioni sono eguali alla stessa quantità $\frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$; dunque il punto T descrive l'iperbole $a(b^2 - y^2) = b(a^2 - x^2)$, avente

per semiassi $\sqrt{a(a-b)}$, $\sqrt{b(a-b)}$, omofocale all'ellisse, e che passa per V e per i vertici del rettangolo costruito sugli assi $2a$, $2b$.

Gli angoli ω ed ω_1, che i semidiametri OM, OM' fanno con l'asse maggiore dell'ellisse, sono collegati per la relazione $tang.\,\omega\, tang.\,\omega_1 = \frac{b^3}{a^3}$; poichè esprimendo con β e β_1 gli angoli che i medesimi semidiametri fanno respettivamente con le normali alle tangenti, si trova $tang.\,\beta = \frac{u}{p}$, $tang.\,\beta_1 = \frac{u}{p'} = \frac{up}{ab}$; ora le normali p, p' fanno con l'asse maggiore gli angoli φ, φ_1 collegati dall'equazione $tang.\,\varphi\, tang.\,\varphi_1 = \frac{a}{b}$; inoltre si ha:

$$tang.\,\omega = tang.\,(\varphi - \beta) = \frac{p\, tang.\,\varphi - u}{p + u\, tang.\,\varphi},\quad tang.\,\omega_1 = \frac{tang.\,\varphi_1 - tang.\,\beta_1}{1 + tang.\,\varphi_1\, tang.\,\beta_1} =$$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{a^2 - pu\, tang.\,\varphi}{b^2\, tang.\,\varphi + pu}\right),$$ ed a motivo di $pu = c^2 sen\,\varphi \cos\varphi = \frac{c^2\, tang.\,\varphi}{1 + tang.^2\,\varphi}$ risulta $tang.\,\omega_1 = \frac{b}{a} \cot\varphi = \frac{b^2}{a^2} tang.\,\varphi_1$.

Similmente moltiplicando per p i due termini della frazione che dà il valore di $tang.\,\omega$, e posto in luogo di p^2 l'espressione equivalente $b^2 + \frac{c^2}{1 + tang^2\,\varphi}$, ed il precedente valore di pu, si ottiene $tang.\,\omega = \frac{b^2}{a^2} tang.\,\varphi$, ec.

Il teorema del Fagnani fu dimostrato geometricamente dall'inglese Brinkley (*) insieme con la proposizione: *la superficie convessa del cilindro obliquo a base circolare equivale ad un rettangolo avente per lati il diametro del cerchio ed il perimetro di un'ellisse descritta con assi eguali alla generatrice g e l'altezza h del cilindro medesimo;* infatti se α è l'inclinazione costante delle generatrici sul piano della base ed r il raggio del cerchio, la sezione retta è un'ellisse avente per semiassi r ed $r\, sen\,\alpha$; quindi il suo perimetro è $4r\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \cos^2\alpha\,.\,sen^2\varphi}$; e siccome $sen\,\alpha = \frac{h}{g}$, e la superficie laterale S del cilindro ha per misura il pro-

(*) « A Theorem for finding the Surface of an Oblique Cylinder with a Geometrical Demonstration. Also, an Appendix containing some Observations on the method of finding the Circumference of a very Excentric Ellipse; including a Geometrical Demonstration of the remarkable property of Elliptic Arc discovered by Count Fagnani. Transactions of the roy. Irish Academy, vol. IX. Dublin, 1803. »

dotto della generatrice per il perimetro della sua sezione retta, si conchiude:

$$S = 4rg \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{(g^2 - h^2)}{g^2} sen^2\varphi} = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{g^2 - (g^2 - h^2) sen^2\varphi},$$

che dimostra la proposizione del Brinkley.

Il metodo tenuto per l'ellisse si applica pure all'iperbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, il differenziale dell'arco s contato dal vertice A dell'asse trasverso fino al punto M, avente per ascissa x è $ds = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$.

Notando con ax_1, ax_2 le ascisse dei punti M ed M', si avrà:

$$d(\text{arco } AM + \text{arco } AM') = a\left(dx_1 \sqrt{\frac{e^2 x_1^2 - 1}{x_1^2 - 1}} + dx_2 \sqrt{\frac{e^2 x_2^2 - 1}{x_2^2 - 1}}\right);$$

e posta la relazione (1) $e^2 x_1^2 x_2^2 - e^2 (x_1^2 + x_2^2) + 1 = o$, si giungerà per gli archi corrispondenti all'equazione:

(2) arco $AM +$ arco $AM' = c x_1 x_2 + C$. Non si potrà determinare la costante facendo $x_1 = 1$, perchè risulterebbe $x_2 = \infty$; ma invece si prenderà il punto H determinato dalla (1) col porre $x_1 = x_2 = \sqrt{1 + \frac{b}{c}}$, e l'equazione (2) diviene 2 arco $AH = (b + c) + C$, dalla quale si ricava il valore della costante C, ec.

La curva inversa dell'iperbole equilatera è la lemniscata, poichè se la potenza d'inversione è eguale al quadrato del semiasse trasverso dell'iperbole, la cui equazione polare è $ON^2 = \rho^2 = \frac{a^2}{cos\, 2\omega}$, e $\rho' = OM$ è il raggio vettore corrispondente della curva inversa, si ottiene $\rho\rho' = a^2$, ed eliminando ρ si deduce $\rho'^2 = a^2 cos\, 2\omega$.

Anche la curva pedale del centro della suddetta conica sulle sue tangenti coincide con la stessa lemniscata; infatti l'asse trasverso dell'iperbole equilatera biseca l'angolo compreso fra il raggio vettore ON e la normale $OP = z$, abbassata dal centro sulla tangente al punto N, perchè detto α l'angolo AOP, sarà $\frac{\pi}{2} - \alpha$ l'inclinazione della tangente sull'asse trasverso e quindi $tang.\, \alpha = \frac{x - \frac{a^2}{x}}{y} = \frac{y}{x} = tang.\, \omega$, cioè $\alpha = \omega$.

Osservando che per il triangolo NOP resulta $z = \rho\, cos\, 2\omega$, si avrà $z^2 = a^2 cos\, 2\omega$, cioè $z = \rho'$; dunque la normale all'estremo M del raggio vettore della lemniscata tocca l'iperbole equilatera nel punto N' simmetrico, rispetto all'asse trasverso, del punto N appartenente alla stessa conica e reciproco di M.

Per ogni punto M della lemniscata si può descrivere una circonferenza C tangente alla curva in M e che passi il centro O; poichè la linea inversa di C è la tangente al punto corrispondente N dell' iperbole equilatera.

Se dal fuoco F dell' iperbole situato dalla stessa parte del vertice A si conduce la normale sulla tangente fino ad intersecare nei punti S ed S' la circonferenza descritta come diametro sull' asse trasverso, si troverà $SS' = 2a\,sen\,\beta$, in cui $2\beta = S'OS$; e poichè l' angolo $S'FO = \omega$, si avrà $cos\,\beta = \sqrt{2}\,.\,sen\,\omega$, $sen\,\beta = \sqrt{1 - 2\,sen^2\,\omega} = \sqrt{cos\,2\,\omega}$.

10. — Il geometra inglese Mäclaurin (nato a Kilmoddan nella Scozia l' anno 1698 e morto il 1746) nella sua famosa opera: *A Treatise of Fluxions* (Edinburgh 1742), espose molte proprietà delle coniche e di altre curve algebriche, generandole per mezzo del movimento, e mediante il metodo Newtoniano delle Flussioni determinò i differenziali degli archi delle linee medesime. Per esprimere l' arco dell' iperbole equilatera compreso fra il vertice A ed il punto N non solo prese per variabile il raggio vettore $ON = \rho$, scrivendo $s = \int_1^\rho \frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{\rho^4 - 1}}$; ma introdusse altre variabili collegate con ρ e ch' ei rappresentò graficamente, costruendo un triangolo rettangolo OAR sul semiasse OA dell' iperbole equilatera, in modo che l' angolo acuto ROA sia eguale al doppio di $\omega = NOA$.

Simboleggino m l' ipotenusa OR, μ l' altro cateto AR, n la proiezione ortogonale di OA sull' ipotenusa OR, v la normale tirata dal punto A su questa OR, t il segmento NP della tangente in N e $z = OP$, si trovano facilmente le relazioni $a = m\,cos\,2\,\omega$, $\rho^2 = a\,m$, $\mu = \sqrt{m^2 - a^2}$, $n = \frac{a^2}{m}$, $v = \frac{a\,\mu}{m} = \sqrt{a^2 - n^2}$, $z = \frac{n}{a}\rho$, $\rho^2 = z^2 + t^2$; e ne conseguono altre, come per esempio $\rho^2 = \frac{a^3}{n}$, $z^2 = an$, $t^2 = \frac{a^3}{n} - a\,n$. Facendo $a = 1$ si ottengono le seguenti espressioni per l' arco $2\,AN = 2\,s = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt[4]{1 + \mu^2}} =$

$$= \int_1^n \frac{dn}{\sqrt{n^3(1 - n^2)}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt[4]{(1 - v^2)^5}} = \int_1^m \frac{\sqrt{m}\,.\,dm}{\sqrt{m^2 - 1}}.$$

Referendo l' iperbole equilatera ai suoi asintoti e chiamando X, Y le coordinate del suo punto N, si prolunghi il raggio vettore ON fino ad incontrare in L la parallela menata dal vertice A ad un asintoto, una coordinata di L è eguale a quella di A, cioè $\frac{a}{\sqrt{2}}$, e l' altra si chiami p; è facile determinare le coordinate di N in funzione della variabile p

mediante le relazioni $XY = \frac{a^2}{2}$, $X : Y = p : \frac{a}{\sqrt{2}}$; per semplicità prendendo la potenza dell'iperbole eguale ad uno, ovvero $a = \sqrt{2}$, si ottiene $X = \sqrt{p}$, $Y = \frac{1}{\sqrt{p}}$, ed il raggio vettore $ON = \rho = \sqrt{p + \frac{1}{p}}$. L'arco AN si calcola in funzione di p con l'integrale:

$$2s = \int_1^p \sqrt{\frac{p^2+1}{p^3}} \,.\, dp, \text{ ec.}$$

Sono assai notevoli l'espressioni date dal Mäclaurin per gli archi dell'iperbole ed ellissi qualunque. Siano a, b i semiassi trasverso ed immaginario dell'iperbole, ρ il raggio vettore centrale di un suo punto M, $OP = z$, la normale condotta dal centro sulla tangente in M, $MP = t$, ρ_1 il semidiametro coniugato ad OM, per i teoremi di Apollonio si hanno le relazioni $\rho^2 - \rho_1^2 = a^2 - b^2$, $z\rho_1 = ab$. Si faccia $\frac{a^2 - b^2}{2a} = \varepsilon$, si potranno esprimere i semidiametri ρ, ρ_1 in funzione di z nel seguente modo: $\rho^2 = \rho_1^2 + 2a\varepsilon = \frac{a^2 b^2}{z^2} + 2a\varepsilon$, e introducendo la variabile $u = \frac{ab^2}{z^2}$, si ottiene $\rho^2 = au + 2a\varepsilon$.

Inoltre si ha pure $\rho^2 = x^2 + y^2 = e^2x^2 - b^2$, e per ciò $e^2x^2 = a^2 + au$, da cui $dx = \frac{du\sqrt{a}}{2e\sqrt{a+u}}$, sostituendo questi valori nell'integrale:

$s = \int_a^x dx \sqrt{\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$, questo assume la forma (1) $s = \int_{\frac{b^2}{a}}^u \frac{du\sqrt{au}}{\sqrt{u^2 + 2\varepsilon u - b^2}}$.

Il segmento $t = \sqrt{\rho^2 - z^2}$ della tangente si esprime in funzione di u con la relazione $t = \sqrt{\frac{a(u^2 + 2\varepsilon u - b^2)}{u}}$; da cui $dt = \frac{1}{2} \frac{(u^2 + b^2)\sqrt{a}\,du}{u\sqrt{u(u^2 + 2\varepsilon u - b^2)}}$; e quindi la differenza fra l'arco e la tangente è dato dall'integrale

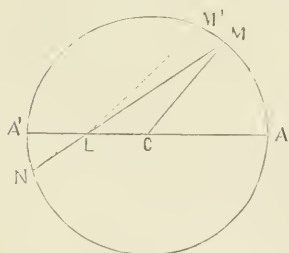
(2) $t - s = \frac{1}{2}\int_{\frac{b^2}{a}}^u \frac{b^2\sqrt{a}\,.\,du}{u\sqrt{u(u^2 + 2\varepsilon u - b^2)}}$. Assumendo invece per variabile la normale z, si avrà $du = \frac{-2ab^2\,dz}{z^3}$, e per conseguenza

$$s = \int_a^z \frac{-a^2b^2\,dz}{z^2\sqrt{(a^2 - z^2)(b^2 + z^2)}}, \quad t - s = \int_a^z \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(b^2 + z^2)}}.$$

Parimente nell' ellisse, i cui semiassi sono a, b, facendo $a^2+b^2=2a\varepsilon$, $u=\frac{ab^2}{z^2}$, per i teoremi di Apollonio $\rho^2+\rho_1^2=a^2+b^2$, $\rho_1 z=ab$, si troverà $\rho^2=2a\varepsilon-au=e^2x^2+b^2$, da cui $e^2x^2-a^2=-au$, $dx=\frac{-\sqrt{a}\,.\,du}{2e\sqrt{a-u}}$; e detto σ l' arco limitato fra il vertice A dell' asse maggiore ed il punto M si trova $\sigma=\frac{1}{2}\int_{\frac{b^2}{a}}^{u}\frac{du\sqrt{au}}{\sqrt{-b^2+2\varepsilon u-u^2}}=\int_{a}^{z}\frac{-a^2b^2\,dz}{z^2\sqrt{(a^2-z^2)(z^2-b^2)}}$.

Per altre particolarità si consulti la Memoria del professor Felix Müller, avente per titolo: *Studien über Mac Laurin's geometrische Darstellung elliptischer Integrale*: Berlin, 1875.

11. — I Teoremi di Landen. — Il matematico inglese John Landen (nato a Peakirk l'anno 1719 e morto a Milton il 1790) scoprì alcune belle proposizioni sulle trasformazioni degl' integrali che rappresentano archi ellittici ed iperbolici, ed il celebre Jacobi le ha dimostrate mediante costruzioni geometriche.

Fig. 7ª.

Si consideri nel cerchio di raggio $CA=R$ un punto L situato sul diametro AA' alla distanza $LC=r$ dal centro, sia l' angolo $ACM=2\varphi'$, $ALM=\varphi$, e prendasi un punto M' infinitamente prossimo ad M, sarà *lim.* arco $MM'=2R\,d\varphi$, *lim.* angolo $MLM'=d\varphi$ e *lim.* angolo $MM'L=$ $=lim.\,MM'C+CM'L=\frac{\pi}{2}+CM'L$. Dal triangolo $MM'L$ risulta la proporzione (1) $\frac{MM'}{ML}=\frac{sen\,MLM'}{sen\,MM'L}$, e poichè $lim. sen\,MM'L=lim. cos. CM'L=lim.\sqrt{1-sen^2CM'L}=\sqrt{1-sen^2CML}=$ $=\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}sen^2\varphi}$, $lim.\ sen.\ MLM'=d\varphi$, $lim.\ MM'=2R\,d\varphi'$, ed $ML=\sqrt{R^2+r^2+2Rr\,.\,cos\,2\varphi'}=(R+r)\sqrt{1-\frac{4Rr}{(R+r)^2}sen^2\varphi'}$; posto per brevità $\frac{r}{R}=k$, $\frac{4Rr}{(R+r)^2}=\frac{4k}{(1+k)^2}=h^2$, la proporzione (1) assume la forma $\frac{d\varphi'}{\left(\frac{1+k}{2}\right)\sqrt{1-h^2sen^2\varphi'}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,sen^2\varphi}}$, ed integrando si ottiene (2) $F(h,\varphi')=\left(\frac{1+k}{2}\right)F(k,\varphi)$; in cui (3) $h=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, mag-

giore di $\sqrt{k}$, ed a fortiori di k nell' ipotesi che questo numero detto il modulo sia minore di uno, ed il simbolo $F(k, \varphi)$ rappresenta, secondo il Legendre, l' integrale *ellittico di prima specie* $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \, sen^2 \varphi}}$. Esprimendo k in funzione di h, si trova $k = \frac{2 - h^2 - 2\sqrt{1 - h^2}}{h^2}$; notando con h_1 il radicale, si deducono l'eguaglianze $1 + k = \frac{2}{1 + h_1}$, $1 - k = \frac{2h_1}{1 + h_1}$.

La relazione che collega gli angoli φ e φ' si ricava dal triangolo CML, ed è $\frac{sen\, CLM}{sen\, LMC} = \frac{CM}{CL}$, ovvero:

(4) $sen(2\varphi' - \varphi) = k \, sen \, \varphi$; dalla quale facilmente derivano le seguenti:

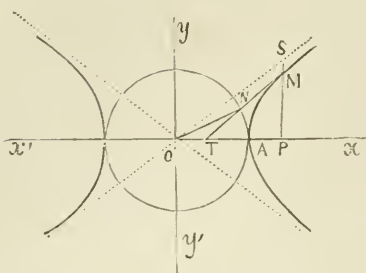
(5) $tang.\, \varphi = \frac{sen\, 2\varphi'}{k + cos\, 2\varphi'}$, (6) $tang.\, (\varphi - \varphi') = \frac{1 - k}{1 + k} \, tang.\, \varphi'$.

A motivo della relazione (4) si conchiude $sen(2\varphi' - \varphi) < sen\, \varphi$, e per conseguenza $2\varphi' - \varphi < \varphi$, cioè $\varphi' < \varphi$; dunque mediante la formula (2) del Landen *un integrale ellittico di prima specie si trasforma in un altro omonimo di modulo maggiore ed ampiezza minore,* o viceversa *in un altro di modulo minore e di ampiezza maggiore.* Sia P il piede della normale condotta dal centro C sulla LM, ed N il secondo punto di sezione di questa retta con la circonferenza, posto $NL = p$, $LM = p'$, si ricavano $PM = \frac{p + p'}{2} = R\sqrt{1 - k^2 \, sen^2 \varphi}$, $LP = \frac{p' - p}{2} = r \cos \varphi$; la relazione (1) è identica alla semplice eguaglianza $\frac{2\, d\varphi'}{p'} = \frac{d\varphi}{\frac{p + p'}{2}}$, e quindi si deduce l' equazione $(p + p')\, d\varphi + (p' - p)\, d\varphi = 2p\, d\varphi' + 2p'\, d\varphi'$; osservando poi che dalla figura si ha pure $pp' = R^2 - r^2$, resulterà $(p + p')\, d\varphi + (p' - p)\, d\varphi = 2 d\varphi' \frac{(R^2 - r^2)}{p'} + 2p'\, d\varphi'$, ovvero $d\varphi \sqrt{1 - k^2 \, sen^2 \varphi} + k \, d\varphi \cos \varphi = (1 + k) \sqrt{1 - h^2 \, sen^2 \varphi'}\, d\varphi' + \frac{(1 - k)\, d\varphi'}{\sqrt{1 - h^2 \, sen^2 \varphi'}}$.

Si integri questa equazione fra i limiti o e φ, indicando col simbolo $E(k, \varphi)$ *l' integrale ellittico di seconda specie* $\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \, sen^2 \varphi}$, e si avrà l' eguaglianza $E(k, \varphi) - k \, sen \, \varphi = (1 + k)\, E(h, \varphi') + (1 - k)\, F(h, \varphi')$, la quale per la relazione (2) diviene:

(7) $E(k, \varphi) + k \, sen \, \varphi - (1 + k)\, E(h, \varphi') = \frac{(1 - k^2)}{2} F(k, \varphi)$,

che dà il modo di trasformare un integrale ellittico di prima specie nella somma di due integrali ellittici di seconda specie. (*)

Fig. 8a.

Per dimostrare i teoremi del Landen sugli archi delle coniche col centro a distanza finita, si osservi che nell'iperbole (8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ l'angolo di una tangente MT con l'asse trasverso è determinato per la formula $tang.\,\alpha=\frac{b^2 x}{a^2 y}$, e l'ascissa del punto T sezione con l'asse Ox è $OT=\frac{a^2}{x}$. Dicasi N l'intersezione di MT con la circonferenza concentrica all'iperbole e di raggio a, φ il complemento dell'angolo acuto ONT, si avrà la proporzione $\frac{OT}{ON}=\frac{\cos\varphi}{sen\,\alpha}$, da cui $\cos\varphi=\frac{a\,sen\,\alpha}{x}=\frac{a\,b^2}{\sqrt{a^4 y^2+b^4 x^2}}$, ovvero (9) $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}$.

Dall'equazioni (8) e (9) si ricavano facilmente le coordinate di M, cioè $\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2\,sen^2\,\varphi}}{c\,.\cos\varphi}$, $\frac{y}{b}=\frac{b}{c}\,tang.\,\varphi$, e posto $\frac{a}{c}=k$, $\frac{b}{c}=\sqrt{1-k^2}=$ $=k_1$, $\sqrt{1-k^2\,sen^2\,\varphi}=\Delta\varphi$, le precedenti differenziate rispetto alla variabile φ divengono $\frac{dx}{a}=-\frac{k_1^2\,sen\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi}$, $\frac{dy}{a}=-\frac{k_1^2\,d\varphi}{k\cos^2\varphi}$, e per conseguenza $ds=\frac{a\,k_1^2\,d\varphi}{k\cos^2\varphi\,\Delta\varphi}$, ovvero $\frac{k}{a}\frac{ds}{d\varphi}=\frac{1-k^2\,sen^2\,\varphi-k^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi}=$ $=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Delta\varphi-\frac{k^2}{\Delta\varphi}$. Considerando il primo termine di quest'ultimo membro come una parte della derivata del prodotto $tang.\,\varphi\,\Delta\varphi$, si vedrà facilmente che l'altra parte è eguale a $-\frac{k^2\,sen^2\,\varphi}{\Delta\varphi}$; onde aggiungendola e togliendola, risulta $\frac{k}{a}\,ds=d(\Delta\varphi\,tang.\,\varphi)-d\varphi\,.\,\Delta\varphi+(1-k^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$. S'integri questa eguaglianza fra i limiti o e φ della variabile, che corrispondono al vertice A ed al punto M, ne risulterà la relazione:

$$\text{arco } AM=\frac{a}{k}\,\Delta\varphi\,tang.\,\varphi-\frac{a}{k}\,E(k,\varphi)+\frac{a}{k}\,(1-k^2)\,F(k,\varphi);$$

(*) Le Memorie di Landen si trovano nelle *Philosophical Transactions*, degli anni 1771-75, e nelle *Mathematical Memoirs*, anno 1780. — Vedi inoltre il brano di una lettera di Jacobi ad Hermite nel tomo 32° del Giornale di Crelle. — La scoperta di Landen fu il principio della teorica delle trasformazioni degl'integrali sviluppata in seguito da Jacobi.

e poichè l' integrale $F(k, \varphi)$ si esprime con quelli ellittici di seconda specie mediante la trasformazione di Landen, si deduce il teorema di questo geometra, cioè « *Ogni arco d' iperbole è la somma di due archi ellittici e di un' espressione algebrica.* »

Se i due punti M ed M' dell' arco iperbolico MM sono situati dalla stessa parte dell' asse trasverso e sullo stesso ramo si avrà:

$$\text{arco } MM' = \frac{a}{k}(tang.\varphi' \Delta \varphi' - tang.\varphi \Delta \varphi) - \frac{a}{k}\Big[E(k, \varphi') - E(k, \varphi)\Big] + \\ + \frac{a}{k}(1-k^2)\Big[F(k, \varphi') - F(k, \varphi)\Big].$$

Sia S il punto dell' asintoto al ramo d' iperbole su cui si trova il punto M, dalla stessa parte dell' asse trasverso ed avente per ascissa x, si avrà:

$$OS = \frac{cx}{a} = a\frac{\sqrt{1 - k^2 sen^2 \varphi}}{k \cos \varphi},$$

e quindi:

$$OS - \text{arco } AM = \frac{a}{k}\Delta\varphi\sqrt{\frac{1 - sen\,\varphi}{1 + sen\,\varphi}} + \frac{a}{k}E(k, \varphi) - \frac{a}{k}(1-k^2)F(k, \varphi).$$

Ponendo in questa relazione $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i punti M ed S passano a coincidere all' infinito, e ne risulta la differenza fra l' asintoto ed un intero ramo dell' iperbole cioè:

$$2\,OM_\infty - 2 \text{ arco } AM_\infty = \frac{2a}{k}E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2a}{k}(1-k^2)F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Osservazione. — Nella parabola $y^2 = 2px$, presa per variabile indipendente l' angolo α della normale con l' asse Ox, si avrà $y = p\,tang.\alpha$. $x = \frac{p}{2}tang.^2\alpha$, e perciò $ds = \frac{pd\alpha}{\cos^3\alpha}$; chiamando t la lunghezza della tangente limitata fra il punto M di contatto e l' incontro con l' asse Ox trovasi $t = \frac{p\,sen\,\alpha}{\cos^2\alpha}$, $-\frac{1}{2}dt = \frac{p}{2}\frac{d\alpha}{\cos\alpha} - \frac{p\,.\,d\alpha}{\cos^3\alpha}$, e per conseguenza $ds - \frac{1}{2}dt = \frac{p}{2}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$, la quale integrata diviene:

$s = \frac{1}{2}t + \frac{p}{2}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - sen^2\alpha}} = \frac{1}{2}t + \frac{p}{2}F(1, \alpha)$; il valore di quest' integrale è pure $log.\,tang.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Capo Secondo.

ADDIZIONE DEGL' INTEGRALI ELLITTICI.

12. — Verso gli anni 1756-57 Euler continuò ad estendere i teoremi di Fagnani sugli archi delle coniche a differenza rettificabile, col situare le origini di essi in punti arbitrari della curva, anzichè nei vertici e quasi per divinazione riescì ad integrare l' equazione differenziale risultante dall' ipotesi del problema così generalizzato e della forma (1) $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = o$, in cui X e Z simboleggiano polinomi razionali ed interi, biquadratici ad una sola variabile x o z e con medesimi coefficienti. (*) Il celebre Svizzero stabilì a priori dover l' integrale dell' equazione (1) equivalere alla seguente relazione algebrica razionale ed intera, biquadratica fra le due variabili, e di secondo grado rispetto a ciascuna di queste, cioè:

$$(2) \qquad x^2 + z^2 + 2\alpha xz + \beta x^2 z^2 + 2\gamma xz(x+z) + 2\delta(x+z) + \varepsilon = o,$$

le quantità α, β, γ, δ, ε indicando funzioni dei coefficienti di X e della costante C, e lo dimostrò col metodo di verificazione; cioè differenziando la (2) e procurando d' identificare l' eguaglianza che ne risulta con la (1) mediante ingegnose trasformazioni algebriche. Come esempio si consideri il caso che i polinomi X e Z siano privi dei termini di grado dispari rispetto alle variabili x, z: ovvero $X = m + px^2 + qx^4$, $Z = m + pz^2 + qz^4$ e si esamini se l' integrale algebrico della (1) possa identificarsi con l' equazione:

(3) $x^2 + z^2 + 2\alpha xz + \beta x^2 z^2 + \varepsilon = o$. Col differenziare quest' ultima si trova

(4) $dx(x + \alpha z + \beta xz^2) + dz(z + \alpha x + \beta x^2 z) = o$ e poichè risolvendo successivamente la (3) rispetto a ciascuna variabile si ottengono le relazioni:

$$x + \alpha z + \beta xz^2 = \sqrt{\alpha^2 z^2 - (1 + \beta z^2)(\varepsilon + z^2)}$$

$$(5) \qquad z + \alpha x + \beta zx^2 = \sqrt{\alpha^2 x^2 - (1 + \beta x^2)(\varepsilon + x^2)},$$

è chiaro che in virtù delle medesime la (4) diverrà identica alla (1), qualora si possono soddisfare le condizioni $\varepsilon = -mu^2$, $\alpha^2 - \beta\varepsilon - 1 = pu^2$,

---

(*) *De integratione æquationis differentialis* $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$. Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ, tomi VI, VII.

$\beta = - qu^2$; si avverta che i coefficienti di X e Z nella (1) si sono moltiplicati per la costante u^2, lo chè equivale a dividere per u i due membri della (1). Dalle precedenti relazioni si deducono i valori $\varepsilon = - mu^2$, $\beta = - qu^2$, $\alpha = \sqrt{1 + pu^2 + mqu^4}$; perciò l'integrale (3) della (1) diviene:

$$(6) \qquad x^2 + z^2 + 2\,x\,z\,\sqrt{1 + pu^2 + mqu^4} - qu^2\,x^2\,z^2 - mu^2 = o, \; (*)$$

od una delle relazioni (5), le quali per i valori trovati dei coefficienti si riducono all' eguaglianze:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x\,(1 - q\,z^2\,u^2) + z\,\sqrt{1 + pu^2 + mqu^4} &= u\,\sqrt{m + pz^2 + qz^4} \\ z\,(1 - q\,x^2\,u^2) + x\,\sqrt{1 + pu^2 + mqu^4} &= u\,\sqrt{m + px^2 + qx^4}. \end{aligned}$$

Moltiplicando respettivamente queste due per x e per z e poi aggiungendole, la nuova eguaglianza in virtù della (6) riducesi alla forma:

$$(8) \qquad u = \frac{z\,\sqrt{m + px^2 + qx^4} + x\,\sqrt{m + pz^2 + qz^4}}{1 - qx^2\,z^2}.$$

Se le variabili x e z si considerano come funzioni di una indipendente t, l' equazione (1) a motivo delle (7) conduce alle relazioni:

$$dx = \lambda \;\; (z - qu^2\,x^2\,z + x\,\sqrt{1 + pu^2 + mqu^4})\;dt$$
$$dz = -\,\lambda\,(x - qu^2\,z^2\,x + z\,\sqrt{1 + pu^2 + mqu^4})\;dt,$$

nelle quali la lettera λ rappresenta il rapporto $\dfrac{dx}{\sqrt{X}}$.

Si moltiplichino respettivamente per z ed x le precedenti eguaglianze e poi aggiungendole si ricaverà la quantità λ in funzione delle variabili, cioè:

$$(9) \qquad \lambda = \frac{-\,d\,(x\,z)}{dt\,(x^2 - z^2)}.$$

Euler applicò questa formula a determinare in quali casi il differenziale $d\,V = \dfrac{X_1\,dx}{\sqrt{X}} + \dfrac{Z_1\,dz}{\sqrt{Z}}$ sia integrabile algebricamente; X_1 e Z_1 rap-

(*) Da questa equazione (6) dovuta ad Euler il chiarissimo Professor Siacci ricavò gl' integrali particolari del Fagnani, relativi ai teoremi sugli archi delle coniche a differenza rettificabile (pag. 11); infatti ponendo $m = 1$, $p = \dfrac{h}{l} + \dfrac{f}{g}$, $q = \dfrac{hf}{gl}$, l'equazione differenziale (1) riducesi a $\dfrac{dx}{\sqrt{(fx^2 + g)\,(hx^2 + l)}} + \dfrac{dz}{\sqrt{(fz^2 + g)\,(hz^2 + l)}} = o$ e l' integrale (6) diviene $gl\,(x^2 + z^2) + 2\,xz\,\sqrt{gl\,(l + hu^2)\,(g + fu^2)} - fhu^2\,x^2\,z^2 - glu^2 = o$. Attribuendo successivamente alla costante u^2 i valori particolari $-\dfrac{l}{h}$, $-\dfrac{g}{f}$, ∞ si ottengono gl' integrali del Fagnani. Vedasi il *Bullettino di Bibliografia matematica*, del principe Boncompagni, anno 1870.

presentando polinomi razionali ed interi rispetto alla variabile x o z, ed inoltre quest'ultime siano collegate dall'equazione (1). In virtù dell'ipotesi resultano i differenziali $dx = u\lambda\, dt\, \sqrt{X}$, $dz = -u\lambda\, dt\, \sqrt{Z}$, e perciò si avrà $dV = u\lambda\,(X_1 - Z_1)\, dt = \frac{u\,(Z_1 - X_1)\, d\,(xz)}{x^2 - z^2}$; siccome u denota una costante arbitraria, l'espressione $\frac{Z_1 - X_1}{x^2 - z^2}\, d\,(xz)$ deve ridursi ad un differenziale esatto rispetto alla variabile indipendente; così per esempio prendendo $X_1 = a + bx^2$, $Z_1 = a + bz^2$ si conchiude $dV = -bu\, d(xz)$, e quindi $V = -bu\, xz + C$. Nel caso particolare di $m = 1$, u significa il valore di z corrispondente ad $x = o$ e però si deduce facilmente l'identità:

$$(10)\quad \int_o^x \frac{(a + bx^2)\, dx}{\sqrt{1 + px^2 + qx^4}} + \int_o^z \frac{(a + bz^2)\, dz}{\sqrt{1 + pz^2 + qz^4}} - \int_o^u \frac{(a + bu^2)\, du}{\sqrt{1 + pu^2 + qu^4}} = -bu\, xz.$$

Parimente assumendo $X_1 = \frac{1}{a + bx^2}$, $Z_1 = \frac{1}{a + bz^2}$ si trova $\frac{Z_1 - X_1}{x^2 - z^2} =$ $= -\frac{b}{a^2 + ab\,(x^2 + z^2) + b^2\, x^2 z^2}$, e posto per brevità $\sqrt{1 + pu^2 + qu^4} = \Delta$, dalla (6) si ricava $x^2 + z^2 = -2xz\,\Delta + qu^2 x^2 z^2 + u^2$, e per conseguenza $dV = -\frac{bu\, d\,(xz)}{a\,(a + bu^2) - 2\, ab\,\Delta\, xz + b\,(b + aqu^2)\, x^2 z^2}$, dunque l'integrale V sarà evidentemente una funzione logaritmica o goniometrica di $t = xz$; così notando con A, B, C le respettive costanti $a\,(a + b)\, u^2$, $ab\,\Delta$, $b\,(b + aqu^2)$ e col simbolo $\Pi\,(x)$ l'integrale $\int_o^x \frac{dx}{(a + bx^2)\sqrt{1 + px^2 + qx^4}}$ si avrà la relazione:

$$(11)\quad \Pi\,(x) + \Pi\,(z) - \Pi\,(u) = \int_o^t \frac{-bu\, dt}{A - 2Bt + Ct^2} = -\frac{bu}{\sqrt{AC - B^2}}\, arc\, tang \frac{t\sqrt{AC - B^2}}{A - Bt}.$$

Legendre chiamò *integrali ellittici di prima, seconda e terza specie* le successive espressioni trascendenti:

$$\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\, \varphi}} = F\,(k, \varphi)$$

$$\int_o^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \int_o^\varphi \frac{sen^2\, \varphi\, d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\, \varphi}} = G\,(k, \varphi)$$

$$\int_o^x \frac{dx}{(1 + nx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \int_o^\varphi \frac{d\,\varphi}{(1 + n\, sen^2\, \varphi)\sqrt{1 - k^2 sen^2\, \varphi}} = \Pi\,(n, k, \varphi),$$

essendo $x = sen\,\varphi$; l'angolo φ si dice *l'ampiezza, k* il *modulo* ed n il *parametro*. Gl'integrali ellittici si dicono *completi* quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$, e *complementari* due moduli k, k_1 quando la somma dei loro quadrati è eguale ad uno.

Le relazioni (8), (10), (11) trovate da Euler, somministrano le formule di addizione degl'integrali ellittici; infatti si ponga $m = 1$, $-p = 1 + k^2$, $q = k^2$, $x = sen\,\varphi$, $z = sen\,\varphi'$, $u = sen\,\mu$ e $\Delta\,\varphi$ simboleggi brevemente l'espressione $\sqrt{1 - k^2 sen^2\,\varphi}$; l'equazione differenziale (1) prende la forma (I) $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = o$, il cui integrale trascendente è secondo le notazioni di Legendre (II) $F(k,\varphi) + F(k,\varphi') = F(k,\mu)$ rappresentando con μ il valore di φ per $\varphi' = o$. L'ampiezza μ si otterrà dalla relazione (8) con le precedenti sostituzioni per la formula:

$$\text{(III)} \qquad sen\,\mu = \frac{sen\,\varphi' \cos\varphi\,\Delta\,\varphi + sen\,\varphi \cos\varphi'\,\Delta\,\varphi'}{1 - k^2 sen^2\,\varphi\, sen^2\,\varphi'}.$$

Con semplici calcoli è facile dedurre da questa l'eguaglianze:

$$\text{(IV)} \qquad \cos\mu = \sqrt{1 - sen^2\,\mu} = \frac{\cos\varphi\cos\varphi' - sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\,\Delta\,\varphi\,\Delta\,\varphi'}{1 - k^2 sen^2\,\varphi\, sen^2\,\varphi'}$$

$$tang\,\mu = \frac{tang\,\varphi \,.\, \Delta\,\varphi' + tang\,\varphi' \,.\, \Delta\,\varphi}{1 - tang\,\varphi\, tang\,\varphi' \,.\, \Delta\,\varphi\,\Delta\,\varphi'}.$$

$$\text{(V)} \qquad \Delta\,\mu = \sqrt{1 - k^2 sen^2\,\mu} = \frac{\Delta\,\varphi \,.\, \Delta\,\varphi' - k^2 sen\,\varphi\, sen\,\varphi' \cos\varphi\cos\varphi'}{1 - k^2 sen^2\,\varphi\, sen^2 .\, \varphi'}.$$

Moltiplicando i due membri di quest'ultima per $sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$ ed aggiungendo la nuova con la (IV) si trova la relazione di Lagrange:

$$\text{(VI)} \qquad \cos\mu + sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\,\Delta\,\mu = \cos\varphi\cos\varphi'. \; (*)$$

Per la quale, isolando il termine che contiene $\Delta\,\mu$ ed innalzando poi a quadrato i due membri, con brevi riduzioni si ricava l'eguaglianza simmetrica:

$$\cos^2\mu + \cos^2\varphi + \cos^2\varphi' - 2\cos\mu\cos\varphi\cos\varphi' + k^2 sen^2\,\mu\, sen^2\,\varphi\, sen^2\,\varphi' = 1.$$

Così pure dalle relazioni (IV) e (V) risulta:

$$\Delta\,\mu + k^2 \cos\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi' = \Delta\,\varphi \,.\, \Delta\,\varphi', \text{ ec.}$$

È evidente l'identità $F(k, -\varphi) = -F(k,\varphi)$ e perciò l'equazione (II) si potrà pure scrivere sotto le due forme:

$$F(k,\varphi') = F(k,\mu) + F(k, -\varphi), \quad F(k,\varphi) = F(k,\mu) + F(k, -\varphi');$$

(*) *Théorie des Fonctions Analytiques*, première partie, chap. XI, pubblicata a Parigi l'anno 1797, e la seconda edizione nel 1813.

onde si muti nella (VI) μ in φ' (ovvero φ) e viceversa, ed il segno alla rimanente ampiezza φ (ovvero φ') e facilmente deduconsi le relazioni:

$$\text{(VII)} \qquad \cos\varphi' - \operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\varphi\, \Delta\varphi = \cos\mu \,.\, \cos\varphi$$

$$\text{(VIII)} \qquad \cos\varphi - \operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\varphi'\, \Delta\varphi' = \cos\mu \,.\, \cos\varphi'.$$

Eliminando $\cos\mu$ fra ciascuna di queste eguaglianze e la (VI) risultano l'espressioni:

$$\Delta\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi' \Delta\mu + \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\mu} \qquad \Delta\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi' \cos\varphi \,.\, \Delta\mu + \cos\varphi' \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\mu}:$$

dalle quali si conchiudono le formule simmetriche:

$$\text{(IX)} \quad \Delta\varphi + \Delta\varphi' = \frac{1+\Delta\mu}{\operatorname{sen}\mu} \operatorname{sen}(\varphi+\varphi'), \quad \Delta\varphi - \Delta\varphi' = \frac{\Delta\mu - 1}{\operatorname{sen}\mu} \operatorname{sen}(\varphi-\varphi').$$

Cambiando il segno ad una delle ampiezze φ, φ' in tutte le precedenti equazioni, si troveranno quelle relative alla sottrazione degl'integrali ellittici di prima specie, cioè le formule risolventi l'equazione differenziale $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}$.

La moltiplicazione degl'integrali ellittici di prima specie è un'addizione ripetuta; per esempio, posto $\varphi' = \varphi$ e detto φ_2 il valore corrispondente di μ si ha $F(\varphi_2) = 2F(\varphi)$ e $\cos\varphi_2 = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi + k^2\operatorname{sen}^4\varphi}{1 - k^2\operatorname{sen}^4\varphi}$; in simil modo risulta $F(\varphi_3) = F(\varphi_2) + F(\varphi) = 3F(\varphi)$, ed il valore di φ_3 si deduce dalla (III) facendo $\varphi' = \varphi_2$ e con facili riduzioni si trova:

$$\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{3\operatorname{sen}\varphi - 4(1+k^2)\operatorname{sen}^3\varphi + 6k^2\operatorname{sen}^5\varphi - k^4\operatorname{sen}^9\varphi}{1 - 6k^2\operatorname{sen}^4\varphi + 4k^2(1+k^2)\operatorname{sen}^6\varphi - 3k^4\operatorname{sen}^8\varphi}, \text{ ec.}$$

così proseguendo si potrà determinare l'ampiezza φ_n che soddisfa alla relazione $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$ —. Nel problema inverso, cioè la divisione degl'integrali ellittici di prima specie, si supporrà φ_n come quantità nota e si risolveranno rispetto a φ l'equazioni della moltiplicazione; in generale il valore di $\operatorname{sen}\varphi$ è radice di un'equazione di grado n^2.

13. — Considerando l'integrale $F(k,\varphi)$ come una quantità variabile u, la sua ampiezza od amplitudine φ è funzione di u e si nota col simbolo $am.u$; le quantità $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ si rappresentano con $sen.am\,u, cos.am\,u, \delta\,am.u$, ovvero per le notazioni di Gudermann con $sn.u$, $cn.u$, $\delta n.u$; queste funzioni inverse dell'integrale u diconsi *ellittiche* e si chiamano respettivamente *seno, coseno, delta dell' ampiezza u;* è chiaro che μ è l'ampiezza

dell'integrale $u+v$, e φ, φ' sono le amplitudini degl'integrali $u = F(k, \varphi)$, $v = F(k, \varphi')$. Con questa notazione le formule di addizione divengono:

$$sn.(u \pm v) = \frac{sn.u\, cn.v\, \delta n.v \pm sn.v\, cn.u\, \delta n.u}{1 - k^2 sn^2.u\, sn^2.v}$$

$$cn.(u \pm v) = \frac{cn.u\, cn.v \mp sn.u.\, \delta n.u sn.v\, \delta n.v}{1 - k^2 sn^2.u\, sn^2.v}$$

$$\delta n.(u \pm v) = \frac{\delta n.u\, \delta n.v \mp k^2 sn.u\, sn.v\, cn.u\, cn.v}{1 - k^2 sn^2.u\, sn.^2 v}, \text{ ec.},$$

nel caso particolare di $k = o$ la funzione *delta* si riduce all' unità, le altre due coincidono con le circolari *seno* e *coseno*, e le relazioni precedenti con quelle di addizione e sottrazione delle medesime funzioni goniometriche.

14. — Parimente la relazione (10) per le sostituzioni $a = o, b = 1, m = 1$, $-p = 1 + k^2$, $q = k^2$, $x = sen\, \varphi$, $z = sen\, \varphi'$, $u = sen\, \mu$, conduce alla formula di addizione degli integrali ellittici di seconda specie.

(X) $G(k, \varphi) + G(k, \varphi') - G(k, \mu) = k^2 sen\, \mu\, sen\, \varphi\, sen\, \varphi'$. Se invece nella stessa (10) si fanno le sostituzioni precedenti eccetto che alle lettere a, b si attribuiscono i valori 1 e k^2 si troverà.

(XI) $E(k, \varphi) + E(k, \varphi') - E(k, \mu) = k^2 sen\, \mu\, sen\, \varphi\, sen\, \varphi'$, denominata nell' analisi la *relazione di Fagnani*, poichè facendovi $\mu = \frac{\pi}{2}$ e moltiplicando i due membri per a resulta il bel teorema sugli archi ellittici a differenza rettificabile espresso dall'equazione $aE\left(\frac{c}{a}, \varphi\right) + aE\left(\frac{c}{a}, \varphi'\right) - - aE\left(\frac{c}{a}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{c^2}{a} sen\, \varphi\, sen\, \varphi'$: in cui le ampiezze φ e φ' sono collegate dalla (VI), che in questo caso riducesi a $tang\, \varphi . tang\, \varphi' = \frac{a}{b}$. L'equazione (XI) si nota pure con

$$E am.u + E am.v - E am(u+v) = k^2 sen\, am.u\, sen\, am.v\, sen\, am\,(u+v).$$

Infine facendo nell'equazione (11) $a = 1$, $b = n$, $m = 1$, $-p = 1 + k^2$, $q = k^2$, $x = sen\, \varphi$, $z = sen\, \varphi'$, $u = sen\, \mu$ l'integrale $\Pi(x)$ coincide con quello ellittico di terza specie e si otterrà $A = 1 + n\, sen^2 \mu$, $B = n \cos \mu . \Delta \mu$, $C = n(n + k^2 sen^2 \mu)$ e la stessa (11) prende la forma:

(XII) $$\Pi(n, k, \varphi') + \Pi(n, k, \varphi) - \Pi(n, k, \mu) =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\, arc\, tang \frac{\sqrt{n(n+1)(n+k^2)}\, sen\, \varphi\, sen\, \varphi'\, sen\, \mu}{1 + n\, sen^2 \mu - n\, sen\, \varphi\, sen\, \varphi' \cos \mu\, \Delta \mu} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\, arc\, tang \frac{\sqrt{n(n+1)(n+k^2)}\, sen\, \varphi\, sen\, \varphi'\, sen\, \mu}{1 + n - n \cos \varphi \cos \varphi' \cos \mu}.$$

L'espressione S contenuta nel secondo membro della precedente eguaglianza diviene una quantità logaritmica se il parametro n è negativo

ed ha un valor numerico minore di k^2; infatti posto $n = -k^2 sen^2 \alpha$ risulta $S = i \frac{tang\,\alpha}{\Delta\,\alpha} arc\,tang\,iz$, significando i l'immaginario $\sqrt{-1}$ e

$$z = \frac{k^2 sen\,\alpha \cos\alpha\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\, sen\,\mu}{1 - k^2 sen^2\alpha\, sen^2\mu + k^2 sen^2\alpha\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi' \cos\mu\,\Delta\,\mu}.$$

A motivo della nota relazione $i\,arc\,tang\,(-iz) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$, si ottiene la trasformata:

$$S = \frac{tang\,\alpha}{\Delta\,\alpha} \log \frac{1 - k^2 sen\,\alpha\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi' \frac{(sen\,\mu \cos\alpha\,\Delta\,\alpha - sen\,\alpha \cos\mu\,\Delta\,\mu)}{1 - k^2 sen^2\mu\, sen^2\alpha}}{1 + k^2 sen\,\alpha\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi' \frac{(sen\,\mu \cos\alpha\,\Delta\,\alpha + sen\,\alpha \cos\mu\,\Delta\,\mu)}{1 - k^2 sen^2\mu\, sen^2\alpha}},$$

ovvero per le notazioni $\varphi = am\,u$, $\varphi' = am\,v$, $\mu = am\,(u+v)$, $\alpha = am\,.\,a$ si troverà $S = \frac{tang\,\alpha}{\Delta\,\alpha} \log \frac{1 - k^2 sn\,a\,.\,sn\,u\,.\,sn\,v\,.\,sn\,(u+v-a)}{1 + k^2 sn\,a\,.\,sn\,u\,.\,sn\,v\,.\,sn\,(u+v+a)}$.

Allorchè si abbia $\alpha = \frac{\pi}{2}$ od $n = -k^2$, la quantità $\sqrt{AC - B^2}$ è immaginaria, essendo $A = (1-k^2)\,sen^2\mu$, $B = -k^2 \cos\mu\,\Delta\,\mu$, $C = k^4 \cos^2\mu$, e l'integrale $\int_o^t \frac{k^2 sen\,\mu\,dt}{(\Delta\,\mu + k^2 \cos\mu\,.\,t)^2}$ ha per valore $-\frac{k^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'}{\Delta\,\mu\,(\Delta\,\mu + k^2 \cos\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi)}$, e quindi, a motivo di una formula della pag. 37, la relazione:

$$\text{(XIII)}\quad \Pi(-k^2, k, \varphi) + \Pi(-k^2, k, \varphi') - \Pi(-k^2, k, \mu) = -\frac{k^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'}{\Delta\,\mu\,.\,\Delta\,\varphi\,.\,\Delta\,\varphi'}.$$

15. — *Osservazioni.* — Caso di $k = o$. L'equazione differenziale (1) per $X = 1 + x^2$, $Z = 1 + z^2$ ha l'integrale algebrico della forma $u = z\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+z^2}$. A motivo dell'identità $\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, posto $x = i\,sen\,\varphi$ con $i = \sqrt{-1}$, si deduce $i\varphi = \log(i\,sen\,\varphi + \cos\varphi)$; da cui $\cos\varphi + i\,sen\,\varphi = e^{i\varphi}$ e mutando il segno ad i si ottiene $\cos\varphi - i\,sen\,\varphi = e^{-i\varphi}$; aggiungendo e sottraendo le due precedenti risultano le formule di Euler $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $sen\,\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$, le quali servono a definire analiticamente le funzioni goniometriche anche nel caso più generale che l'angolo φ sia una variabile complessa $\alpha + i\beta$, sendo α e β angoli reali. Mutando φ in $m\varphi$ si ottiene $\cos m\varphi + i\,sen\,m\varphi = (e^{i\varphi})^m = (\cos\varphi + i\,sen\,\varphi)^m$ che è il noto *teorema di Moivre.* L'integrale $\varphi + \varphi' = \mu$ dell'equazione $d\varphi + d\varphi' = o$ è sotto forma algebrica espresso da $\cos\mu = sen\,\varphi \cos\varphi' +$

$+ sen\,\varphi' \cos\varphi$; si faccia la sostituzione $sen\,\varphi = i\,sen\,\theta$ e la (1) prenderà la forma $\frac{\cos\theta\,.\,d\theta}{\sqrt{1+sen^2\theta}} + \frac{\cos\theta'\,.\,d\theta'}{\sqrt{1+sen^2\theta'}} = o$; detti u e v gl'integrali dei due termini si avrà in virtù dell'identità surriferita la relazione:

$$u = \int_o^\theta \frac{\cos\theta\,.\,d\theta}{\sqrt{1+sen^2\theta}} = log\,(sen\,\theta + \sqrt{1+sen^2\theta}), \text{ ovvero } sen\,\theta + \sqrt{1+sen^2\theta} = e^u,$$

dalla quale ricavansi $sen\,\theta = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \sum_o^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\sqrt{1+sen^2\theta} = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \sum_o^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; queste funzioni reali dell'angolo immaginario θ, si definiscono il *seno* e *coseno iperbolici* di u e si notano con i simboli $sen\,hu$, $\cos hu$. È facile conchiuderne le relazioni $\cos^2 hu - sen^2 hu = 1$, $sen\,\varphi = i\,sen\,\theta = i\,sen\,hu$, $\cos\varphi = \sqrt{1+sen^2\theta} = \cos hu$; come pure $\cos hu + sen\,hu = e^u$ ed in questa cambiando u in mu trovasi il teorema di Moivre $\cos h\,mu + sen\,h\,mu = (\cos hu + sen\,hu)^m$ analogo a quello delle funzioni circolari; inoltre osservando che $\mu = \varphi + \varphi'$ si vedrà che le relazioni (III), (IV) riduconsi alle seguenti $sen\,h\,(u \pm v) = sen\,hu \cos hv \pm sen\,hv \cos hu$, $\cos h\,(u \pm v) = \cos hu \cos hv \pm sen\,hu\, sen\,hv$; le quali sono le formule di addizione delle funzioni iperboliche. In generale mutando nelle relazioni goniometriche le quantità u, $sen\,u$, $\cos u$, $tang\,u$, respettivamente nelle quantità $i\,u$, $i\,sen\,hu$, $\cos hu$, $i\,tang\,hu$ si avranno quelle relative alle funzioni iperboliche e viceversa cambiando nelle formule di quest'ultime le quantità u, $sen\,hu$, $\cos hu$, $tang\,hu$ respettivamente in $i\,u$, $i\,sen\,u$, $\cos u$, $i\,tang\,u$ si otterranno le relazioni goniometriche. Il geometra Abraham de Moivre nato a Vitry nel 1667, morto a Londra il 27 novembre 1754, trovò il suo celebre teorema risolvendo un quesito sull'iperbole equilatera e lo divulgò nella sua opera *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis:* Londini, anno 1730. Fra gl'italiani si distinsero i matematici Fagnani, Vincenzo Riccati, Saladini, Ferroni, ec., che nel passato secolo svolsero ed ampliarono la dottrina delle funzioni iperboliche. (*) La variabile u si rappresenta graficamente col doppio del settore $\sigma = OAM$ dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$, compreso fra il semiasse trasverso OA, la curva AM ed il raggio vettore $OM = \rho$; infatti essendo $\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$ l'elemento dell'area e $\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\omega}$ l'equazione polare, resulta $2\sigma = \frac{1}{2}\int_o^\omega \frac{d\,(2\omega)}{\cos 2\omega} = \frac{1}{2} log\ tang\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) = \frac{1}{2} log\left(\frac{1+tang\,\omega}{1-tang\,\omega}\right) = \frac{1}{2} log\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{1}{2} log\,(x+y)^2 = log\,(x+y)$: da

(*) Si consultino le recenti opere: LAISANT, *Essai sur les fonctions hyperboliques.* Paris, 1874. — SIEGM. GÜNTHER, *Die Lehre von den gewohnlichen und verallgemeinerten Hiperbel funktionen.* Halle, 1881.

cui $x+y=e^{2\sigma}$, $x-y=\frac{1}{x+y}=e^{-2\sigma}$, e per conseguenza $x=\frac{e^{2\sigma}+e^{-2\sigma}}{2}$ $y=\frac{e^{2\sigma}-e^{-2\sigma}}{2}$: onde fatto $2\sigma=u$ le coordinate di M saranno espresse da $x=\cos hu$, $y=\operatorname{sen} hu$. Condotta la tangente in M sino ad intersecare gli assi trasverso ed immaginario nei punti S ed S' sarà $OS=\frac{1}{x}=\sec hu$, $OS'=\frac{1}{y}=\operatorname{cosec} hu$. Le tangenti AT, BT menate ai vertici reali A e B delle due iperboli coniugate sino ad intersecare il raggio vettore OM rappresentano le rispettive funzioni $\operatorname{tang} hu=\frac{MP}{OP}=\frac{\operatorname{sen} hu}{\cos hu}$, $\cot hu=\frac{1}{\operatorname{tang} hu}$.

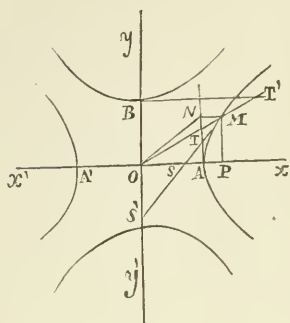



Fig. 9ª.

Congiungendo poi il centro O con la proiezione ortogonale N del punto M sulla tangente AT, si avrà l'angolo $\tau=NOA$ che dicesi *longitudine iperbolica* e determinato dalla relazione $\operatorname{tang}\tau=\frac{AN}{OA}=y=\operatorname{sen} hu$ e quindi $\cos hu=\sec\tau$, $\operatorname{tang} hu=\operatorname{sen}\tau$.

Le funzioni iperboliche $\operatorname{sen} hu$ e $\cos hu$ e le loro reciproche $\sec hu$, $\operatorname{cosec} hu$ hanno il periodo immaginario $2\pi i$, mentre le funzioni $\operatorname{tang} hu$, $\cot hu$ ammettono il periodo immaginario πi; le quali proprietà sono conseguenze dell'equazione simbolica $e^{2\pi i}=1$.

Anche il caso particolare di $k=1$ merita di esser considerato; l'equazione differenziale (1) riducesi alla forma $\frac{d\varphi}{\cos\varphi}+\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=o$, l'integrale del primo termine è $u=F(1,\varphi)=\int_o^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$, da cui $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=e^u$, ovvero $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=\frac{e^u-1}{e^u+1}$. Mediante le formule goniometriche $\operatorname{sen}\varphi=\frac{2\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}$, $\cos\varphi=\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}$ si deducono le relazioni $\operatorname{sen}\varphi=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}=\operatorname{tang} hu$, $\cos\varphi=\frac{2}{e^u+e^{-u}}=\frac{1}{\cos hu}=\sec hu$, dalle quali $\operatorname{tang}\varphi=\operatorname{sen} hu$, ec. Fu il celebre matematico Gudermann (*) che

(*) Si vedano il tomo II, pag. 285 degli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, compilati dal prof. Barnaba Tortolini. Roma, 1851, e le pag. 54-55 del *Trattato elementare delle funzioni ellittiche*, di Arturo Cayley, tradotto ed accresciuto con note dall'illustre prof. Francesco Brioschi. Milano, 1880; si citerà sovente quest'opera classica.

sviluppò la teorica della variabile u e delle quantità inverse, denominate dall'inglese James Booth *funzioni paraboliche,* esprimendosi l'arco di parabola contato dal vertice con l'integrale $s = \frac{p}{2}\left(\frac{sen\,\varphi}{cos^2\varphi} + \int_0^\varphi \frac{d\,\varphi}{cos\,\varphi}\right)$, sendo φ l'inclinazione della normale in M sull'asse delle ascisse (pag. 33). L'angolo φ dicesi ampiezza gudermanniana dell'integrale u e si scrive gu; le relazioni fondamentali (III) e (IV) si riducono per $k = 1$ alle seguenti: $sen\,\mu = \frac{sen\,\varphi\,cos^2\varphi' + sen\,\varphi'\,cos^2\varphi}{1 - sen^2\varphi\,sen^2\varphi'} = \frac{sen\,\varphi + sen\,\varphi'}{1 + sen\,\varphi\,sen\,\varphi'}$,

$cos\,\mu = \frac{cos\,\varphi\,cos\,\varphi' - sen\,\varphi\,sen\,\varphi'\,cos\,\varphi\,cos\,\varphi'}{1 - sen^2\varphi\,sen^2\varphi'} = \frac{cos\,\varphi\,cos\,\varphi'}{1 + sen\,\varphi\,sen\,\varphi'}$, ovvero secondo la nuova notazione $sg\,(u+v) = \frac{sg\,u + sg\,v}{1 + sg\,u\,sg\,v}$, $cg\,(u+v) = \frac{cg\,u\,cg\,v}{1 + sg\,u\,sg\,v}$, $tg\,(u \pm v) = tg\,u\,sec\,gv \pm tg\,v\,sec\,gu$; e posto $sg\,u_n = x_n$, e $cg\,u_n = y_n = \sqrt{1 - x_n^2}$ si trovano per tre variabili le formule $sg\,(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{sg\,(u_1 + u_2) + sg\,u_3}{1 + sg\,(u_1 + u_2)\,sg\,u_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3}{1 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}$, $cg\,(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{y_1 y_2 y_3}{1 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}$, in generale indicando con s_n la somma dei prodotti delle variabili $x_1, x_2, \ldots\, x_n$ combinate m ad m si hanno le relazioni $sg\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = \frac{s_1 + s_3 + s_5 + \ldots + s_{2h-1} + \ldots}{1 + s_2 + s_4 + \ldots + s_{2h} + \ldots}$

$$cg\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = \frac{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)\ldots(1 - x_n^2)}}{1 + s_2 + s_4 + \ldots + s_{2h} + \ldots};$$

le quali nel caso delle ampiezze eguali si riducono a:

$$sg\,nu = \frac{(1 + sg\,u)^n - (1 - sg\,u)^n}{(1 + sg\,u)^n + (1 - sg\,u)^n}, \quad cg\,nu = \frac{2\,(1 - sg^2\,u)^{\frac{n}{2}}}{(1 + sg\,u)^n + (1 - sg\,u)^n}, \text{ ec.}$$

16. — Nei volumi VII e XII dei *Nova Commentaria di Pietroburgo,* Euler applicò le formule di addizione degl'integrali ellittici alla soluzione di vari problemi sugli archi delle coniche a differenza rettificabile.

1° *In una data ellisse, determinare due punti M, M' tali che l'arco MM' risulti la metà del quadrante ellittico BA.* Dicasi φ_0 il parametro angolare del punto V estremo comune degli archi BV, VA aventi la differenza rettificabile; per le relazioni (1) $2\,\widehat{BV} - \widehat{BA} = 2\,a\,E\,(\varphi_0) - a\,E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{c^2}{a}\,sen^2\,\varphi_0$, $cos^2\,\varphi_0 - sen^2\,\varphi_0\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}sen^2\frac{\pi}{2}} = cos\,\frac{\pi}{2}$ si deduce:

$$(2) \qquad tang\,\varphi_0 = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ e quindi } 2\,\widehat{BV} - \widehat{BA} = \frac{c^2}{a}\left(\frac{a}{a+b}\right) = a - b.$$

Per il qual valore l'eguaglianza $\widehat{BM'} - \widehat{BM} = \frac{1}{2}\widehat{BA}$ che deriva dall'ipotesi del problema, diviene $\widehat{BM'} - \widehat{BM} = \widehat{BV} - \left(\frac{a-b}{2}\right)$; onde rappresentando con φ e φ' i parametri angolari dei punti M, M' si avrà pure $E(\varphi) + E(\varphi_0) - E(\varphi') = \frac{a-b}{2a}$, ovvero trasformando il primo membro per la relazione di Fagnani si troverà $\frac{c^2}{a^2} sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\, sen\,\varphi_0 = \frac{a-b}{2a}$; e poichè dalla (2) risulta $sen\,\varphi_0 = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$, si conchiude (3) $sen\,\varphi\, sen\,\varphi' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{a+b}}$; per conseguenza dall'equazione:

$$cos\,\varphi\, cos\,\varphi' + sen\,\varphi\, sen\,\varphi' \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} sen\,\varphi_0} = cos\,\varphi_0 \text{ si ottiene:}$$

(4) $cos\,\varphi\, cos\,\varphi' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$. Eliminando φ' fra l'equazione (3) e (4) si avrà $4(a+b) = \frac{a}{sen^2\varphi} + \frac{b}{cos^2\varphi}$ da cui $sen^2\varphi = \frac{5a+3b+\sqrt{9a^2+9b^2+14ab}}{8(a+b)}$, $\frac{1}{sen^2\varphi} = \frac{5a+3b-\sqrt{9a^2+9b^2+14ab}}{2a}$, ec.... Tirando la tangente al punto M sino a segare in A_1 e B_1 i prolungamenti dei semiassi OA, OB si ottiene:

$$MA_1^2 = \frac{cos^2\varphi}{sen^2\varphi}(a^2 cos^2\varphi + b^2 sen^2\varphi) = b^2 - 2a^2 + (a^2 - b^2) sen^2\varphi + \frac{a^2}{sen^2\varphi},$$

$$BM_1^2 = \frac{sen^2\varphi}{cos^2\varphi}(a^2 cos^2\varphi + b^2 sen^2\varphi) = a^2 - 2b^2 + (a^2 - b^2) cos^2\varphi + \frac{b^2}{cos^2\varphi},$$

e sostituendo i valori di $sen^2\varphi$, $cos^2\varphi$ in funzione di a e b si giunge facilmente all'espressioni:

$$MA_1 = \frac{\sqrt{9a^2+9b^2+14ab} - 3a - b}{4},\ B_1M = \frac{a+3b+\sqrt{9a^2+9b^2+14ab}}{4}:$$

dalle quali risulta il teorema $B_1M - MA_1 = a + b$, e parimente condotta la tangente nel punto M' sino a segare gli assi nei punti A_2, B_2 si avrà eziandio $B_2M' - M'A_2 = a + b$. (*)

2° *Dato in posizione un diamétro DD' dell' ellisse, dividere con un punto M la semiperiferia DMD' in due archi aventi la differenza rettificabile.* Indicando con φ e φ' i respettivi parametri angolari dei due punti D ed M, dall' equazione $\widehat{DM} + \widehat{MD'} = 2\widehat{BA}$ si ricava $\widehat{DM} - \widehat{MD'} =$

(*) *Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Eruditorum Lipsiensibus propositorum,* pag. 155 del tomo VII dei *Novi Commentarii.* (Petropoli, 1761). Vi si trova pure l'analisi del problema « dividere la periferia dell'ellisse in tre archi eguali. »

$= 2\widehat{DM} - 2\widehat{BA} = 2\widehat{DB} + 2\widehat{BM} - 2\widehat{BA} = 2aE(\varphi) + 2aE(\varphi') -$
$- 2aE\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\frac{c^2}{a}\,sen\,\varphi\,sen\,\varphi'$, inoltre dalla relazione $cos\frac{\pi}{2} + sen\,\varphi\,sen\,\varphi' +$
$+\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}sen^2\frac{\pi}{2}} = cos\,\varphi\,cos\,\varphi'$, si deduce $tang\,\varphi\,tang\,\varphi' = \frac{a}{b}$. Si costruisce il punto M, prendendo sopra EO semidiametro coniugato di OD il segmento $OC = a$, e la perpendicolare abbassata dal punto C sull' asse maggiore sega la curva nel punto cercato M. Posto $OE = a_1 =$
$= \sqrt{a^2 sen^2\varphi + b^2 cos^2\varphi}$, $OD = b_1 = \sqrt{a^2 cos^2\varphi + b^2 sen^2\varphi}$, le coordinate di M per la trovata relazione $tang\,\varphi' = \frac{a\,cos\,\varphi}{b\,sen\,\varphi}$ saranno $x = a\,sen\,\varphi' =$
$= \frac{a^2 cos\,\varphi}{b_1}$, $y = b\,cos\,\varphi' = \frac{b^2 sen\,\varphi}{b_1}$ e la differenza degli archi DM, MD' resulterà eguale a $\frac{2\,c^2 sen\,\varphi\,sen\,\varphi'}{a} = \frac{c^2}{b_1}sen\,2\varphi$: è facile verificare che questo valore coincide con la proiezione ortogonale $2a_1 cos\,\theta$ del diametro DD' sul coniugato EE'; sendo l'angolo $DOE = \theta$, $sen\,\theta = \frac{ab}{a_1 b_1}$, e
$cos\,\theta = \frac{(a^2 - b^2)\,sen\,\varphi\,cos\,\varphi}{a_1 b_1}$.

17. — Giuseppe Luigi La-Grange (nato in Torino il 25 gennaio dell'anno 1736 e morto a Parigi il 10 aprile del 1813), meditando sulle ricerche Euleriane relative all'integrazione dell'equazione differenziale (1) $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = o$, ne scoprì un metodo diretto e lo divulgò in una sua Memoria inserita nel 4° volume delle *Miscellanea Philosophica Mathematica* (primi annali della Torinese Accademia delle Scienze) col titolo: *Sur l'integration des quelques equations differentielles dont les indeterminées sont separées, mais dont chaque membre en particulier n'est point integrable,* e con la data di Berlino 20 settembre 1868. — L'immortale geometra vi espone prima il metodo d'integrazione per parti, e nell'eguaglianza (1) supponendo X, Y polinomi interi di secondo grado con eguali coefficienti, riduce la medesima equazione (2) $dx\sqrt{Y} + dy\sqrt{X} = o$, alla forma $\varphi(x)\sqrt{Y} + \varphi(y)\sqrt{X} + \int \psi(x,y)\left(\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}}\right) = C$, in cui $\varphi(x)$ e $\psi(x,y)$ esprimono funzioni intere delle variabili, e siccome la quantità contenuta in parentesi sotto il segno integrale è nulla a motivo della (1), ne conchiude la relazione algebrica $\varphi(x)\sqrt{Y} + \varphi(y)\sqrt{X} = C$. Si può seguire lo stesso metodo allorchè i polinomi X ed Y sono biquadratici, con potenze pari della variabile, cioè $X = 1 + ax^2 + bx^4$, $Y = 1 + ay^2 + by^4$

e si è divisa la (2) per il binomio $1 - bx^2y^2$ prima di eseguire l'integrazione per parti; è facile ottenere l'identità:

$$(3) \int \frac{dx\sqrt{Y}}{1-bx^2y^2} = \frac{x\sqrt{Y}}{1-bx^2y^2} - \int \varphi(x,y)\frac{dy}{\sqrt{Y}} - \int \psi(x,y)\,dx\,\sqrt{Y};$$

in cui le quantità $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ simboleggiano le respettive funzioni simmetriche razionali $\frac{a+2b(x^2+y^2)+ab\,x^2y^2}{(1-bx^2y^2)^2}xy$, $\frac{2b\,x^2y^2}{(1-bx^2y^2)^2}$.

Mutando nella (3) la variabile x in y e viceversa, risulta:

$$(4) \int \frac{dy\sqrt{X}}{1-bx^2y^2} = \frac{y\sqrt{X}}{1-bx^2y^2} - \int \varphi(x,y)\frac{dx}{\sqrt{X}} - \int \psi(x,y)\,dy\sqrt{X}.$$

Aggiungendo le relazioni (3) e (4) in virtù della (1) si deduce: $\frac{x\sqrt{Y}+y\sqrt{X}}{1-bx^2y^2} = C$, identico all'integrale dato da Euler.

Il nuovo metodo di Lagrange consiste nel differenziare l'equazione proposta $f_1 = o$, che per ipotesi racchiude gl'infinitesimi di primo ordine delle variabili, e combinare poi l'equazione risultante $f_2 = o$, con la data mediante opportune integrazioni ec., in modo da eliminare i differenziali di second'ordine; se è possibile di ottenere così un'altra equazione $F_1 = o$ fra gli stessi differenziali di primo ordine e distinta dalla proposta, basterà eliminare questi differenziali fra le due equazioni $f_1 = o$, $F_1 = o$, e si avrà l'integrale cercato. Altrimenti non essendo possibile giungere all'equazione $F_1 = o$, si differenzierà la $f_2 = o$, e si combinerà la nuova $f_3 = o$, in cui vi sono pure differenziali di terzo ordine con le precedenti $f_1 = o$, $f_2 = o$, procurando di ricavare un'equazione $F_2 = o$, che contenga differenziali di second'ordine e sia distinta dall'equazione $f_2 = o$; con l'eliminazione dei differenziali di second'ordine fra le due $f_2 = o$, $F_2 = o$, risulterà un'eguaglianza $\varphi_1 = o$, e quindi eliminando fra quest'ultima e la proposta i differenziali di primo ordine si troverà l'integrale richiesto ec. — Lagrange applicò il suo metodo all'equazione (1) in cui si hanno i polinomi interi:

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,\quad Y = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4;$$

indicando con t la variabile indipendente pongasi (I) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{X}$, e dalla (1) risulterà (II) $\frac{dy}{dt} = -\sqrt{Y}$: quadrando queste due ultime equazioni e poi differenziandole si ottengono le seguenti:

$$\text{(III)}\ \frac{2d^2x}{dt^2} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3,\quad \frac{2d^2y}{dt^2} = b + 2cy + 3dy^2 + 4ey^3;$$

inoltre dalle (I e II) facilmente si deducono le relazioni:

$$\text{(IV)}\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \sqrt{X} - \sqrt{Y},\quad \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}.$$

Aggiungendo le (III) membro a membro e moltiplicando le (IV) si trovano l'equazioni (V) $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=b+c(x+y)+\frac{3}{2}d(x^2+y^2)+2e(x^3+y^3)$
(VI) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=X-Y=b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+e(x^4-y^4)$.

Si assumano per variabili ausiliarie la somma u e la differenza v delle quantità x, y e le precedenti relazioni diverranno:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=b+cu+\frac{3}{4}d(u^2+v^2)+\frac{e}{2}u(u^2+3v^2)$$

$$\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}=bv+cuv+\frac{1}{4}dv(3u^2+v^2)+\frac{1}{2}euv(u^2+v^2),$$

dalle quali risulta $2v\frac{d^2u}{dt^2}-2\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}=d.v^3+2euv^3$, equazione differenziale di second'ordine che si può integrare dopo aver moltiplicato i due membri per il fattore $\frac{1}{v^3}\left(\frac{du}{dt}\right)dt$; infatti rappresentando con C la costante d'integrazione si ottiene $\frac{1}{v^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2=C+du+eu^2$. Si elimini la derivata di primo ordine $\frac{du}{dt}$ fra l'eguaglianza precedente e la prima delle (IV) e sostituiti i valori delle ausiliarie u, v si giungerà all'integrale di Lagrange (VII) $\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2=C+d(x+y)+e(x+y)^2$. Cambiando in questa relazione il segno alle quantità $\sqrt{Y}$ si avrà l'integrale corrispondente all'equazione $\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{dy}{\sqrt{Y}}=o$. Volendo ridurre a forma razionale l'eguaglianza (VII) si faccia per brevità $X-Y=(x-y)P$, $P=b+c(x+y)+$ $+d(x^2+xy+y^2)+e(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$ e $Q=C+d(x+y)+e(x+y)^2$; poichè la (VII) è identica alla relazione $(\sqrt{X}-\sqrt{Y})^2=Q(x-y)^2$, ne consegue $(\sqrt{X}+\sqrt{Y})^2=\frac{P^2}{Q}$; aggiungendo le due ultime eguaglianze membro a membro si trova $2Q(X+Y)=P^2+Q^2(x-y)^2$, la quale a motivo di $X=Y+(x-y).P$ diviene $[P-Q(x-y)^2]^2=4QY$; ovvero sostituendo i valori dei polinomi P e Q risulta:

$$[b+c(x+y)+C(y-x)+dy(x+2y)+2ey^2(x+y)]^2=$$
$$=4[C+d(x+y)+e(x+y)^2](a+by+cy^2+dy^3+ey^4)$$

e sviluppando quest'ultima si giunge alla forma divinata da Euler:

$$(b^2-4aC)+2(bc-bC-2ad)(x+y)+(c^2+C^2-2cC-4ae)(x^2+y^2)+$$
$$+2(c^2-C^2-bd-4ae)xy+2(cd-Cd-2eb)xy(x+y)+(d^2-4eC)x^2y^2=o,$$

relazione simmetrica rispetto alle due variabili, e che ordinata secondo le potenze crescenti di y diviene:

$$(\alpha+2\beta x+\gamma x^2)+2y(\beta+2\delta x+\varkappa x^2)+y^2(\gamma+2\varkappa x+\lambda x^2)=o,$$

cioè l' *integrale è un polinomio della quarta dimensione, di secondo grado rispetto a ciascuna variabile, ed i suoi coefficienti* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$, *sono espressioni razionali ed intere di primo o secondo grado rispetto alla costante arbitraria C ed a ciascun coefficiente dei polinomi X, Y.*

Per il metodo di Lagrange si trova immediatamente l' integrale dell' equazione (1) $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = o$; infatti significando con θ la variabile indipendente e posto (2) $\frac{d\varphi}{d\theta} = \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 sen^2 \varphi}$, si deduce dalla (1) la relazione (3) $\frac{d\varphi'}{d\theta} = -\Delta\varphi' = -\sqrt{1 - k^2 sen^2 \varphi'}$: innalzando a quadrato queste due ultime uguaglianze e poi differenziandole si ottengono le seguenti: $\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = -\frac{k^2 sen^2 \varphi}{2}$, $\frac{d^2\varphi'}{d\theta^2} = -\frac{k^2 sen^2 \varphi'}{2}$; le quali aggiunte membro a membro conducono alla relazione:

$$(4)\ \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \frac{d^2\varphi'}{d\theta^2} = -\frac{k^2}{2}(sen\,2\varphi + sen\,2\varphi') = -k^2 sen(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi').$$

E siccome dalle (2), (3) si ricava (5) $\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi'}{d\theta}\right)^2 = k^2(sen^2\varphi' - sen^2\varphi) = -\frac{k^2}{2} sen(\varphi + \varphi') sen(\varphi - \varphi')$, si conchiuderà dalle (4), (5) l' equazione $\dfrac{\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \frac{d^2\varphi'}{d\theta^2}}{\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi'}{d\theta}} = \dfrac{\cos(\varphi - \varphi')\left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\varphi'}{d\theta}\right)}{sen(\varphi - \varphi')}$; è facile vedere che i due membri di quest' eguaglianza hanno la forma $\frac{du}{u}$, e però integrando risulta $\log\left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi'}{d\theta}\right) = \log sen(\varphi - \varphi') + \log C$, ovvero $\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi'}{d\theta} = C\,sen(\varphi - \varphi')$, ed eliminando con le (2), (3) le prime derivate si avrà (6) $\Delta\varphi - \Delta\varphi' = C\,sen(\varphi - \varphi')$: per determinare la costante C si noti con μ il valore di φ' corrispondente a $\varphi = o$, si dedurrà $C = \frac{\Delta\mu - 1}{sen\,\mu}$; onde l' integrale della (1) si riduce alla forma (7) $\Delta\varphi - \Delta\varphi' = \frac{\Delta\mu - 1}{sen\,\mu} sen(\varphi - \varphi')$. Se invece si fosse stabilito il rapporto $\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\varphi'}{d\theta^2}\right) : \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\varphi'}{d\theta}\right)$, si sarebbe trovata la relazione (8) $\Delta\varphi + \Delta\varphi' = \frac{1 + \Delta\mu}{sen\,\mu} sen(\varphi + \varphi')$: eliminando fra l' equazioni (7) (8), la quantità $\Delta\mu$ si otterrà la nota relazione che dà il valore di $sen\,\mu$. Col mutare il segno all' angolo φ' si avrà l' integrale dell' equazione $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = o$. Simile soluzione fu data dal professor Darboux nel tomo IV degli *Annales Scientifiques de l'École normale superieure*. Paris 1867.

L' equazioni integrali (7), (8) hanno un significato geometrico nella ellisse; poichè se a, b, sono i semi-assi, O il centro, e siano φ, φ' i parametri angolari di due punti M, M' della curva si hanno l'espressioni dei raggi centrali $OM = a\sqrt{1-k^2 sen^2 \varphi}$, $OM' = a\sqrt{1-k^2 sen^2 \varphi'}$, avendo fatto $\frac{a^2-b^2}{a^2} = k^2$, e l'area del triangolo rettilineo OMM' è eguale a $\frac{1}{2} ab\, sen(\varphi - \varphi')$; onde la relazione $\Delta\varphi \pm \Delta\varphi' = C\, sen(\varphi - \varphi')$, si traduce nella geometrica $\frac{OM \pm OM'}{triang.\, OMM'} = cost$, ovvero condotte dai punti M, M' le normali MH, $M'H'$ ai lati opposti OM', OM si avrà $\frac{1}{M'H'} \pm \frac{1}{MH} = cost$: dunque *l'equazione differenziale* $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = o$, *è integrata dalle coppie dei punti* M, M' *di un' ellisse tali che i valori inversi delle normali condotte da ciascuno di essi sul diametro passante per l' altro abbiano una somma* o *differenza costante.*

Lagrange col moltiplicare membro a membro le due equazioni $\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi'}{d\theta} = C sen(\varphi - \varphi')$, $C' sen(\varphi + \varphi') = \frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\varphi'}{d\theta}$, ed integrando poi la relazione che ne risulta ottenne la seguente: $C \cos(\varphi + \varphi') = C \cos(\varphi - \varphi') + C''$; la quale per $\varphi = o$, $\varphi' = \mu$ determina $C'' = (C' - C)\cos\mu$; onde per i noti valori $C = \frac{\Delta\mu - 1}{sen\,\mu}$, $C' = \frac{\Delta\mu + 1}{sen\,\mu}$, deducesi la già trovata formula (9) $\cos\mu = \cos\varphi\cos\varphi' - sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\,\Delta\mu$, ovvero (10) $\cos(\varphi + \varphi') - \cos\mu = (\Delta\mu - 1)\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$—. È facile dimostrare con le precedenti equazioni le formule di addizione degl' integrali ellittici di seconda e terza specie; così facendo $v = E\varphi + E\varphi'$ (*) si ricava $d\varphi = d\varphi\Delta\varphi + d\varphi'\Delta\varphi'$, e questa aggiunta membro a membro con la (1) equivalente all' eguaglianza $o = d\varphi\Delta\varphi' + d\varphi'\Delta\varphi$, diviene $dv = (d\varphi + d\varphi')(\Delta\varphi + \Delta\varphi')$, onde applicando la relazione (8) si conchiude integrando $v = \left(\frac{1+\Delta\mu}{sen\,\mu}\right)\cos(\varphi + \varphi') + C_0$.

Per determinare questa C_0 si farà $\varphi = o$, $\varphi' = \mu$, e si troverà $E\mu = \left(\frac{1+\Delta\mu}{sen\,\mu}\right)\cos\mu + C_0$; per lo che in virtù della (10) ne consegue la relazione di Fagnani (11) $E\varphi + E\varphi' - E\mu = \frac{1+\Delta\mu}{sen\,\mu}[\cos(\varphi + \varphi') - \cos\mu] = \frac{(\Delta\mu)^2 - 1}{sen\,\mu} sen\,\varphi\, sen\,\varphi' = -k^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$.

(*) Rimanendo costante il modulo k ed il parametro n si farà uso delle semplici notazioni $F\varphi$, $E\varphi$, $\Pi\varphi$, $G\varphi$, per indicare gl' integrali ellittici.

Inoltre a motivo dell'identità $sen^2\varphi = \frac{1-(\Delta\varphi)^2}{k^2}$ si ricava:

(12) $G\varphi = \int_o^\varphi \frac{sen^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{k^2}\int_o^\varphi d\varphi\,\Delta\varphi = \frac{F\varphi - E\varphi}{k^2}$, e similmente $G\varphi' = \frac{F\varphi' - E\varphi'}{k^2}$, $G\mu = \frac{F\mu - E\mu}{k^2}$; dalle quali ne consegue $G\varphi + G\varphi' - G\mu = -\frac{1}{k^2}[E\varphi + E\varphi' - E\mu] = - sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$. Per l'addizione degl'integrali $\Pi\varphi = \int_o^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\,sen^2\varphi)\Delta\varphi}$, $\Pi\varphi' = \int_o^\varphi \frac{d\varphi'}{(1+n\,sen^2\varphi')\,\Delta\varphi'}$, si faccia per brevità $w = \Pi\varphi + \Pi\varphi'$, e quindi ne risulterà:

$$dw = \frac{n\,d\varphi}{\Delta\varphi}\,\frac{sen^2\varphi - sen^2\varphi'}{[1+n\,(sen^2\varphi + sen^2\varphi') + n^2 sen^2\varphi\, sen^2\varphi']},$$

avendo prima sostituito $\frac{-d\varphi}{\Delta\varphi}$, al rapporto eguale $\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}$. Differenziando la relazione di Fagnani nell'ipotesi di μ costante si ha $d\varphi\,\Delta\varphi + d\varphi'\,\Delta\varphi' = k^2 sen\,\mu\, d\,(sen\,\varphi\, sen\,\varphi')$, ed eliminando $\Delta\varphi'$ si ottiene:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}[(\Delta\varphi)^2 - (\Delta\varphi')^2] = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\,k^2\,(sen^2\varphi' - sen^2\varphi) = k^2 sen\,\mu\, d\,(sen\,\varphi\, sen\,\varphi'),$$

e però si deduce $d\,w = \frac{n\,sen\,\mu\, d\,(sen\,\varphi\, sen\,\varphi')}{1+n\,(sen^2\varphi + sen^2\varphi') + n^2 sen^2\varphi\, sen^2\varphi'}$. Anche la somma $sen^2\varphi + sen^2\varphi'$ si esprime in funzione del prodotto variabile $sen\,\varphi\, sen\,\varphi' = t$, e di quantità costanti; infatti innalzando a quadrato la formula di Lagrange $cos\,\mu + sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\,\Delta\mu = cos\,\varphi\, cos\,\varphi'$, resulta: $(cos\,\mu + t\,\Delta\mu)^2 = (1 - sen^2\varphi)(1 - sen^2\varphi') = 1 - sen^2\varphi - sen^2\varphi' + t^2$, da cui $sen^2\varphi + sen^2\varphi' = sen^2\mu - 2t\,cos\,\mu\,\Delta\mu + t^2 k^2 sen^2\mu$; onde il precedente differenziale si riduce a $d\,w = \frac{n\,sen\,\mu\, dt}{1+n\,sen^2\mu - 2nt\,cos\,\mu\,\Delta\mu + nt^2(n+k^2 sen^2\mu)}$, cioè della forma $\frac{n\,sen\,\mu\,.\,dt}{A - 2Bt + Ct^2}$. Integrando questa relazione fra i limiti o e t si trova $\Pi\varphi + \Pi\varphi' = n\,sen\,\mu\; arc\,tang\,\frac{t\sqrt{AC-B^2}}{A-Bt} + cost.$, il valore della costante è $\Pi\mu$, risultando dal porre $\varphi = o$, $\varphi' = \mu$ e perciò $t = o$; così deduconsi le stesse formule della pag. 39: se il parametro è negativo ed il valore assoluto minore di k^2, cioè $n = -k^2 sen^2\alpha$, la somma $\Pi\varphi + \Pi\varphi' - \Pi\mu$ è una funzione logaritmica, e nel caso di n positivo, oppure compreso fra -1 e $-k^2$, la somma precedente è la funzione circolare inversa *arco tangente* ec.

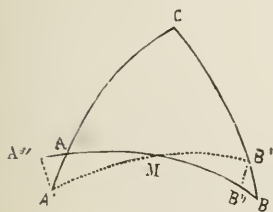
18. — Nel capitolo XI della sua *Théorie des Fonctions analytiques*, Lagrange osservò l'analogia esistente fra l'equazione da lui trovata $cos\,\mu = cos\,\varphi\, cos\,\varphi' + sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\,\Delta\mu$, e la formula fondamentale della Trigonometria sferica, ne dedusse una costruzione geometrica per trovare l'amplitudine della somma o differenza di più funzioni integrali

ellittici di prima specie e di ampiezze date, e così mediante una serie di triangoli sferici insegnò a costruire l'amplitudine di una funzione multipla di un dato integrale ellittico.

In un triangolo sferico avente a, b, c per lati ed A, B, C per angoli respettivamente opposti si hanno le ragioni eguali $\frac{sen\, A}{sen\, a} = \frac{sen\, B}{sen\, b} = \frac{sen\, C}{sen\, c} = k$; onde i coseni degli angoli si esprimono in funzione dei lati e del modulo k mediante le formule $cos\, A = \pm \sqrt{1 - k^2\, sen^2\, a} = \pm \Delta a, cos\, B = \pm \Delta b, cos\, C = \pm \Delta c$, prendendo ciascun radicale col segno positivo o negativo secondochè l'angolo corrispondente risulti acuto od ottuso. Siccome il modulo k si suppone minore di uno, dovrà aversi

Fig. 10ª.

(1) $sen\, C < sen\, c$, e però si distingueranno due casi, cioè l'angolo C sia minore o maggiore di un retto. Si abbia in primo luogo $C < \frac{\pi}{2}$, a motivo della (1) si deduce $C < c$; ora col centro sferico nel vertice C descrivasi il semicerchio massimo MNP, l'arco MN compreso fra i lati dell'angolo MCN misura la massima distanza di un punto di uno di questi lati dall'altro, se dunque descrivonsi gli archi di cerchio massimo BE, BD respettivamente normali al primo lato CB ed all'altro situato sull'arco CM, saranno BE e BD minori di c e quindi il secondo estremo A non potrà cadere fra i punti D ed E, dunque il triangolo ACB avrà ottuso l'angolo CAB, ovvero il terzo CBA. Se invece l'angolo C supera l'angolo retto, dalla diseguaglianza (1), si ricava $C > c > \pi - C$, onde l'arco NP che misura l'angolo C è la minima distanza di un punto di uno dei lati NC, CP dall'altro, e però descrivendo gli archi di circolo massimo BE', BD' respettivamente normali ai lati CN, CP, i due archi BE', BD' maggiori di NP supereranno il lato c; per conseguenza il secondo estremo di questo lato giacerà fra i punti C ed E', ovvero fra D' e C' ed il triangolo sferico avrà un solo angolo ottuso, ovvero tutti e tre ottusi.

Fig. 11ª.

Si faccia l'ipotesi che nel triangolo sferico ABC, l'angolo C sia ottuso e rimanga costante il suo valore e quello del lato opposto c, mentre gli altri due lati subiscano una variazione infinitesima; col centro sferico M punto d'intersezione dei due archi eguali AB, $A'B'$ e con i respettivi raggi sferici MB', MA' si descrivano gli archi $B'B''$, $A'A''$, i triangoli infini-

tesimi $A'AA''$, $B'BB''$ considerati come rettilinei e con gli angoli retti in A'' e B'' somministrano l'eguaglianze $A''A = AA' \cos A = db \cos A$, $B''B = BB' \cos B = -da \cos B$, e poichè per ipotesi $A''A = B''B$, si deduce l'equazione differenziale $da \cos B + db \cos A = o$, cioè $\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = o$, e si è veduto che i due angoli A, B sono entrambi acuti od ottusi; le ampiezze saranno collegate dalla relazione goniometrica $\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \, \Delta c$, che è precisamente l'integrale della surriferita equazione differenziale. — Lagrange tenne il metodo inverso, cioè partendo dalla relazione $\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$, e supposti costanti C e c, considerò a, b come funzioni di una variabile indipendente; e differenziando ottenne $da (\operatorname{sen} b \cos a \cos C - \operatorname{sen} a \cos b) + db (\operatorname{sen} a \cos b \,.\, \cos C - \operatorname{sen} b \cos a) = o$, in cui sostituito il valore di $\cos C$, dato per i tre lati si trova

$$da \left(\frac{\cos a \cos c - \cos b}{\operatorname{sen} a} \right) + db \left(\frac{\cos b \cos c - \cos a}{\operatorname{sen} b} \right) = o, \text{ ovvero:}$$

$(da \cos B + db \cos A) \operatorname{sen} c = o$, che per le relazioni $\cos B = \Delta b, \cos A = \Delta a$, soppresso il fattore $\operatorname{sen} c$ diverso da zero diviene $da \Delta b + db \Delta a = o$.

Date le quantità $\varphi = am \,.\, u$, $\varphi' = am \,.\, v$ ed il modulo k minore di uno, si costruisca il triangolo sferico avente per lati $BC = \varphi$, $CA = \varphi'$ ed inoltre l'angolo A opposto al lato minore φ sia acuto e determinato dalla relazione $\operatorname{sen} A = k \operatorname{sen} \varphi$, oppure $\cos A = \Delta \varphi$; è evidente che vi saranno in generale due triangoli ACB, ACB' aventi in comune l'angolo A, il lato $AC = \varphi'$, ed il secondo lato BC ovvero CB' eguali a φ; è chiaro che il terzo lato AB del primo triangolo ABC ovvero AB' del secondo $AB'C$ rappresenteranno le quantità $\psi = am (v - u)$, e $\mu = am (u + v)$. Costruendo successivamente gli altri triangoli sferici $AB'C'$, $AC'B''$, $AB''C''$...... con i lati opposti $B'C'$, $C'B''$, $B''C''$ di grandezza co-

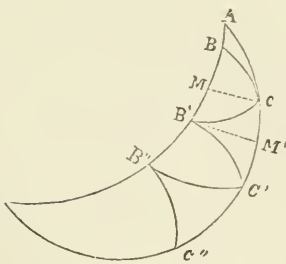



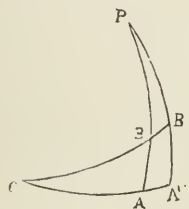
Fig. 12ª.

stante φ e posto $AB' = \mu = \varphi_1$, $\widehat{AC'} = \varphi_2$, $\widehat{AB''} = \varphi_3$........, si avrà successivamente $F\varphi_1 = F\varphi + F\varphi'$, $F\varphi_2 = F\varphi_1 + F\varphi$, $F\varphi_3 = F\varphi_2 + F\varphi, \ldots F\varphi_n = F\varphi_{n-1} + F\varphi$: menati poi dai vertici C, B', C', B gli archi CM, $B'M'$, $C'M''$.... normali ai lati opposti, a motivo delle eguaglianze $\widehat{AM} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AB'}}{2}$, $\widehat{AM'} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{AC'}}{2}$,..... dai triangoli rettangoli ACM, $AB'M'$ si deducono le relazioni (α) $\operatorname{tang} \left(\frac{\psi + \varphi_1}{2} \right) = \operatorname{tang} \varphi' \cos A = \operatorname{tang} \varphi' \Delta \varphi, \operatorname{tang} \left(\frac{\varphi' + \varphi_2}{2} \right) = \operatorname{tang} \varphi_1 \Delta \varphi, \ \operatorname{tang} \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} \right) = \operatorname{tang} \varphi_2 \Delta \varphi, \ldots\ldots$

$tang\left(\frac{\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}}{2}\right) = tang\, \varphi_n\, \Delta\, \varphi$. — Se il raggio della sfera passa all'infinito, i triangoli divengono rettilinei ed in luogo di $sen\, \varphi$, $sen\, \varphi'$, $sen\, \varphi_1 \ldots\ldots$ si avranno i segmenti φ, φ', φ_1 come pure $cos\, A = \sqrt{1-k^2\varphi^2}$, la trascendente $F\varphi$ diviene l'integrale

$$\frac{1}{k}\int_0^{\varphi}\frac{k\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\varphi^2}} = \frac{1}{k}\ arc\,sen\,k\,\varphi = \frac{1}{k}A = \frac{\varphi A}{sen A},$$

e le relazioni (α) si riducono alle seguenti $\psi + \varphi_1 = 2\,\varphi' cos\, A$, $\varphi' + \varphi_2 = = 2\,\varphi_1 cos\, A$, $\varphi_1 + \varphi_3 = 2\,\varphi_2 cos\, A \ldots$. di più nel caso particolare di $\psi = \varphi$ resulta $\varphi' = 2\,\varphi\, cos\, A$, $\varphi_1 = \varphi\,(4\,cos^2 A - 1)$, $\varphi_2 = 4\,\varphi\, cos\, A\,(2\,cos^2 A - 1) = = 4\,\varphi\, cos\, A\, cos\, 2\,A, \ldots\ldots$ e se $k = 1$, sarà $\varphi = sen\, A$, e quindi $\varphi' = sen\, 2\,A$, $\varphi_1 = sen\, 3\,A$, $\varphi_2 = sen\, 4\,A$, ec.

Fig. 13ª.

Il professor K. H. Schellbach ha dato una elegante rappresentazione geometrica della sostituzione di Landen, mediante le proprietà dei triangoli sferici (*); infatti l'angolo acuto C di un triangolo rettangolo descritto sulla sfera abbia i lati fissi in direzione, indicando con a l'ipotenusa BC, con b, c i respettivi cateti CA, AB, si avranno le note equazioni $sen\, c = sen\, a\, sen\, C$, (1) $cos\, c = \sqrt{1 - sen^2 C\, sen^2 a} = = \Delta\, a$, col modulo $h = sen\, C$, e parimente (2) $tang\, b = tang\, a\, cos\, C$; da quest'ultima posta sotto la forma $\frac{sen\, b\, cos\, a}{sen\, a\, cos\, b} = cos\, C$, si ricava: $\frac{sen\,(a-b)}{sen\,(a+b)} = \frac{1-cos\, C}{1+cos\, C} = tang^2\frac{C}{2}$, e quindi:

(3) $cos\,(a-b) = \sqrt{1 - tang^4\frac{C}{2}\, sen^2(a+b)} = \Delta\,(a+b)$, col modulo $k = tang^2\frac{C}{2} = \frac{1-\sqrt{1-h^2}}{1+\sqrt{1-h^2}}$, da cui $h = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$. Si ha pure dalle formule goniometriche la relazione: $cos\, c = cos\, a\, cos\, b + sen\, a\, sen\, b\, cos\, C = = cos\, a\, cos\, b\left(cos^2\frac{C}{2} + sen^2\frac{C}{2}\right) + sen\, a\, sen\, b\left(cos^2\frac{C}{2} - sen^2\frac{C}{2}\right) = cos\,(a-b) \times cos^2\frac{C}{2} + cos\,(a+b)\, sen^2\frac{C}{2}$, (4) cioè $cos\, c = \Delta\,(a+b)\, cos^2\frac{C}{2} + cos(a+b) \times sen^2\frac{C}{2}$. Attribuendo un piccolo incremento AA' al lato CA, essendo P

(*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, anno 1881, pag. 347.

il polo di questo arco di cerchio massimo, i quadranti PA, PA' comprenderanno sul prolungamento del lato CB un piccolo arco BB' ed il triangolo PBB' ci dà la proporzione $\frac{sen\, \widehat{BB'}}{sen\, \widehat{BPB'}} = \frac{sen\, \widehat{PB'}}{sen\, B}$; onde al limite risulta $\frac{da}{db} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2} - c\right)}{sen\, B}$, ovvero (5) $da\, sen\, B = db \,.\, cos\, c = cos\, c \times d\,(a+b) - cos\, c\, da = cos\, c\, d\,(a+b) - da\, \Delta\, a$, in virtù della (1). — Nella precedente relazione si sostituisca in luogo di $sen\, B$, il rapporto eguale $\frac{cos\, C}{cos\, c} = \frac{cos\, C}{\Delta\, a}$, ed invece di $cos\, c$ il suo valore dato dalla (4); e si avrà

$$cos\, C \frac{da}{\Delta a} = d\,(a+b)\,\Delta\,(a+b)\,.\, cos^2\frac{C}{2} + d\,(a+b)\, cos\,(a+b)\, sen^2\frac{C}{2} - da\,\Delta a,$$

od integrandola (6) $cos\, C \int \frac{da}{\Delta a} = cos^2\frac{C}{2} \int d\,(a+b)\;\Delta\,(a+b) + sen^2\frac{C}{2}\, sen\,(a+b) - \int da\,\Delta\, a$, la quale riduce un integrale ellittico di prima specie nella somma di due integrali ellittici di seconda specie, e gli archi variabili $a+b$, a sono collegati dalla relazione (2), cioè $tang\,(a+b-a) = cos\, C\, tang\, a$. Inoltre per l' eguaglianza surriferita

$$\frac{db}{da} = \frac{sen\, B}{cos\, c} = \frac{sen\, b}{sen\, a\;cos\, c} = \frac{sen\, b\;\; cos\, b}{sen\, a\;\; cos\, a}, \text{ si deduce:}$$

$$\frac{d\,(a+b)}{da} = \frac{sen\, 2\, a + sen\, 2\, b}{2\, sen\, a\, cos\, a} = \frac{sen\,(a+b)\, cos\,(a-b)}{sen\, a\, cos\, a};$$

e siccome dalla proporzione $\frac{cos\, C}{cos\, c} = sen\, B = \frac{sen\, b}{sen\, a}$ resulta $\frac{2\, cos^2\frac{C}{2}}{cos\, c} = \frac{sen\,(a+b)}{sen\, a\, cos\, a}$, si conchiude facilmente $\frac{d\,(a+b)}{da} = \frac{2\, cos\,(a-b)}{cos\, c}\, cos^2\frac{C}{2} = \frac{2}{\Delta a}\, cos^2\frac{C}{2}\,\Delta\,(a+b)$, e per conseguenza:

$$(7)\quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{1 - sen^2 C\, sen^2 a}} = \frac{1}{2\, cos^2\frac{C}{2}} \int_0^{a+b} \frac{d\,(a+b)}{\sqrt{1 - tang^4\frac{C}{2}\, sen^2\,(a+b)}},$$

ovvero $F(h, a) = \frac{1+k}{2}\, F\,(k, a+b)$ come alla pag, 37.

Il celebre Christoph Gudermann (nato il 28 marzo 1798 a Winneburg presso Hildesheim e morto il 25 settembre 1852 a Münster, professore dell' Università di questo paese), come ultima sua scoperta lasciò un teorema sul triangolo sferico rettangolo simile a quello Pitagorico nella geometria piana ed è pure una semplice rappresentazione geome-

trica dell'equazione differenziale ellittica nel caso del modulo eguale ad uno. (*) Si consideri un rettangolo sferico, cioè un quadrilatero equiangolo a lati opposti eguali; detti a, b i lati adiacenti, C l'angolo compreso, ed assumendo per unità di superficie quella del triangolo trirettangolo si avrà per l'area del rettangolo sferico $s = 4C - 2\pi$, da cui $sen\frac{s}{4} = -\cos C$. Descritta una diagonale c di questa figura, il centro del suo cerchio circoscritto cade nel mezzo di c, ovvero $\frac{c}{2}$ è la mediana del lato c in ciascuno dei due triangoli metà del rettangolo, e per conseguenza $\cos a + \cos b = 2\cos^2\frac{c}{2} = 1 + \cos c$; inoltre si ha $\cos c = \cos a \cos b + $ $+ sen\, a\, sen\, b \cos C$, ed eliminando c si ottiene $-\cos C = \frac{(1-\cos a)(1-\cos b)}{sen\, a\, sen\, b} =$ $= tang\frac{1}{2}a\, tang\frac{1}{2}b$; onde la superficie del rettangolo sferico resulta: $sen\frac{s}{4} = tang\frac{a}{2}\, tang\frac{b}{2}$, il qual prodotto dovrà esser minore di uno cioè: $a + b < \pi$. Facendo $a = b < \frac{\pi}{2}$, si avrà la superficie del quadrato sferico per la formula $sen\frac{s}{4} = tang^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$; e ricavando il valore del lato a in funzione della superficie resulta:

$$\cos a = \frac{sen\frac{\pi}{2} - sen\frac{s}{4}}{sen\frac{\pi}{2} + sen\frac{s}{4}} = tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{s}{8}\right) cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{8}\right) = cot^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{8}\right).$$

Sui cateti a, b e sull'ipotenusa c di un triangolo rettangolo sferico si costruiscano i quadrati le cui aree si notino respettivamente con i simboli 4φ, $4\varphi'$, 4μ; avendosi l'eguaglianza $\cos c = \cos a \cos b$, ovvero: $\log\sqrt{\frac{1}{\cos c}} = \log\sqrt{\frac{1}{\cos a}} + \log\sqrt{\frac{1}{\cos b}}$ a motivo delle precedenti equazioni, si conchiude $\log tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right) = \log tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \log tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right)$; relazione che determina l'area di uno dei quadrati in funzione degli altri due e nell'ipotesi di μ costante ha per differenziale $\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = o$.

19. — L'integrale di Lagrange, pag. 47, si può ordinare rispetto ad ognuna delle quantità C, x, y e quindi scriverlo sotto le tre forme

---

(*) Giornale di Crelle, anno 1851, tomo XLII, pag. 280.

$u = MC^2 + 2NC + L = M_1 x^2 + 2N_1 x + L_1 = M_2 y^2 + 2N_2 y + L_2 = o$ e considerata pure C come variabile si avranno le tre derivate parziali

$\frac{du}{dC} = 2(MC + N, = 2\sqrt{N^2 - LM}$, $\frac{du}{dx} = 2(M_1 x + N_1) = 2\sqrt{N_1^2 - M_1 L_1}$,

$\frac{du}{dy} = 2(M_2 y + N_2) = 2\sqrt{N_2^2 - L_2 M_2}$. Per calcolare il discriminante $N^2 - ML$ si osservi che nell'equazione $u = 2Q(X + Y) - (P^2 + Q^2(x - y)^2)$, (pag. 47), posto $Q = C + H$, essendo $H = d(x + y) + e(x + y)^2$, si trova ordinando rispetto a C l' equazione $u = (x - y)^2 C^2 + 2C[H(x - y)^2 - - (X + Y)] + \left[H^2(x - y)^2 - 2H(X + Y) + \left(\frac{X - Y}{x - y}\right)^2\right] = o$, e per conseguenza $N^2 - ML = (X + Y)^2 - (X - Y)^2 = 4XY$. Gli altri due discriminanti della forma quadratica u ordinata rispetto ad x, od y si ottengono riducendo a forma più simmetrica l' integrale u; è evidente che il valor di questo per il polinomio a coefficienti binomiali $X = a + 4bx + 6cx^2 + 4dx^3 + ex^4$ si otterrà mutando le lettere b, c, d respettivamente nei prodotti $4b, 6c, 4d$; inoltre facendo $C = 4(c + \omega)$, si troverà (1) $\frac{1}{4}u = 4(b^2 - ac) - 4a\omega + + 2(2be - 2ad - 4b\omega)(x + y) + (c^2 - ae + 4\omega^2 - 4c\omega)(x^2 + y^2) + + 2(5c^2 - 4bd - ae - 4\omega^2 - 8c\omega)xy + 2(2cd - 2eb - 4d\omega)xy(x + y) + + 4(d^2 - ec - e\omega)x^2y^2 = o$. Scrivendo per brevità $\alpha = 4(b^2 - ac) - - 4a\omega$, $\beta = 2(bc - ad) - 4b\omega$, $\gamma = c^2 - ae + 4\omega^2 - 4c\omega$, $\eta = 2(cd - eb) - - 4d\omega$, $\varepsilon = \delta - \gamma = 4(c^2 - db) - 8\omega^2 - 4\omega c$, $\lambda = 4(d^2 - ec) - 4e\omega$, l'integrale ordinato rispetto ad y diviene (2) $u = 4[\alpha + 2\beta x + \gamma x^2 + + 2y(\beta + (\gamma + \varepsilon)x + \eta x^2) + (\gamma + 2\eta x + \lambda x^2)y^2]$. Si conchiude la relazione $4(N_2^2 - M_2 L_2) = 4^3[\beta + (\gamma + \varepsilon)x + \eta x^2]^2 - (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\gamma + 2\eta x + \lambda x^2) = 4^3[\beta^2 - \alpha\gamma + 2(\beta\varepsilon - \alpha\eta)x + (\varepsilon^2 - \alpha\lambda + 2\gamma\varepsilon - - 2\beta\eta)x^2 + 2(\eta\varepsilon - \beta\lambda)x^3 + (\eta^2 - \gamma\lambda)x^4]$; con facili calcoli si ottiene la serie dei rapporti eguali:

$$\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{a} = \frac{\beta\varepsilon - \alpha\eta}{2b} = \frac{\varepsilon^2 - \alpha\lambda + 2\gamma\varepsilon - 2\beta\eta}{6c} = \frac{\eta\varepsilon - \beta\lambda}{2d} = \frac{\eta^2 - \gamma\lambda}{e} = 4\Omega,$$

in cui si è notato con Ω il trinomio $4\omega^3 - I\omega - J$, I ed J rappresentando gl' invarianti quadratico e cubico della forma omogenea $ax_1^4 + 4bxx_1^3 + 6cx^2x_1 + 4dx^3x_1 + ex^4$, cioè $I = ae - 4bd + 3c^2$,

$$J = \begin{vmatrix} a, b, c \\ b, c, d \\ c, d, e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$ Restano così dimostrate

l' eguaglianze $4(N_2^2 - M_2 L_2) = 4^4 X\Omega$, $4(N_1^2 - M_1 L_1) = 4^4 Y\Omega$, e siccome il differenziale totale di u rispetto alle variabili x, y, C è espresso

per $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dC}dC = o$; dai precedenti valori si deduce: $du = 4^2\, dx \sqrt{Y\Omega} + 4^2 dy \sqrt{X\Omega} + 4\, dC \sqrt{XY} = o$; e poichè $dC = 4\, d\omega$, si ricava l'equazione (3) $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} = o$, che ha per integrale particolare, cioè privo di costante arbitraria, il valore di u determinato dalla (1).

20. — L'Hessiano della forma omogenea biquadratica surriferita è:

$$H = \left(\frac{d^2 f}{dx_1\, dx}\right)^2 - \frac{d^2 f}{d x_1^2}\frac{d^2 f}{d x_2^2} = h_4 x_1^4 + 4 h_3 x_1^3 x + 6 h_2 x_1^2 x^2 + 4 h_1 x_1 x^3 + h_0 x^4,$$

ed i valori dei coefficienti sono $h_4 = ac - b^2$, $2h_3 = ad - bc$, $6h_2 = ae + 2bd - 3c^2$, $2h_1 = be - cd$, $h_0 = ce - d^2$; onde a motivo delle due identità $c^2 - ae = -\frac{4}{6}(ae + 2bd - 3c^2) - \frac{1}{6}(2ae - 8bd + 6c^2) = -4h_2 - \frac{1}{3}I$; $5c^2 - 4bd - ae = 2(c^2 - ae) + ae - 4bd + 3c^2 = -8h_2 + \frac{1}{3}I$, l'integrale di Lagrange diviene (4) $-\frac{1}{4^2}u = h_4 + a\omega + 2(h_3 + b\omega)(x + y) + (h_2 + c\omega)(x^2 + y^2 + 4xy) + 2(h_1 + d\omega)xy(x + y) + (h_0 + e\omega)x^2y^2 - \left(\omega^2 - \frac{1}{12}I\right)(x - y)^2 = o$, e sotto questa forma fu dato dall'illustre professor Battaglini alla pag. 70 del tomo XIX del suo *Giornale di Matematiche*, Napoli 1881. Ei la trovò come caso particolare delle condizioni che devono sussistere fra i coefficienti di una forma φ razionale ed intera con le variabili x, y, z e quadrica rispetto a ciascuna di esse, affinchè questa φ sia un'integrale particolare dell'equazione differenziale ellittica a tre variabili, servendosi dei simboli abbreviatori dell'Algebra moderna. Confrontando la forma (4) trovata per u con l'altra (2) si deducono le relazioni $-\alpha = 4(h_4 + a\omega)$, $-\beta = 4(h_3 + b\omega)$, $-\gamma = 4(h_2 + c\omega) + \frac{1}{3}I - 4\omega^2$, $-\eta = 4(h_1 + d\omega)$, $-(\gamma + \varepsilon) = 8(h_2 + c\omega) + 4\omega^2 - \frac{1}{3}I$, $-\eta = 4(h_1 + d\omega)$, $-\lambda = 4(h_0 + e\omega)$, $-(2\gamma + \varepsilon) = 12(h_2 + c\omega)$.

Facendo $y = x$ l'integrale u riducesi ad $f(x) = H(x) + \omega X$, cioè al valore del polinomio, $(h_4 + a\omega)\, x_1^4 + 4\,(h_3 + b\omega)\, x x_1^3 + 6\,(h_2 + c\omega)\, x^2 x_1^2 + 4\,(h_1 + d\omega)\, x^3 x_3 + (h_0 + e\omega)\, x^4$ per $x_1 = 1$. Ora questo polinomio si può scrivere per le relazioni precedenti $4\,f(x) = \alpha x_1^4 + 4\,\beta\, x x_1^3 + 2(2\gamma + \varepsilon)x^2 x_1^2 + 4\eta\, x^3 x_1 + \lambda x^4$ e l'Hessiano $\left(\frac{d^2 f}{dx\, dx_1}\right)^2 - \frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^2 f}{d x_1^2}$ del medesimo è $[3\beta x_1^2 + 2(2\gamma + \varepsilon)\, x x_1 + 3\eta x^2]^2 - [(2\gamma + \varepsilon)\, x_1^2 + 6\eta\, x x_1 + 3\lambda x^2] \times$

$[3\alpha x_1^2 + 6\beta x x_1 + (2\gamma + \varepsilon) x^2]$; la quale espressione per $x_1 = 1$, paragonata col discriminante della (2) equivale a $[3N_2 + (\gamma - \varepsilon)x]^2 - [3M_2 + (\varepsilon - \gamma)][3L_2 + (\varepsilon - \gamma)x^2] = 9(N_2^2 - M_2 L_2) + 3(\gamma - \varepsilon) \times (L_2 + 2N_2 x + M_2 x^2)$; onde per $\varepsilon = \gamma$, cioè $\omega^2 = \frac{1}{12} I$, l'Hessiano della forma $H(x) + \omega X$, coincide a differenza di un fattore numerico col discriminante dell'integrale u considerato come forma quadratica rispetto ad y od x, e sarà quindi eguale a $24^2 X \Omega_1$, significando con Ω_1 il valore di Ω per $\omega^2 = \frac{1}{12} I$; dunque le forme biquadratiche $H(x) \pm \pm X \sqrt{\frac{1}{12} I}$, hanno per Hessiano la stessa forma X. Per i valori particolari $\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{12} I}$, la forma (4) dell'integrale u esprime la relazione fra un elemento x od y ed i suoi elementi armonici di secondo grado y oppure x, rispetto al gruppo dei quattro elementi determinati dall'equazione $H(x) \pm X \sqrt{\frac{1}{12} I} = o$, come si dimostra nel numero seguente.

21. — *Osservazione.* Le radici del polinomio biquadratico $X = o$ rappresentino le distanze di quattro punti A, B, C, D situati in linea retta e referiti ad un'origine O, e poichè si hanno sei doppi rapporti, tre diretti $(ABCD) = \alpha$, $(ACDB) = \alpha_1 = \frac{1}{1-\alpha}$, $(ADBC) = \alpha_2 = 1 - \frac{1}{\alpha}$; ed i tre inversi $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$, sarà facile comporre l'equazione cubica avente per radici $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2}$, in funzione dei coefficienti di X; infatti chiamando K l'incognita si avrà $K^3 - MK^2 + NK - P = o$; in cui $M = \alpha + \frac{1}{\alpha} + \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1} + \alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2} = \alpha + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} + 1 - \alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha - 1} = 3$, $N = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right) + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2}\right) + \left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2}\right)$, $P = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2}\right)$, e sostituendo i valori di α_1 ed α_2 in funzione di α trovasi con semplici riduzioni:

$$-N = \frac{1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3 + 3\alpha^4 - 3\alpha^5 + \alpha^6}{\alpha^2(1-\alpha)^2},$$

$$-P = \frac{2 - 6\alpha + 11\alpha^2 - 12\alpha^3 + 11\alpha^4 - 6\alpha^5 + 2\alpha^6}{\alpha^2(1-\alpha)^2}.$$

dalle quali si conchiudono l'eguaglianze $2N-P=5$, $1-P=\frac{2(1-\alpha+\alpha^2)^3}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$

Ora $\alpha=\frac{AC.BD}{BC.AD}=\frac{(OC-OA)(OD-OB)}{(OC-OB)(OD-OA)}=\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}$, e ponendo

$(x_2-x_1)(x_3-x_1)=p$, $(x_3-x_1)(x_4-x_1)=q$, $(x_4-x_1)(x_2-x_1)=r$,

si ottiene $\alpha=\frac{q-p}{q-r}$, $1-\alpha=\frac{r-p}{r-q}$, $(q-r)^2(1-\alpha+\alpha^2)=p^2+q^2+$ $+r^2-pq-rq-rp=\frac{12I}{e^2}$, $(q-r)^6\alpha^2(1-\alpha)^2=(q-r)^2(q-p)^2(r-p)^2=$ $=\frac{16^2}{e^6}\left(I^3-27J^2\right)$; e per conseguenza si trova $1-P=\frac{27I^3}{2(I^3-27J^2)}$; da cui ricavasi il valore di P, indi si avrà $N=\frac{5+P}{2}$, e la surriferita equazione cubica diviene $(K-1)^3-\frac{I^3}{4.27J^2}(K+2)(2K-5)^2=o$: dunque i valori dei doppi rapporti dipendono dalla costante $\frac{I^3}{J^2}$. Se abbiasi $K=\alpha+\frac{1}{\alpha}=-2$ sarà $\alpha=-1$, i quattro punti A, B, C, D formano un sistema armonico e la condizione necessaria e sufficiente riducesi ad $J=o$. Nel caso che $K=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ sia eguale all'unità, i doppi rapporti divengono tutti eguali alla radice cubica immaginaria dell'unità negativa, il sistema dei quattro punti $ABCD$ si dice equianarmonico e la relativa condizione necessaria e sufficiente è $I=o$.

Se $A, B, C, D, E\ldots.$ sono punti fissi in linea retta ed M, M' due punti variabili collegati con i primi per la relazione $\Sigma\frac{MA.MB}{M'A.M'B}=o$, ove il segno Σ si estende a tutte le combinazioni binarie dei medesimi punti fissi, dicesi che i punti M, M' sono armonici di secondo ordine rispetto al gruppo $ABCDE\ldots..$ Posto $OM=x$, $OM'=y$, essendo O l'origine delle distanze, i segmenti OA, OB, OC, OD sieno le radici dell'equazione biquadratica $X=a+4bx+6cx^2+4dx^3+ex^4=o$; facilmente si troverà
$$\Sigma\frac{MA.MB}{M'A.M'B}=\Sigma\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(y-x_1)(y-x_2)}=o, \text{ ovvero}$$

$\Sigma(x-x_1)(x-x_2)(y-x_3)(y-x_4)=o$, sviluppando resulta:

$6x^2y^2-3(x^2y+xy^2)\Sigma x_1+(x^2+y^2+4xy)\Sigma x_1x_2-3(x+y)\Sigma x_1x_2x_3+$ $+6x_1x_2x_3x_4=o$; e sostituiti i valori delle funzioni simmetriche delle radici espresse per i coefficienti di X si conchiude la relazione ex^2y^2+ $+2dxy(x+y)+c(x^2+y^2+4xy)+2b(x+y)+a=o$.

L'integrale u di Lagrange (pag. 47) è una funzione quadrica della somma $x+y=v$, e del prodotto $xy=t$ delle variabili; riducendolo omogeneo con la terza variabile w diviene $u=\alpha w^2+2\beta vw+\gamma v^2+$ $+2\varepsilon tw+2\eta tv+\lambda t^2$; prendendo le derivate parziali $\frac{du}{dt}=2\lambda t+2\eta v+$ $+2\varepsilon w$, $\frac{du}{dv}=2\eta t+2\gamma v+2\beta w$, $\frac{du}{dw}=2\varepsilon t+2\beta v+2\alpha w$, si trova per denominator comune delle t, v, w il determinante simmetrico $D=\begin{vmatrix}\lambda, & \eta, & \varepsilon \\ \eta, & \gamma, & \beta \\ \varepsilon, & \beta, & \alpha\end{vmatrix}$.

Componendo il determinante ad elementi reciproci degli elementi di D si ottiene:

$$D^2=\begin{vmatrix}\alpha\gamma-\beta^2, & \beta\varepsilon-\alpha\eta, & \eta\beta-\gamma\varepsilon \\ \beta\varepsilon-\alpha\eta, & \lambda\alpha-\varepsilon^2, & \eta\varepsilon-\lambda\beta \\ \eta\beta-\gamma\varepsilon, & \eta\varepsilon-\lambda\beta, & \lambda\gamma-\eta^2\end{vmatrix}=4^4\Omega^3\begin{vmatrix}-a, & b, & 2\omega-c \\ b, & -(c+\omega), & d \\ 2\omega-c, & d, & e\end{vmatrix}=4^4\Omega^4,$$

da cui $D=\pm 4^2\Omega^2$, così le tre radici del polinomio Ω annullano il determinante D ed i discriminanti $N_1^2-M_1L_1$, $N_2^2-M_2L_2$, e perciò rendono u quadrato esatto tanto rispetto ad x che ad y.

22. — *Il differenziale* $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, *in cui* $Z=a+4bz+6cz^2+4dz^3+$ $+ez^4$ *e* z_1 *è una sua radice, per la sostituzione* $z=z_1+\frac{f'(z_1)}{\theta-\frac{1}{6}f''(z_1)}$, *si riduce alla forma* $\frac{d\theta}{\sqrt{\theta^3-4I\theta-4^2J}}$; *essendo* I *e* J *gl' invarianti quadratico e cubico di* Z. — Infatti facciasi $z=z_1+v$, ed il differenziale $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ si trasforma nel simile $\frac{dv}{\sqrt{V}}$, le radici del polinomio $V=vf'(z_1)+$ $+\frac{v^2}{2}f''(z_1)+\frac{v^3}{2.3}f'''(z_1)+\frac{v^4}{2.3.4}f^{IV}(z_1)$ in funzione di z sono $v_1=$ $=z_2-z_1$, $v_2=z_3-z_1$, $v_3=z_4-z_1$, $v_4=o$, notando per brevità soltanto con $f^{(m)}$ il valore della derivata m^{esima} di $f(z)$ per $z=z_1$ si avranno evidentemente le relazioni (1) $f'=-ev_1v_2v_3$, $f''=2e(v_1v_2+v_2v_3+v_3v_1)$, $f'''=-6e(v_1+v_2+v_3)$. Eseguendo la sostituzione $v=\frac{\alpha}{\theta-\beta}$, con α e β parametri indeterminati si ottiene:

$$\frac{dv}{\sqrt{V}}=\frac{-\sqrt{\alpha}\,d\theta}{\sqrt{(\theta-\beta)^3f'+\frac{\alpha}{2}(\theta-\beta)^2f''+\frac{\alpha^2}{6}(\theta-\beta)f'''}},$$

ed affinchè sparisca il termine di secondo grado rispetto a θ nel polinomio sotto radicale dovrà aversi la condizione $\alpha f'' = 6 f' . \beta$; così facendo $\alpha = f'$, $\beta = \frac{1}{6} f''$ risulta:

$$\frac{dv}{\sqrt{V}} = \frac{-d\theta}{\sqrt{\theta^3 - \theta\left(\frac{1}{12} f''^2 - \frac{1}{6} f' f'''\right) - \left(\frac{1}{6^2} f' f'' f''' - \frac{2}{6^3} f''^3 - e f'^2\right)}}.$$

Scrivendo $v_1 v_2 = p$, $v_2 v_3 = q$, $v_3 v_1 = r$, le relazioni (1) conducono alle seguenti $f'^2 = e^2 pqr$, $f' f''' = 6 e^2 (v_1^2 v_2 v_3 + v_1 v_2^2 v_3 + v_1 v_2 v_3^2) = 6 e^2 (pr + rq + qp)$, $f'' = 2e(p + q + r)$; quindi si hanno per i coefficienti del polinomio cubico rispetto a θ l' espressioni (2) $\frac{1}{12} f''^2 - \frac{1}{6} f' f''' =$

$$= \frac{e^2}{3}(p + q + r)^2 - e^2(pr + rq + qp) = \frac{e^2}{6}\left[(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\right]$$

$$= \frac{e^2}{6}\Sigma(z_2 - z_1)^2 (z_3 - z_4)^2 = 4 I,\ \frac{1}{6^2} f' f'' f''' - \frac{1}{3.6^2} f''^3 - e f'^2 =$$

$$\frac{e^3}{27}\left[9(pr + rq + qp)(p + q + r) - 2(p + q + r)^3 - 27 pqr\right] =$$

$$\frac{e^3}{27}(p + q - 2r)(p + r - 2q)(r + q - 2p) = 4^2 J;$$

e queste relazioni dimostrano la proposizione enunciata. Si può aggiungere che posto $\theta = 4\omega$, il differenziale $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ per la sostituzione $z = z_1 + \frac{f'(z_1)}{4\omega - \frac{1}{6} f''(z_1)}$, si trasforma nell' espressione $\frac{-d\omega}{\sqrt{4\omega^3 - I\omega - J}}$. *Reciprocamente il differenziale* $\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}$ *per la sostituzione* $4\omega = \frac{1}{6} f''(z_1) + \frac{f'(z_1)}{z - z_1}$, *essendo* z_1 *una radice semplice di* Z, *si trasforma in* $-\frac{dz}{\sqrt{Z}}$.

Poichè si deduce facilmente $4 d\omega = \frac{-dz f'(z_1)}{(z - z_1)^2}$, $4^3\omega^3 - 4^2 I\omega - 4^2 J =$ $= \left(\frac{1}{6} f'' + \frac{f'}{z - z_1}\right)^3 - 4 I\left(\frac{1}{6} f'' + \frac{f'}{z - z_1}\right) - 4^2 J$, e ponendo in luogo degl' invarianti i loro valori in funzione delle derivate ottenuti dall' equazioni (2), si conchiude $\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} = \frac{-dz}{\sqrt{f(z)}}$, ove $f(z) = e(z - z_1)^4 + \frac{1}{6}(z - z_1)^3 f''' + \frac{1}{2}(z - z_1)^2 f'' + (z - z_1) f' = f(z_1 + z - z_1) = Z$.

Osservazione 1ª. — Al valore $z = z_1$ corrisponde $\omega = \infty$, e perciò si ha la relazione $u = -\int_{z_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int_{\infty}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{4\omega^3 - I\omega - J}}$; notando con $p(u)$ la variabile ω funzione inversa dell'integrale u, si avranno le derivate $p'(u) = \frac{d\omega}{du} = \sqrt{4\omega^3 - I\omega - J}$, $p''(u) = 6\omega^2 - \frac{1}{2} I$, $p'''(u) = 12p(u)p'(u)$; o brevemente $p''' = 6(pp' + p'p)$, $p^{(IV)} = 6(pp'' + 2p'^2 + p''p)$........ ed in generale col metodo di conclusione si dimostra:

$$p^{(n+2)} = 6(pp^{(n)} + n_1 p' p^{(n-1)} + n_2 p'' p^{(n-2)} + n_3 p''' p^{(n-3)} + \ldots + p^{(n)} p),$$

in cui n_h simboleggia il coefficiente binomiale relativo all' esponente n.

Osservazione 2ª. — L' equazione differenziale (3) del num. (19) diviene: $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} - \frac{dz}{\sqrt{Z}} = o$, e nell' integrale (1) pag. 56, ponendo il valore surriferito di ω dato per z si avrà un integrale particolare dell' equazione precedente. Così per esempio facendo $a = o$, nei polinomi X, Y, Z sarà una radice di Z eguale a zero, e quindi si trova $f'(o) = 4b, f'' = 12c$, ed $\omega = \frac{c}{2} + \frac{b}{z}$; fatta questa sostituzione nell' integrale (1) e posto $a = o$ si ridurrà alla forma:

$$\frac{1}{4}u = 4b^2(x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz - 2xy) - 24bcxyz - 8bdxyz(x + y + z) -$$
$$- 4ebxyz(xy + yz + zx) + 4(d^2 - 6ec)x^2y^2z^2 = o. \ (*)$$

23. — Il metodo di Lagrange fu esteso dal professor Richelot di Kœnisberg a risolvere il sistema di equazioni differenziali simultanee (1) $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = o$, $\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}} = o$, in cui si ha $X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, ed Y, Z significano i valori corrispondenti di X per la sostituzione di y e z alla variabile x.

Considerando le tre variabili come funzioni di una indipendente t, è facile verificare che le surriferite equazioni sono soddisfatte per le seguenti (2) $\frac{dx}{dt} = (y - z)\sqrt{X}$, $\frac{dy}{dt} = (z - x)\sqrt{Y}$, $\frac{dz}{dt} = (x - y)\sqrt{Z}$; inoltre si assumano per variabili ausiliarie le funzioni $u = x + y + z$,

---

(*) CAYLEY, *Trattato delle funzioni ellittiche*, num. 445, pag. 327, della traduzione citata.

$v=(y-z)(z-x)(x-y)$, e per brevità si faccia $y-z=x_1$, $z-x=y_1$, $x-y=z_1$, si troveranno semplicemente le derivate (4) $\frac{du}{dt}=x_1\sqrt{X}+$ $+y_1\sqrt{Y}+z_1\sqrt{Z}$, $\frac{dv}{dt}=x_1y_1(x_1\sqrt{X}-y_1\sqrt{Y})+y_1z_1(y_1\sqrt{Y}-z_1\sqrt{Z})+$ $+z_1x_1(z_1\sqrt{Z}-x_1\sqrt{X})$.

Differenziando rispetto a t la prima delle (4) si ottiene:

$$(5)\quad \frac{d^2u}{dt^2}=(y_1-x_1)\sqrt{XY}+(x_1-z_1)\sqrt{XZ}+(z_1-y_1)\sqrt{ZY}+ +\frac{1}{2}\left(x_1^2\frac{dX}{dx}+y_1^2\frac{dY}{dy}+z_1^2\frac{dZ}{dz}\right);$$

dalle quali tre equazioni si deduce:

$$(6)\, v\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}x_1y_1z_1\left(x_1^2\frac{dX}{dx}+y_1^2\frac{dY}{dy}+z_1^2\frac{dZ}{dz}\right)+x_1^3(z_1-y_1)X+ +y_1^3(x_1-z_1)Y+z_1^3(y_1-x_1)Z.$$

Ora il secondo membro di quest'ultima relazione è una funzione alternata delle tre differenze $y-z$, $z-x$, $x-y$, e di più è un polinomio P razionale ed intero del decimo grado; determinando le sue derivate parziali di primo e secondo ordine rispetto ad x si trova che esse si annullano per $y=x$; dunque il polinomio P è divisibile per $(x-y)^3$, e con lo stesso ragionamento si prova che ammette per divisori $(y-z)^3$, e $(z-x)^3$, quindi per il loro prodotto che è pure una funzione alternata, ed il quoziente non mutando segno per il cambiamento di una variabile nell' altra, sarà un' espressione simmetrica di primo grado e perciò della forma $A(x+y+z)+B$; per trovare i valori delle indeterminate A e B si ponga $x=o$, $y=1$, $z=2$ e si otterrà $A=g$, $B=\frac{1}{2}f$. Si conchiude che l' equazione (6) diviene $v\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}=v^3\left(gu+\frac{1}{2}f\right)$; onde moltiplicando i due membri per $\frac{2}{v^3}\frac{du}{dt}$ essi risulteranno differenziali esatti, e notando con C_1 una costante si avrà l' integrale $\frac{1}{v^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2-gu^2-fu=C_1$, ovvero sostituendo i valori di v e di $\frac{du}{dt}$ la relazione

$$(I)\quad \left[\frac{(y-z)\sqrt{X}+(z-x)\sqrt{Y}+(x-y)\sqrt{Z}}{(x-y)(y-z)(z-x)}\right]^2-g(x+y+z)^2- -f(x+y+z)=C_1.$$

Per giungere ad un secondo integrale del sistema

proposto si operi la sostituzione inversa $x = \frac{1}{x'}, y = \frac{1}{y'}, z = \frac{1}{z'}$, e l' equazioni simultanee (1) assumeranno la forma $\frac{x'\,dx'}{\sqrt{X'}} + \frac{y'\,dy'}{\sqrt{Y'}} + \frac{z'\,dz'}{\sqrt{Z'}} = o$, $\frac{dx'}{\sqrt{X'}} + \frac{dy'}{\sqrt{Y'}} + \frac{dz'}{\sqrt{Z'}} = o$, essendo $X' = ax'^6 + bx'^5 + cx'^4 + dx'^3 + ex'^2 + fx' + g$; e siccome in virtù della (I) il sistema precedente ha per integrale:

$$\left[\frac{(y'-z')\sqrt{X'} + (z'-x')\sqrt{Y'} + (x'-y')\sqrt{Z'}}{(x'-y')(y'-z')(z'-x')}\right]^2 - a(x'+y'+z')^2 - b(x'+y'+z') = C_2;$$

ritornando alle variabili x, y, z si ottiene l' eguaglianza:

$$\text{(II)}\quad \left[\frac{y^2z^2(y-z)\sqrt{X} + z^2x^2(z-x)\sqrt{Y} + x^2y^2(x-y)\sqrt{Z}}{xyz(y-z)(z-x)(x-y)}\right]^2 - a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = C_2,$$

e questo secondo integrale del sistema proposto è evidentemente distinto dal primo. Richelot generalizzò lo stesso metodo per un sistema di n equazioni differenziali lineari simultanee con n variabili, come si può leggere nella sua Memoria pubblicata l' anno 1842 nel tomo XXIII del Giornale di Crelle.

24. — L' equazione differenziale (1) $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = o$, fu ridotta da Walton (*) alla forma di quella di Clairaut, cioè $y = px + f(p)$, dove si ha $p = \frac{dy}{dx}$, mediante le sostituzioni $x = \cos\varphi\cos\varphi'$, $y = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'$; infatti da quest' ultime si deducono le seguenti $xdy - ydx = d\varphi\operatorname{sen}\varphi'\cos\varphi' + d\varphi'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$, $(xdy - ydx)^2 - dy^2 = (d\varphi^2\operatorname{sen}^2\varphi' - d\varphi'^2\operatorname{sen}^2\varphi)(\cos^2\varphi' - \cos^2\varphi)$, $dx^2 - dy^2 = (d\varphi^2 - d\varphi'^2)(\cos^2\varphi - \cos^2\varphi')$, e queste due eguaglianze divise membro a membro in virtù della (1) ridotta razionale e risoluta rispetto a k^2, determinano la relazione $\frac{dx^2 - dy^2}{(xdy - ydx)^2 - dy^2} = k^2$, ovvero $\frac{1}{k^2}(1 - p^2) = (px - y)^2 - p^2$, da cui $y = px \pm \frac{1}{k}\sqrt{1 - p^2(1 - k^2)}$: è noto che l' integrale generale di questa si ottiene col porre una co-

(*) *The Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, tomo XI, anno 1870.

stante C in luogo di p, ed è chiaro venirsi alla stessa conclusione pure col metodo di Lagrange, quindi sostituendo i valori di x, y resulta:

$$(1) \qquad sen\,\varphi\, sen\,\varphi' = C\cos\varphi\cos\varphi' \pm \frac{1}{k}\sqrt{1 - C^2(1-k^2)};$$

al solito si trova il valore di C facendo $\varphi = o$, $\varphi' = \mu$ nella precedente, ed assumendo un valore positivo per la costante, si otterrà: $C = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 sen^2\mu}} = \frac{1}{\Delta\mu}$; onde l' integrale coincide con la relazione di Lagrange $sen\,\varphi\, sen\,\varphi' = \frac{\cos\varphi\cos\varphi' - \cos\mu}{\Delta\mu}$, avendo preso nella (I) il radicale col segno negativo, affinchè la relazione sia verificata per $\varphi = o$, $\varphi' = \mu$.

Anche il professor E. Catalan (*) (nato a Bruges nel Belgio, il 30 maggio 1814) anteriormente a Walton avea trasformata per diversa via la stessa equazione differenziale (1) in quella di Clairaut. Infatti riducendola razionale e ponendo in luogo dei seni degli archi φ e φ' le loro espressioni determinate dai coseni degli archi doppi, resulta:

$$(2) \qquad (d\varphi^2 - d\varphi'^2)\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) + \frac{k^2}{2}\left(d\varphi^2\cos 2\varphi' - d\varphi'^2\cos 2\varphi\right) = o.$$

Si faccia $2\varphi = \theta + \theta'$, $2\varphi' = \theta - \theta'$, e la (2) prende la forma:

$$(3) \qquad d\theta . d\theta'\left(1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) + \frac{k^2}{4} sen\,\theta\, sen\,\theta'\,(d\theta^2 + d\theta'^2) = o.$$

E con le nuove sostituzioni $m\cos\theta = x + y$, $m\cos\theta' = y - x$, che hanno per differenziali $-m\, sen\,\theta\, d\theta = dx + dy$, $-m\, sen\,\theta'\, d\theta' = dy - dx$, la (3) diviene $(dy^2 - dx^2)\left[1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{y^2 - x^2}{m^2}\right)\right] + \frac{k^2}{2}(dx^2 + dy^2)\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right) + \frac{2k^2}{m^2} xy\,dx\,dy = o$, ovvero (4) $dy^2(m^2 - k^2x^2) + 2k^2 xy\,dx\,dy - dx^2(m^2 - m^2k^2 + k^2y^2) = o$, che divisa per dx^2 ed ordinata rispetto ad y equivale a $k^2y^2 - 2k^2xy\,p + p^2(k^2x^2 - m^2) + m^2(1 - k^2) = o$, da cui si ricava: $y = px \pm \frac{m}{k}\sqrt{p^2 + k^2 - 1}$, equazione di Clairaut avente per integrale generale $y = Cx \pm \frac{m}{k}\sqrt{C^2 + k^2 - 1}$, essendo C la costante, e siccome

$$y = m\left(\frac{\cos\theta + \cos\theta'}{2}\right) = m\cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) = m\cos\varphi\cos\varphi',$$

$$x = m\left(\frac{\cos\theta - \cos\theta'}{2}\right) = -m\, sen\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) sen\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) = -m\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi',$$

si troverà facilmente come sopra la relazione di Lagrange ec.

(*) *Bulletins de l' Académie Royale de Belgique*, 2e série, tomo XXVII, anno 1869.

Col metodo di Catalan si può risolvere l'equazione differenziale (5) $d\varphi\,\Delta\varphi \pm d\varphi'\,\Delta\varphi' = o$, dell'addizione algebrica degl'integrali ellittici di seconda specie, poichè riducendola razionale e facendo gli stessi calcoli che nell'esempio precedente si trovano per le medesime sostituzioni le successive equazioni:

$$(6)\qquad \left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left(d\varphi^2 - d\varphi'^2\right)+\frac{k^2}{2}\left(d\varphi^2 \cos 2\varphi - d\varphi'^2 \cos 2\varphi'\right) = o.$$

$$(7)\qquad \frac{k^2}{4}\, sen\,\theta\, sen\,\theta'\,(d\theta^2 + d\theta'^2) - d\theta\, d\theta'\left[1-\frac{k^2}{2}+\frac{k^2}{2}\cos\theta\cos\theta'\right] = o.$$

$$(8)\qquad (m^2 - m^2 k^2 + k^2 y^2)\, dy^2 - 2k^2 xy\, dx\, dy - (m^2 - k^2 x^2)\, dx^2 = o,$$

cioè $k^2 p^2 y^2 - 2k^2 xy\, p + k^2 x^2 - m^2(1 - p^2 + k^2 p^2) = o$, dalla quale si deduce: (9) $y = \frac{x}{p} \pm \frac{m}{kp}\sqrt{1-p^2(1-k^2)}$. Differenziando quest'equazione rispetto alle variabili considerate come funzioni di $p = \frac{dy}{dx}$, si ottiene:

$$(10)\qquad \frac{dx}{dp} + \frac{x}{p(p^2-1)} \pm \frac{m}{kp\,(p^2-1)\sqrt{1-p^2(1-k^2)}} = o.$$ Risolvendo quest'equazione differenziale lineare di primo ordine rispetto ad x funzione di p, resulta:

$$(11)\qquad x = e^{-\int\frac{dp}{p(p^2-1)}}\left[C - \int e^{\int\frac{dp}{p(p^2-1)}}\frac{m\,dp}{kp(p^2-1)\sqrt{1-p^2(1-k^2)}}\right] =$$

$$-\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\left[\frac{m}{k}\int\frac{dp}{p^2\sqrt{(p^2-1)(1-p^2(1-k^2))}} - C\right],$$ a motivo di $$\int\frac{dp}{p(p^2-1)} = log\left(\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\right).$$

Eliminando p fra le due equazioni (9) ed (11) si deduce la cercata relazione; ora il valore di x contiene un integrale ellittico, e siccome $y = m\cos\varphi\cos\varphi'$, $x = m\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$, l'equazione (9) per il valore $p = \frac{1}{\Delta\mu}$, coincide con la relazione di Lagrange $\cos\varphi\cos\varphi' = sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\,\Delta\mu + \cos\mu$, e la (11) diviene $-sen\,\varphi\, sen\,\varphi' = \frac{C}{sen\,\mu} - \frac{E\mu}{k^2\, sen\,\mu}$; se poi C rappresenta il valore della somma $\frac{E\varphi \pm E\varphi'}{k^2}$, si otterrà la nota formula del Fagnani.

Si veda la *Rassegna di alcuni scritti relativi all'addizione degl'integrali ellittici ed abeliani del prof. Angelo Genocchi, inserita nel tomo 3° del Bollettino Boncompagni, anno 1870.*

Nota al n° 15, pag. 40. — Le coordinate di un punto U dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, si esprimono con le formule $x=a\cos hu$, $y=b\,\mathrm{sen}\,hu$, e la variabile u in logaritmi neperiani si calcola in funzione delle coordinate per l'equazione $u=\log(\mathrm{sen}\,hu+\cos hu)$. Si è veduto che nell'iperbole equilatera u rappresenta il doppio del settore AOU diviso per il quadrato del semi-asse $OA=p$, cioè $\mathrm{sett}\,h.\,AOU=\frac{p^2u}{2}$: il raggio centrale OU fa con l'asse Ox un angolo ω tale che $\tan g\,\omega=\frac{y}{x}=\mathrm{tang}\,hu$, e per conseguenza $\mathrm{sen}\,2\omega=\mathrm{tang}\,h2u$, $\cos 2\omega=\sec h.2u$, $\mathrm{tang}\,2\omega=\mathrm{sen}\,h.2u$ ec.; chiamando y_0, x_0 le coordinate del punto U_0 corrispondente all'argomento $2u$ si ha $\frac{y_0}{a+x_0}=\frac{\mathrm{sen}\,h\,2u}{1+\cos h\,2u}=\mathrm{tang}\,hu=\mathrm{tang}\,\omega$; dunque la A_1U_0 congiungente il punto U_0 con A_1 vertice a destra dell'asse trasverso, è parallela ad OU e resulta $\mathrm{sett}\,h.\,AOU_0=2\,\mathrm{sett}\,h\,AOU$; 2ω è l'angolo trascendente di Lambert.

Si descriva la parabola $y^2=2px$ e per uno stesso valore dell'ordinata sia V il punto di essa corrispondente al punto U dell'iperbole $x^2-y^2=p^2$; le coordinate del punto V saranno $VP=y=p\,\mathrm{sen}\,h\,u$, $x=\frac{p}{2}\mathrm{sen}^2\,hu$. La normale VN alla parabola fa con l'asse Ox un angolo φ dato dalla relazione $\mathrm{tang}\,\varphi=\frac{y}{p}=\mathrm{sen}\,hu$, cioè eguale alla longitudine iperbolica di u, pag. 42; si trova pure $VN=\frac{p}{\cos\varphi}=p\cos hu$, la terza altezza PL del triangolo rettangolo VPN ha per valore $\frac{VP.\,PN}{VN}=p\,\mathrm{tang}\,hu$; ed $LN=p\cos\varphi=p\sec hu$. Conducendo dal punto N della normale la NR parallela ad LP fino ad incontrare l'ordinata in R, si ottiene $PR=p\cot\varphi=p\,\mathrm{cosec}\,hu$, $NR=\frac{p}{\mathrm{sen}\,\varphi}=p\cot hu$; infine il segmento della tangente al punto V limitata fra il punto di contatto V ed il punto T d'intersezione con l'asse Oy ha per valore $VT=\frac{x}{\mathrm{sen}\,\varphi}=\frac{p}{2}\mathrm{sen}\,hu\cos hu=$ $=\frac{p}{4}\mathrm{sen}\,h\,2u$. Le variabili u e φ sono collegate dalla relazione $u=\log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$, pag. 42; e notando con $\widehat{OV}$ l'arco parabolico limitato fra il vertice O della curva ed il punto V si è trovato $\widehat{OV}-TV=\frac{p}{2}u$, (pag. 33, osservazione); si ha dunque la relazione $\mathrm{sett}.\,h\,AOU=p(\widehat{OV}-TV)$

ed i punti U, V sono determinati da uno stesso valore di u. Esempio. Si tirino nelle due curve le corde focali e perpendicolari all'asse comune Ox, l'ordinata del fuoco essendo eguale a p, si avrà $sen\,h u = 1$, $cos\,h u = \sqrt{2}$, $u = log\,(1 + \sqrt{2})$, e poichè nella parabola il segmento della tangente menato all'estremo dell'ordinata focale fino all'incontro dell'asse Oy è $\frac{p}{2}\sqrt{2}$, l'arco parabolico intercetto dalla corda focale sarà $p\,(\sqrt{2} + log(1 + \sqrt{2}))$: quindi il settore dell'iperbole equilatera compreso fra questa curva ed i raggi vettori congiungenti il centro con gli estremi della corda focale è eguale a $p^2\,log\,(1 + \sqrt{2})$; in generale l'arco parabolico sotteso dalla corda $2\,VP$ è $p\,(sen\,h u\,cos\,h u + u)$, ed il segmento iperbolico limitato dalla curva e la corda parallela a VP condotta per U, è $p^2\,(sen\,h u\,cos\,h u - u)$. Se fra le ampiezze u, u_1, u_2 si ha la relazione $u = u_1 + u_2$, ciò equivale all'eguaglianza geometrica $setth\,.\,AOU = setth\,.\,AOU_1 + setth\,.\,AOU_2$, per l'iperbole equilatera, ed $\widehat{OV} - (\widehat{OV_1} + \widehat{OV_2}) = TV - (TV_1 + TV_2)$ per la parabola. In generale si abbia $u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$, resulterà $setth\,AOU = \sum_{i=1}^{i=n} setth\,AOU_i$ per l'iperbole equilatera ed $\widehat{OV} - \sum_{i=1}^{i=n} \widehat{OV_i} = TV - \sum_{i=1}^{i=n} T_i V_i$ per la parabola; e l'equazione algebrica relativa è il valore della $tang\,h u$ in funzione di $tang\,h u_1$, $tang\,h u_2, \ldots\ldots$ o del seno ampiezza gudermanniana u in funzione dei seni ampiezze gudermanniane u_1, u_2, $u_3 \ldots$ pag. 43.

Se le ampiezze u_i sono tutte eguali si ha $u = n u_1$, nell'iperbole equilatera vi corrisponde $setth\,.\,AOU = n\,setth\,.\,AOU_1$, e le coordinate del punto U saranno $p\,sen\,h\,n u_1$, $p\,cos\,h\,n u_1$; mentre nella parabola sussisterà la relazione $\widehat{OV} - n\,\widehat{OV_1} = TV - n\,T_1 V_1 = \frac{p}{4}(sen\,h\,2 n u_1 - n\,sen\,h\,2 u_1)$; allorchè questa differenza è nulla si conchiude $\widehat{OV} = n\,\widehat{OV_1}$. Viceversa la moltisezione di un settore iperbolico, ovvero di un arco parabolico, dipende dal risolvere un'equazione algebrica dell' n^{sima} grado: infatti per determinare quest'ultima si sviluppi con la formula della potenza m^{sima} del binomio la relazione di Moivre $\left(cos\frac{u}{n} + i\,sen\frac{u}{n}\right)^n = cos\,u + i\,sen\,u$, quindi identificati nei due membri le parti reali ed i coefficienti di i si sostituiranno respettivamente i simboli $i\,sen\,h$, $cos\,h$ in luogo di sen e cos: così la trisezione di un settore iperbolico o di un arco parabolico di-

pende dal risolvere la cubica $sen\,h\,u = 4\left(sen\,h\frac{u}{3}\right)^3 + 3\left(sen\,h\frac{u}{3}\right)$, ovvero l'altra $cos\,h\,u = 4\left(cos\,h\frac{u}{3}\right)^3 - 3\,cos\,h\frac{u}{3}$, rispetto a $sen\,h\frac{u}{3}$, o $cos\,h\frac{u}{3}$, ec.(*)

Le formule di addizione delle funzioni iperboliche $sen\,h\,(u \pm v)$, $cos\,h\,(u \pm v)$, hanno una rappresentazione geometrica nella parabola; siano M, N due punti di questa curva situati da parti opposte dell' asse e condottevi le tangenti MA, NA, è noto che le proiezioni B, C del fuoco sulle tangenti medesime giacciono sulla tangente al vertice O, i quattro punti A, B, C, F sono sulla circonferenza il cui diametro è AF; se u e v sono le ampiezze che determinano i punti M, N', avendo preso nel senso OM l'arco ON' eguale ad NO, si troverà $OB = \frac{p}{2}\,sen\,h\,u$, $CO = \frac{p}{2}\,sen\,h\,v$, come metà delle ordinate dei punti M, N', e siccome

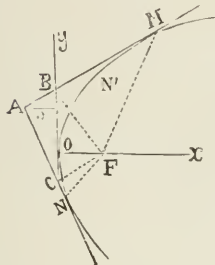



Fig. 14ª.

$OF = \frac{p}{2}$, si dedurrà $FB = \frac{p}{2}\cos h\,u$, $FC = \frac{p}{2}\cos h\,v$; inoltre i triangoli rettangoli OCF, ABF sono simili fra loro a motivo degli angoli BAF, BCF iscritti nello stesso segmento e però dalle proporzioni $\frac{AF}{FC} = \frac{BF}{FO} = \frac{AB}{CO}$, si ricavano $AF = \frac{p}{2}\cos h\,u\,\cos h\,v$, $AB = \frac{p}{2}\cos h\,u\,sen\,h\,v$, parimente dai triangoli simili ACF, OBF resulta $CA = \frac{p}{2}\cos h\,v\,sen\,h\,u$, e quindi $CA \pm AB = \frac{p}{2}\,sen\,h\,(u \pm v)$. Si noti con D la proiezione di A sulla CB, confrontando il triangolo ABD con il simile OBF si otterrà $AD = \frac{p}{2}\,sen\,h\,u\,sen\,h\,v$, e ne consegue la relazione $FA \pm AD = \frac{p}{2}\cos h\,(u \pm v)$.

La somma degli archi parabolici NO, OM, ha per espressione $\widehat{NM} = \frac{p}{2}(u + v + sen\,h\,u\,cos\,h\,u + sen\,h\,v\,cos\,h\,v)$; e poichè aggiungendo le tangenti $MB = \frac{p}{2}\cos h\,u\,sen\,h\,u$, $NC = \frac{p}{2}\cos h\,v\,sen\,h\,v$, con le rette BA, CA si trova

$$NA + AM = \frac{p}{2}\left[sen\,h\,u\,cos\,h\,u + sen\,h\,v\,cos\,h\,v + sen\,h\,(u + v)\right],$$

(*) Veggasi la recente opera del dott. SIEGMUND GÜNTHER, *Parabolische Logarithmen und Parabolische Trigonometrie*. Leipzig 1882.

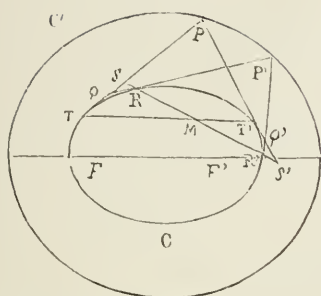
si conchiude $NA + AM - \widehat{NM} = -\frac{p}{2}\left[u + v - sen\,h\,(u + v)\right]$; menando la tangente al punto N' fino ad intersecare in A' la tangente MA si ottiene $N'A' + A'M - \widehat{N'M} = -\frac{p}{2}\left[u - v - sen\,h\,(u - v)\right]$.

Se la corda NM passa per il fuoco, gli angoli CFO, OFB eguali rispettivamente ad NFC, BFM sono complementari e si ha $CO\,.\,OB = \frac{p^2}{4}$, ovvero sostituendo i precedenti valori di CO, OB resulta $sen\,hv = \frac{1}{sen\,h\,u}$, da cui $cos\,hv = cot\,h\,u$ e $v = log\left(\frac{1 + cos\,hu}{sen\,h\,u}\right) = log\,cot\,h\,\frac{u}{2}$; onde l'arco intercetto dalla corda focale NM in funzione dell'ampiezza u del punto M, ha per misura $\frac{p}{2}\left(u + log\,cot\,h\,\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\,sen\,h\,2u + \frac{cos\,hu}{sen^2\,hu}\right)$.

Le funzioni iperboliche danno il modo di rappresentar pure con semplicità alcune curve trascendenti; per es., significando con x, y i rapporti delle coordinate ortogonali di ciascun punto della catenaria al parametro a, si ha l'equazione $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = cos\,h\,x$, l'arco limitato fra il punto più basso ed il punto (x, y) ha per valore $s = \int_0^x dx\,cos\,hx = sen\,h\,x$; quindi $y + s = e^x$, e si conchiude un altro significato geometrico del teorema di Moivre, cioè $y_n + s_n = (y + s)^n$, essendo y_n l'ordinata corrispondente all'ascissa $x_n = nx$, ed s_n l'arco della catenaria compreso fra l'asse Oy e l'ordinata y_n.

CAPO TERZO.

CONICHE OMOFOCALI.

Figª 15.

25. — Siano P e P', due punti infinitamente vicini di una ellisse c' e menate le coppie di tangenti (PT, PT') $(P'R, P'R')$ all' ellisse omofocale c, si notino con s ed s' gli archi da essi compresi, la retta PP' è tangente all' ellisse c' ed è bissettrice del supplemento dell' angolo TPT', onde ha per coniugata ramonica la bissettrice PM di quest' angolo rispetto ai lati TP, PT', dunque il polo della retta PP' nella conica c è il punto M intersezione di PM con la corda TT' polare di P e vi passerà pure la retta RR' polare di P'. Indicando con S ed S', i punti di sezione di questa corda RR' con le tangenti TP, PT' per il teorema di Menelao applicato alla trasversale SS' nel triangolo TPT' risulta l'eguaglianza $\frac{TS}{PS} \cdot \frac{PS'}{T'S'} \cdot \frac{T'M}{TM} = 1$, da cui $\frac{TS}{T'S'} = \frac{TM}{T'M} \cdot \frac{PS}{PS'}$, ed a motivo della bissettrice PM sostituendo al rapporto $\frac{TM}{T'M}$ l' equivalente $\frac{TP}{PT'}$ si ottiene $\lim \frac{TS}{T'S'} = \frac{TP^2}{T'P^2}$, e siccome i limiti di TS e $T'S'$ coincidono con i limiti degli archi infinitesimi TR, $R'T'$ si conchiude la relazione (1) $\frac{ds}{ds'} = \frac{TP^2}{T'P^2}$. Se le coordinate dei punti T e T', sono respettivamente $x_1 = a \operatorname{sen} \varphi$, $y_1 = b \cos \varphi$, $x_2 = a \operatorname{sen} \varphi'$, $y_2 = b \cos \varphi'$, l' equazioni delle tangenti PT, PT' saranno della forma $b \operatorname{sen} \varphi \,.\, x + a \cos \varphi \,.\, y = ab$, $b \operatorname{sen} \varphi' \,.\, x + a \cos \varphi' \,.\, y = ab$; dalle quali deduconsi le coordinate di P, cioè $x = \frac{a\,(\cos \varphi' - \cos \varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi - \varphi')}$, $y = \frac{b\,(\operatorname{sen} \varphi' - \operatorname{sen} \varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi' - \varphi)}$ e per conseguenza:

$$x - x_1 = \frac{b \operatorname{sen} \varphi\,[1 - \cos(\varphi - \varphi')]}{\operatorname{sen}(\varphi - \varphi')},\quad y - y_1 = \frac{a \cos \varphi\,[1 - \cos(\varphi - \varphi')]}{\operatorname{sen}(\varphi - \varphi')}.$$

Si ricavano facilmente i valori delle tangenti PT, PT', cioè:

$$PT = \frac{a[1 - \cos(\varphi - \varphi')]}{sen(\varphi - \varphi')}\Delta\varphi, \quad PT' = \frac{a[1 - \cos(\varphi - \varphi')]}{sen(\varphi - \varphi')}\Delta\varphi',$$

essendo $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 sen^2\varphi}$, e $k = \frac{c}{a}$. Si deduce la proporzione $\frac{PT}{PT'} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi'}$ e siccome $ds = a d\varphi \Delta\varphi$, $ds' = a d\varphi' \Delta\varphi'$, si trova ridursi l'eguaglianza (1) all'equazione differenziale $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}$, avente per integrale trascendente la relazione $F(k, \varphi') - F(k, \varphi) = F(k, \mu)$. — Dicasi P_0 il punto della conica c' corrispondente ai parametri $\varphi = o$, $\varphi' = \mu$, i valori delle coordinate di esso saranno $\frac{a(1 - \cos\mu)}{sen\,\mu}$, b; ora essendo c' omofocale a c, si notino i suoi semi-assi con $\sqrt{a^2 + \lambda}$, $\sqrt{b^2 + \lambda}$, si avrà la relazione $\frac{a^2(1 - \cos\mu)^2}{(a^2 + \lambda)sen^2\mu} + \frac{b^2}{b^2 + \lambda} = 1$, ovvero $\lambda^2(1 + \cos\mu) + 2\lambda a^2 \cos\mu - a^2 b^2(1 - \cos\mu) = o$, la cui radice positiva è $\lambda = \frac{a^2(\Delta\mu - \cos\mu)}{1 + \cos\mu}$, e quindi $a^2 + \lambda = \frac{a^2(1 + \Delta\mu)}{1 + \cos\mu}$, $b^2 + \lambda = \frac{b^2(1 + \Delta\mu)}{\cos\mu + \Delta\mu}$.

Si esprima la condizione che il punto P appartenga alla stessa ellisse del punto P_0, si avrà $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$, ovvero sostituendo i valori precedenti dei quadrati dei semi-assi e delle coordinate di P in funzione dei parametri angolari φ e φ' si troverà:

$$\left(\frac{1 + \cos\mu}{1 + \Delta\mu}\right)\left(\frac{\cos\varphi' - \cos\varphi}{sen(\varphi' - \varphi)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\mu + \cos\mu}{1 + \Delta\mu}\right)\left(\frac{sen\,\varphi' - sen\,\varphi}{sen(\varphi' - \varphi)}\right)^2 = 1,$$

che equivale alla

$$(1 + \cos\mu)\left[\frac{sen\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}\right]^2 + (\Delta\mu + \cos\mu)\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}\right]^2 = 1 + \Delta\mu.$$

Applicando le note formule goniometriche $\cos^2 b - sen^2 a = \cos(a + b) \times \cos(a - b)$, $\cos^2 b - \cos^2 a = sen(a + b)\,sen(a - b)$, la precedente relazione si ridurrà facilmente a quella di Lagrange, $\cos\mu = \cos\varphi\cos\varphi' + sen\,\varphi\,sen\,\varphi'\,\Delta\mu$.

Aggiungendo l'espressioni delle tangenti PT, PT' si ottiene:

$$PT + PT' = a\frac{[1 - \cos(\varphi - \varphi')]}{sen(\varphi - \varphi')}(\Delta\varphi + \Delta\varphi') = a[1 - \cos(\varphi - \varphi')]\frac{(1 + \Delta\mu)}{sen\,\mu}$$

a cagione della eguaglianza (8) pag. 48, in cui si è mutato il segno all'angolo φ' per ottenere la formula corrispondente alla sottrazione de-

gl' integrali ellittici di prima specie. Sostituendo al prodotto $\cos\varphi\cos\varphi'$, l' equivalente differenza $\cos\mu - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'\Delta\mu$, ricavata dal teorema di Lagrange, resulta $PT + PT' = a(1+\Delta\mu)\,tang\,\frac{1}{2}\mu - ak^2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}\mu$, e siccome l' arco ellittico TT' ha per valore $a\,E(k,\varphi') - a\,E(k,\varphi) = a\,E(k,\mu) - a\,k^2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}\mu$, si conchiude $PT + PT' -$ arco $TT' = a\,(1+\Delta\mu)\,tang\,\frac{1}{2}\mu - a\,E(k,\mu)$, ch' esprime il teorema di Graves:

« *Se da un punto di un' ellisse si tirano due tangenti ad un' ellisse omofocale, la differenza fra la somma delle tangenti e l' arco intercetto è costante.* » Fu dimostrato geometricamente per le coniche sferiche dall' autore nella sua *Translation of Chasles' Memoirs on Cones and Spherical Conics*, pag. 77.

La proposizione evidentemente sussiste per due parabole confocali ed aventi lo stesso asse; volendo fare la diretta dimostrazione, si assumerà per variabile l' angolo φ che l' asse Ox fa con la normale al punto T della parabola c di equazione $y^2 = 2px$; se P è il punto d' incontro delle tangenti TP, PT', si trova facilmente $TP = \frac{p}{2}\sec\varphi\,(tang\,\varphi' - tang\,\varphi)$, $PT' = \frac{p}{2}\sec\varphi'\,(tang\,\varphi' - tang\,\varphi)$, arco $TT' = \frac{p}{2}(tang\,\varphi'\sec\varphi' - tang\,\varphi\sec\varphi) - \frac{p}{2}[F(1,\varphi') - F(1,\varphi)]$. Ora se il punto P appartiene ad una parabola c' confocale alla precedente, conducendo dal punto P' di c', infinitamente vicino a P le due tangenti $P'R, P'R'$ posto $\widehat{TT'} = s, \widehat{RR'} = s'$, con lo stesso ragionamento si giunge all' equazione $\frac{ds}{ds'} = \frac{TP^2}{T'P^2} = \frac{\sec^2\varphi}{\sec^2\varphi'}$ e siccome per l' osservazione della pag. 33, si ha $ds = pd\varphi\sec^3\varphi$, si conchiude l' equazione differenziale $\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}$. Sia μ il valore di φ' per $\varphi = o$, sarà $F\varphi' - F\varphi = F\mu$, $tang\,\mu = tang\,\varphi'.\sec\varphi - tang\,\varphi.\sec\varphi'$, (pag. 43), e quindi in generale avendosi per le formule precedenti $TP + PT' - \widehat{TT'} = \frac{p}{2}(tang\,\varphi'\sec\varphi - tang\,\varphi\sec\varphi') + \frac{p}{2}(F\varphi' - F\varphi)$, nel caso che P sia un punto di una parabola coassiale e confocale alla $y^2 = 2px$, si avrà $TP + PT' - \widehat{TT'} = \frac{p}{2}(tang\,\mu + F\mu) = cost.$

Nell' anno 1841 l' illustre Mac-Cullagh dell' Università di Dublino avea dato la seguente proposizione:

La differenza delle tangenti menate da un punto di un' iperbole ad un' ellisse omofocale è eguale alla differenza degli archi compresi fra ciascun punto di contatto delle tangenti ed il punto comune alle due curve.

Rappresentando l' equazioni delle due coniche omofocali con $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, $\frac{X^2}{c^2 sen^2 \alpha}-\frac{Y^2}{c^2 cos^2 \alpha}=1$, le coordinate dei loro punti di sezione sono $x=\pm a\, sen\, \alpha$, $y=\pm a \sqrt{1-k^2}\,.\, cos\, \alpha$, ove $k=\frac{c}{a}$. I punti di contatto delle tangenti condotte dal punto P (X, Y) dell' iperbole all' ellisse abbiano i parametri angolari φ, φ' e siano collegati con l' angolo variabile ψ per l' equazioni integrali (1) $F\varphi=F\alpha-F\psi$, $F\varphi'=F\psi+F\alpha$ le coordinate di P si possono esprimere in funzione di ψ con le formule

$$X=\frac{a\, sen\, \alpha\, \Delta\, \psi}{cos\, \psi},\quad Y=\frac{a\, cos\, \alpha \sqrt{1-k^2}}{cos\, \psi}.$$

È facile verificare che la congiungente il punto P con quello T avente per coordinate $x=a\, sen\, \varphi$, $y=b\, cos\, \varphi$, tocca in questo punto l' ellisse: infatti l' equazione $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{a^2(1-k^2)}=1$, per i valori precedenti delle coordinate si riduce all' integrale algebrico (2) $cos\, \psi=cos\, \varphi\, cos\, \alpha+$ $+sen\, \varphi\, sen\, \alpha\, \Delta\, \psi$ dell' equazione differenziale $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}=o$; e per questa si ha pure (3) $cos\, \alpha=cos\, \varphi\, cos\, \psi-sen\, \varphi\, sen\, \psi\, \Delta\, \alpha$.

La lunghezza della tangente PT è determinata dalla formula:

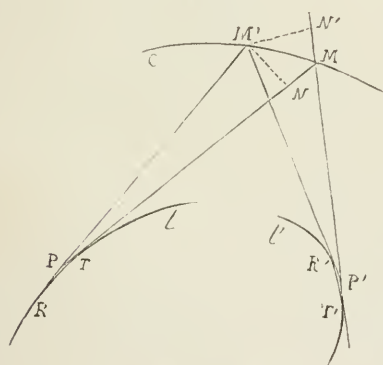
$$(4)\qquad PT^2=(X-x)^2+(Y-y)^2=a^2\left(\frac{sen\, \alpha\, \Delta\, \psi}{cos\, \psi}-sen\, \varphi\right)^2+$$
$$+a^2(1-k^2)\left(\frac{cos\, \alpha}{cos\, \psi}-cos\, \varphi\right)^2.$$

Ora dalla (3) risulta $cos\, \alpha-cos\, \varphi\, cos\, \psi=-sen\, \varphi\, sen\, \psi\, \Delta\, \alpha$, ed inoltre eliminando $cos\, \alpha$ fra le medesime relazioni (2), (3) si ottiene $cos\, \psi\, sen\, \varphi$ $-sen\, \alpha\, \Delta\, \psi=-cos\, \varphi\, sen\, \psi\, \Delta\, \alpha$, con semplice calcolo la (4) diviene $PT=a\, tang\, \psi\, \Delta\, \alpha\, \Delta\, \varphi$, e similmente cambiando φ in φ', ed il segno all' angolo ψ si troverebbe $PT'=a\, tang\, \psi\, \Delta\, \alpha\, \Delta\, \varphi'$. Mediante le note relazioni (V) della pag. 37, avendosi $\Delta\, \varphi'=\frac{\Delta\, \alpha\, \Delta\, \psi-\frac{k^2}{4}\, sen\, 2\, \alpha\, sen\, 2\, \psi}{1-k^2\, sen^2\, \alpha\, sen^2\, \psi}$, mutando φ' in φ, ψ in $-\psi$ si ha $\Delta\, \varphi=\frac{\Delta\, \alpha\, \Delta\, \psi+\frac{k^2}{4}\, sen\, 2\, \alpha\, sen\, 2\, \psi}{1-k^2\, sen^2\, \alpha\, sen^2\, \psi}$, si conchiude:

(5) $PT-PT'=\frac{a\, k^2\, sen\, 2\, \alpha\, sen^2\, \psi}{1-k^2\, sen^2\, \alpha\, sen^2\, \psi}$. Se M è l' intersezione dell' iperbole con l' ellisse, compreso fra i punti T e T', corrispondente al parametro

angolare α si avrà $\widehat{TM} = a\,E\varphi - a\,E\alpha = a\,E\psi - (a\,E\alpha + a\,E\psi - a\,E\varphi)$; ed applicando la relazione (XI), pag. 39, si troverà $\widehat{TM} = a\,E\psi - a k^2 sen\,\alpha \times sen\,\varphi\, sen\,\psi$; con lo stesso metodo $\widehat{MT'} = a\,E\psi - a\,k^2\, sen\,\alpha\, sen\,\varphi'\, sen\,\psi$: per conseguenza (6) $\widehat{TM} - \widehat{MT'} = a\,k^2\, sen\,\alpha\, sen\,\psi\,(sen\,\varphi' - sen\,\varphi) = \frac{a\,k^2\, sen\,2\,\alpha\, sen^2\,\psi}{1 - k^2\, sen^2\,\alpha\, sen^2\,\psi}$. Confrontando le relazioni (5), (6) si conchiude: $\widehat{TM} - \widehat{MT'} = PT - PT'$, che dimostra il teorema enunciato.

26. — I teoremi di Graves e di Mac-Cullagh si posson derivare dal metodo di trasformazione delle curve chiamato *coevoluzione* dal sommo filosofo Goffredo Guglielmo Leibnitz, nato il 3 luglio 1646 a Lipsia e morto il 14 novembre 1716 in Annover. (*) Date una linea l raggiante per le sue tangenti TM ed un' altra linea c che incontrando ciascuna di queste, le refranga secondo la legge di Snellius, si avrà per inviluppo dei raggi refratti MT' una nuova curva l' denominata la caustica di l rispetto alla linea refrangente.

Fig. 16ª.

Si consideri un altro punto M' di c vicinissimo ad M, sia RM' il raggio incidente ed $M'R'$ il refratto, dicansi P il punto d' intersezione delle tangenti RM', TM e P' quello delle rette $M'R'$, MT'; facendo centro nei punti P e P' con i rispettivi raggi PM', $P'M'$ descrivansi gli archi circolari $M'N$, $M'N'$, dai triangoli infinitesimi NMM', $M'MN'$ rettangoli in N ed N', si deduce:

$$\frac{\cos M'MN}{\cos M'MN'} = \frac{NM}{MN'} = \frac{PM - PM'}{P'M' - P'M} =$$

$$= \frac{PT + TM - (RM' - RP)}{P'R' + R'M' - (T'M - T'P')} = \frac{(RP + PT) + (TM - RM')}{(T'P' + P'R') + (R'M' - T'M)}.$$

Indicando k il rapporto costante dei coseni degli angoli formati dalla tangente $M'M$ alla curva c, con le direzioni dei raggi $MT = t$, $T'M = t'$, esprimendo con i differenziali dl, dl' gli archi infinitesimi RT, $R'T'$, la precedente relazione al limite diviene $k = \frac{dl + dt}{dl' + dt'}$; perciò contando gli archi da due punti fissi delle curve l, l' si trova integrando $l + t = k\,(l' + t') + cost.$

(*) *Commercium philosophicum* etc. *Epistola* CXLIII *Leibnitii ad Bernoullium, Hanoveræ 3 Januarii 1704. Methodus transformandi curvas ex principio optico.*

Allorchè si ha $k = -1$, il raggio refratto diviene riflesso, e se inoltre le due linee date l, c sono due ellissi omofocali, l' sarà la stessa curva l e ne risulta il teorema di Graves; quando si abbia $k = 1$, c sia un' iperbole omofocale ed l un' ellisse, e l' origine degli archi si ponga nel punto di sezione delle due coniche, si avrà la proposizione di Mac-Cullagh. — Nel caso particolare della riflessione Giovanni Bernoulli in una lettera di risposta a Leibnitz diè una semplice formula per determinare la lunghezza di ciascun raggio riflesso. S' immagini descritto il circolo osculatore alla curva c nel punto M e segante la curva nel punto vicinissimo M', i raggi incidenti MP, $M'P$ incontrino la detta circonferenza nei secondi punti di sezione F, F' ed i raggi riflessi $MP, M'P'$ nei punti G, G'; se O è il centro del cerchio osculatore, le rette PM, MP' fanno uno stesso angolo i con il raggio $OM = \rho$, e così pure le rette $PM', M'P'$ sono egualmente inclinate al raggio $M'O$; onde fra gli archi sottesi da queste corde si hanno l'eguaglianze $\widehat{MM'F} = \widehat{GG'M}$, $\widehat{M'FF'} = \widehat{G'MM'}$; e da queste sottratte membro a membro si ricava $\widehat{MM'} - \widehat{FF'} = \widehat{GG'} - \widehat{MM'}$, ovvero (1) $\widehat{FF'} + \widehat{GG'} = 2\widehat{MM'}$. Dai triangoli simili PMM', PFF' resulta la proporzione $\frac{FF'}{MM'} = \frac{PF'}{MP}$, ed al limite il punto P coincidendo con T, si deduce $lim \frac{\widehat{FF'}}{\widehat{MM'}} = lim \frac{PF'}{MP} = \frac{TF}{MT}$ e similmente si ottiene $lim \frac{\widehat{GG'}}{\widehat{MM'}} = lim \frac{P'G}{MP'} = \frac{T'G}{MT'}$: quindi in virtù della (1) si conchiude $\frac{TF}{MT} + \frac{T'G}{MT'} = 2$, la quale a motivo delle eguaglianze $TF = MF - MT$, $T'G = MG - MT' = MF - MT'$, si riduce ad $\frac{MF}{MT} + \frac{MF}{MT'} = 4$; siccome $MF = 2\rho \cos i$, $MT = t$, $T'M = t'$, dalla precedente si avrà $t' = \frac{\rho t \cos i}{2t - \rho \cos i}$: il raggio MT' sarà asintoto alla curva l' quando risulti $\rho = \frac{2t}{\cos i}$, ec.

27. — Il celebre geometra Michele Chasles (nato ad Epernon nel dipartimento di Eure-et-Loire, il 15 novembre 1793 e morto in Parigi il 18 dicembre 1880), enunciò nei *Comptes Rendus* dell' anno 1843 eleganti proprietà delle coniche omofocali; chiamò *simili* (associati o corrispondenti) *due archi di una conica c, se la loro differenza è eguale alla somma dei lati dell' angolo circoscritto al primo, meno la somma dei lati dell' an-*

golo circoscritto al secondo arco; i vertici di questi angoli sono situati sopra una conica c' omofocale alla prima c. — Dal punto esterno P condotte le tangenti PT, PT'' all'ellisse, abbiasi per ipotesi $TP + PT''$ — arco $TT'' =$ costante; se φ e φ' sono i parametri angolari dei punti T, T'', risultano le relazioni $PT = a \, tang \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\Delta\varphi$, $PT'' = a \, tang \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\Delta\varphi'$, arco $TT'' = a E\varphi' - a E\varphi$, e siccome per ipotesi $d(TP + PT'') = d\,\widehat{TT''}$, sostituendovi l'espressioni precedenti si ricava l'eguaglianza:

$$k^2 sen(\varphi' - \varphi)\left(sen\,\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + sen\,\varphi'\cos\varphi'\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}\right) + (d\varphi - d\varphi')(\Delta\varphi + \Delta\varphi') -$$

$(d\varphi'\Delta\varphi' - d\varphi\Delta\varphi)[1 + \cos(\varphi' - \varphi)]$: la quale è identicamente soddisfatta per $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}$, ed indicando con μ il valore di φ' per $\varphi = o$, si ha l'integrale $\cos\mu = \cos\varphi\cos\varphi' + sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\Delta\mu$. Se, (X, Y), (x', y'), (x'', y'') rappresentano respettivamente le coordinate dei punti P, T, T'', si avranno le relazioni $\frac{a^2(b^2 - Y^2)}{a^2Y^2 + b^2X^2} = \frac{x'x''}{a^2} = sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$, $\frac{b^2(a^2 - X^2)}{a^2Y^2 + b^2X^2} = \frac{y'y''}{b^2} = \cos\varphi\cos\varphi'$;

perciò la surriferita equazione integrale assume la forma:

$$(a^2Y^2 + b^2X^2)\cos\mu = a^2(b^2 - Y^2)\Delta\mu + b^2(a^2 - X^2),$$

che si può scrivere ancora $\frac{X^2(1 + \cos\mu)}{a^2(1 + \Delta\mu)} + \frac{Y^2}{b^2}\frac{(\cos\mu + \Delta\mu)}{(1 + \Delta\mu)} = 1$: e ne risulta l'identità:

$$a^2\frac{(1 + \Delta\mu)}{1 + \cos\mu} - b^2\left(\frac{1 + \Delta\mu}{\cos\mu + \Delta\mu}\right) = \frac{(a^2 - b^2)(\cos\mu + \Delta\mu\cos\mu + \Delta\mu) + (\Delta\mu)^2 - b^2}{(1 + \cos\mu)(\cos\mu + \Delta\mu)}$$

$= a^2 - b^2$. Viceversa date le due ellissi omofocali $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$, si potrà determinare l'angolo μ in funzione di λ scrivendo: $a^2 + \lambda = \frac{a^2(1 + \Delta\mu)}{1 + \cos\mu}$, $b^2 + \lambda = \frac{b^2(1 + \Delta\mu)}{\cos\mu + \Delta\mu}$; dalle quali eliminando $\Delta\mu$ risulta $\cos\mu = \frac{a^2b^2 - \lambda^2}{a^2b^2 + 2a^2\lambda + \lambda^2}$, ec.

Dicansi (φ, φ'), (φ'', φ''') i parametri angolari degli estremi degli archi corrispondenti TT', RR' si ha la relazione $F\varphi - F\varphi' = F\varphi'' - F\varphi'''$; da cui si deduce $F\varphi - F\varphi'' = F\varphi' - F\varphi'''$; dunque gli archi TR, $T'R'$ sono pure corrispondenti, onde i vertici Q e Q' dei loro angoli circoscritti giacciono sopra una conica omofocale, fig. 15, come si è già veduto accadere per i vertici P, P' degli angoli circoscritti agli archi TT', RR'. Dall'eguaglianze $TP + PT' - \widehat{TT'} = RP' + P'R' - \widehat{RR'}$, $TQ + QR - \widehat{TR} = T'Q' + Q'R' - \widehat{T'R'}$, si deduce la relazione $TP + PT$ —

$-(RP'+P'R') = TQ + QR - (T'Q' + Q'R')$, ovvero $QP + PQ' = QP' + P'Q'$, cioè nel quadrilatero $QPQ'P'$, le differenze dei lati opposti sono eguali, dunque *le tangenti condotte agli estremi di due archi associati formano un quadrilatero circoscrittibile ad un cerchio.* — Se gli archi associati TM, MT' hanno un estremo comune M ed in questo punto si tira la tangente che seghi nei punti Q e Q' le tangenti TP, PT' menate agli altri estremi T, T', saranno i punti Q, Q' situati sopra una conica omofocale; le tangenti ad essi QI, $Q'I$ saranno bissettrici dei supplementi degli angoli TQM, $MQ'T'$ e s'intersecheranno in un punto I, polo della corda QQ', la retta IM è normale a questa corda, poichè se (x_0, y_0), (x_1, y_1) sono respettivamente le coordinate dei punti M, I, l'equazione della retta QQ', come tangente all'ellisse TMT', sarà $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$; ovvero come polare di I nell'ellisse omofocale QQ', avrà la forma $\frac{xx_1}{a^2+\lambda_1} + \frac{yy_1}{b^2+\lambda_1} = 1$, e quindi $x_1 = \left(1+\frac{\lambda_1}{a^2}\right)x_0$, $y_1 = \left(1+\frac{\lambda_1}{b^2}\right)y_0$: inoltre il coefficiente angolare della retta IM essendo $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$, si conchiude che ha un valore inverso e di segno opposto a quello della retta QQ'; così il cerchio iscritto nel triangolo QPQ' ha il punto I per centro ed IM per raggio. Ora dall'ipotesi $TQ + QM - \widehat{TM} = MQ' + Q'T' - \widehat{MT'}$ si ricava $\widehat{TM} - \widehat{MT'} = TQ + QM - (MQ' + Q'T') = TP - PT'$, poichè per le proprietà del cerchio iscritto la differenza $QM - MQ'$ è identica alla differenza $QP - PQ'$: dunque *se due archi associati hanno un estremo comune, la loro differenza è eguale a quella delle tangenti condotte agli altri estremi e terminate al loro punto d'incontro; nell'angolo formato da queste tangenti si può iscrivere un circolo che tocca la conica nell'estremo comune degli archi associati,* e pel teorema di Mac-Cullagh *l'iperbole omofocale all'ellisse e descritta per questo punto passa per il vertice dell'angolo circoscritto.*

Anche nella parabola $y^2 = 2px$, la relazione $TP + PT' - \widehat{TT'} = cost$: differenziata si riduce all'equazione $\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}$, il cui integrale è $F\varphi' - F\varphi = F\mu$, essendo l'ampiezza μ data, pag. 43, da $\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{1 - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'}$ ovvero $\cos\mu\left(\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\varphi)(1+\operatorname{tang}^2\varphi')} - \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'\right) = 1$, onde indicando con le variabili x, y le coordinate di P, a motivo delle relazioni $\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi' = \frac{2y}{p}$, $\operatorname{tang}\varphi . \operatorname{tang}\varphi' = \frac{2x}{p}$, $\operatorname{tang}^2\varphi + \operatorname{tang}^2\varphi' =$

$\frac{4(y^2-px)}{p^2}$, si deduce $y^2 = px(1+sec\,\mu) + \frac{p^2}{4} tang^2\,\mu$, ovvero:

$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2} sec\,\mu\right)^2$, che è una parabola confocale alla proposta ed avente per direttrice $x = -\frac{p}{2} sec\,\mu$.

Questi teoremi di Chasles ci conducono a semplici costruzioni degli archi delle coniche a differenza rettificabile; così per dividere un dato arco NN' di una linea di second'ordine c in due archi corrispondenti, basterà condurre le tangenti $NP, N'P$ agli estremi N, N' e per il punto P descrivere una conica omofocale c' alla data, l'intersezione M di c' con l'arco NN' risolverà il quesito.

Il problema 2° di Euler, pag. 44, diviene un caso particolare del precedente; infatti essendo dati in posizione il diametro DD' ed il suo coniugato EE', si descriva l'iperbole omofocale all'ellisse ed avente per asintoto la retta EE', l'intersezione M dell'iperbole con la semi-ellisse DMD' divide questa in due archi associati, poichè chiamando G la proiezione ortogonale del punto D' sulla tangente in D e P_∞ il punto all'infinito del diametro EE' e delle tangenti negli estremi D, D', si avrà $\widehat{DM} - \widehat{MD'} = DP_\infty - P_\infty D' = GD$, giungendo alla stessa conchiusione di Euler, cioè *la differenza degli archi associati DM, MD' eguaglia la proiezione del diametro DD' sul coniugato.* Similmente dati tre punti M, N, M' di una conica c, per costruire il punto N', tale che gli archi MN, $M'N'$ siano corrispondenti, si condurranno le tangenti $MP, M'P$ e per il loro punto comune P si descriverà la conica c' omofocale alla c; sia P' il punto d'incontro della tangente alla conica c in N con la c', basterà tirare da P' la seconda tangente $P'N'$ alla curva c e si avrà l'altro estremo N' del secondo arco associato.

Nei *Comptes Rendus* dell'anno 1844, Chasles insegnò a costruire tutti i sistemi di ampiezze φ, φ' corrispondenti alle due funzioni $F\varphi$, $F\varphi'$ dello stesso modulo k e la cui somma o differenza eguagli costantemente quella delle due date funzioni $F\alpha$, $F\alpha'$. Descrivasi un'ellisse col semi-asse maggiore arbitrario a, e la semi-distanza focale $c = ak$; indi a partire dal vertice B del semi-asse minore si prendano gli archi BD, BD' corrispondenti alle ampiezze α, α' e per il punto d'incontro P delle tangenti ai punti D, D' si faccia passare una conica c' omofocale alla prima; se da un punto qualunque P' di c' si tirino le tangenti $P'M$, $P'M'$ alla ellisse c i due archi BM, BM' avranno le loro ampiezze φ, φ' che soddisfano al quesito; infatti se la conica c' è pure un'ellisse, gli archi DD', MM' hanno la loro differenza rettificabile e per conseguenza $E\varphi - E\varphi' = E\alpha - E\alpha' + \frac{l}{a}$, essendo l una quantità algebrica e vi cor-

risponderà l'equazione $F\varphi - F\varphi' = F\alpha - F\alpha'$; in particolare dato φ', è dato l'arco BM', si potrà costruire l'arco BM e quindi trovare la sua ampiezza φ. Se invece la conica c' è un'iperbole, notato con H il suo punto di sezione con l'arco DD', dall'eguaglianza $\widehat{DH} - \widehat{HD'} = DP - PD' = l$, si ricava $\widehat{BH} - \widehat{BD} - (\widehat{BD'} - \widehat{BH}) = l$, ovvero $\widehat{BD} + \widehat{BD'} = 2\widehat{BH} - l$. e similmente per i punti M, M' si ha $\widehat{BM} + \widehat{BM'} = 2\widehat{BH} - l'$; dalle quali si deduce $\widehat{BM} + \widehat{BM'} = \widehat{DB} + \widehat{BD'} + l - l'$, o ciò che è lo stesso, l'equazione $E\varphi + E\varphi' = E\alpha + E\alpha' + \frac{l - l'}{a}$, ed a questa vi corrisponde la relazione $F\varphi + F\varphi' = F\alpha + F\alpha'$; se α_0 è l'ampiezza del punto H, sarà $F\alpha_0 = \frac{1}{2}(F\alpha + F\alpha')$ ec. Nel caso delle due ellissi omofocali s'iscriva nella esterna c' una linea poligonale $PP_1P_2P_3 \ldots . P_nP_{n+1}$, di $n+1$ lati tangenti all'ellisse c nei punti determinati dalle successive ampiezze $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \ldots \varphi_n$; per ciò che si è dimostrato si avranno l'eguaglianze $F\alpha' - F\alpha = F\varphi_1 - F\varphi = F\varphi_2 - F\varphi_1 = \ldots . = F\varphi_n - F\varphi_{n-1}$. e quindi aggiungendole risulta $F\varphi_n - F\varphi = n(F\alpha' - F\alpha)$; φ e φ_n sono le ampiezze dei punti di contatto dei lati estremi PP_1, P_nP_{n+1}: allorchè si prende $\varphi = o$, il primo lato è tangente all'ellisse c nel vertice B, sarà $F\varphi_n = n(F\alpha' - F\alpha)$ e se anche α è nullo si ridurrà la precedente a $F\varphi_n = nF\alpha'$; così ricavasi un metodo per costruire l'ampiezza di un integrale ellittico n^{uplo} di un altro dato. — Ritornando alla relazione generale $F\varphi_n = nF\mu + F\varphi$, si supponga che il lato $(n+1)^{simo}$ della linea poligona debba coincidere col primo, è chiaro dovrà aversi $\varphi_n = \varphi + 2\pi h$ essendo h un numero intero positivo; e poichè gli elementi dell'integrale ellittico di prima specie riprendono gli stessi valori quando la variabile φ cresce in modo continuo per ogni quadrante a motivo della relazione $sen^2(\pi m \pm \varphi) = sen^2\varphi$, si avrà $F\varphi_n = F\varphi + hF2\pi = F\varphi + 4hF\frac{\pi}{2}$; la quale paragonata con la precedente dà la condizione necessaria e sufficiente $nF\mu = 4hF\frac{\pi}{2}$; dunque osservando esser l'angolo μ indipendente da φ, cioè dal punto di contatto del primo lato, si conchiude *esistere un' infinità di poligoni di n lati circoscritti all' ellisse c ed iscritti nell' ellisse omofocale c'*, in modo che qualunque corda di questa tangente alla prima si può considerare come primo lato di uno dei poligoni; chiamando φ_i l'ampiezza del punto di contatto, (x_1, y_1). (x_2, y_2) le coordinate dei suoi punti di sezione con l'ellisse esterna, queste si avranno risolvendo il sistema $ay\cos\varphi_i + bx\,sen\varphi_i = ab$; $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$: e siccome $P_iP_{i+1} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = \pm(x_1 - x_2)\frac{\Delta\varphi_i}{\cos\varphi_i}$, ed inol-

tre eliminando y dal sistema si trova $x_1 + x_2 = \frac{2\,b^2 (a^2 + \lambda)\, sen\, \varphi i}{a\,(b^2 + \lambda\,(\Delta\, \varphi i)^2)}$,

$$x_1 x_2 = \frac{(a^2 + \lambda)(b^2 - (b^2 + \lambda)\cos^2 \varphi i)}{b^2 + \lambda\,(\Delta\, \varphi i)^2},\ \pm(x_1 - x_2) = \frac{2 \cos \varphi i \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda}}{b^2 + \lambda\,(\Delta\, \varphi i)^2} . \Delta\, \varphi i$$

e per conseguenza $P_i\, P_{i+1} = \frac{2\sqrt{(a^2 + \lambda)\,(b^2 + \lambda)\,\lambda}}{b^2 + \lambda\,(\Delta\, \varphi i)^2}\,(\Delta\, \varphi i)^2$; si potrà esprimere λ in funzione di μ mediante le formule della pag. 72; il perimetro del poligono ha per valore

$$p = 2\sqrt{(a^2 + \lambda)\,(b^2 + \lambda)\,\lambda}\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(\Delta\, \varphi i)^2}{b^2 + \lambda\,(\Delta\, \varphi i)^2}.$$

Applicando i teoremi del grande geometra Jacob Steiner si conchiude che *fra tutti i poligoni convessi di n lati iscritti in un' ellisse, quelli che sono circoscritti ad un' ellisse omofocale hanno il perimetro massimo; questi poligoni in numero infinito sono isoperimetri. Viceversa ogni poligono di n lati a minimo perimetro e circoscritto ad un' ellisse ha i suoi vertici situati sopra una conica omofocale.* Per $h = 1, n = 4$ risulta $\mu = \frac{\pi}{2}$, la costruzione geometrica conduce all' equazione $\frac{a^2}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2}{b^2 + \lambda} = 1$, da cui $\lambda = ab$ ed i semi-assi dell' ellisse omofocale sono $\sqrt{a\,(a + b)}$, $\sqrt{b\,(a + b)}$. Per $n = 3$ prendendo uno dei vertici del triangolo circoscritto di minimo perimetro sull' asse Oy', le sue coordinate essendo $y_1 = -\sqrt{b^2 + \lambda}$, $x_1 = o$, dall' equazione $a y_1 \cos \mu + b x_1\, sen\, \mu = ab$ del lato che passa per quel vertice, si deduce $\cos \mu = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + \lambda}}$, e siccome alla pag. 76, si è trovato pure $\cos \mu = \frac{a^2 b^2 - \lambda^2}{a^2 b^2 + 2 a^2 \lambda + \lambda^2}$, eguagliando i due valori di $\cos \mu$, ne risulta l'equazione biquadratica $\lambda^4 - 6\, a^2 b^2 \lambda^2 - 4\, a^2 b^2 (a^2 + b^2)\, \lambda - 3\, a^4 b^4 = o$. Notando con $\sqrt{m}$ il rapporto $\frac{a}{b}$ e facendo $\lambda = b^2 x$, la precedente equazione diviene $x^4 - 6\, m x^2 - 4\, m\,(m + 1)\, x - 3\, m^2 = o$, che equivale ad $(x^2 - 3\, m + y)^2 = 2\, y\, x^2 + 4\, m\,(m + 1)\, x + y^2 - 6\, m y + 12\, m^2$, ed il secondo membro sarà un quadrato perfetto se l' indeterminata y soddisfa alla condizione $(y - 2\, m)^3 = 2\, m^2 (m - 1)^2$, da cui $y = 2\, m + \sqrt[3]{2\, m^2 (m - 1)^2}$, così per $m = 2$ si trova $y = 6$ e l' equazione di quarto grado in x ha il primo membro decomponibile nei trinomi $(x^2 + 2\sqrt{3}\,.\,x - 2\sqrt{3})$, $(x^2 - 2\sqrt{3}\,.\,x + 2\sqrt{3})$; il primo soltanto ha le radici reali e prendendo la positiva resulta $\lambda = b^2\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)$.

28. — Il simbolo θ indichi l'angolo acuto della tangente al punto $T(x = a\,sen\,\varphi,\ y = b\cos\varphi)$ con l'asse minore dell'ellisse, facilmente si dimostra la relazione $tang\,\theta \,.\, tang\,\varphi = \frac{a}{b}$; dalla quale resultano $sen\,\varphi = \frac{\cos\theta}{\Delta\theta}$, $\Delta\varphi.\Delta\theta = \sqrt{1-e^2}$, e $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\theta}{\Delta\theta} = o$, ove $k = \frac{c}{a} = e$; osservando poi che per $\varphi = o$ si ha $\theta = \frac{\pi}{2}$, gli angoli θ e φ saranno le ampiezze degl'integrali ellittici $F\varphi$, $F\theta$ aventi per somma l'integrale completo $F\frac{\pi}{2}$; dunque se abbiasi $F\varphi' \pm F\varphi = cost.$, si conchiuderà pure $F\theta' \pm$ $\pm F\theta = cost.$ e ne deriverà la proposizione (1) *le tangenti PT, PT' menate da un punto qualunque P di una conica ad un' ellisse omofocale fanno con l' asse minore di questa due angoli θ, θ' che soddisfano alla relazione* (1) $\cos\theta \,.\, \cos\theta' \pm sen\,\theta\; sen\,\theta'\,\Delta\mu = \cos\mu$. Chiamando ψ l'inclinazione di un raggio vettore focale $F'T$ del contatto sull'asse maggiore, ed abbassate dai fuochi le normali $F'H'$, FH sulla tangente al punto T, è evidente che ciascuna di esse forma con FF' un angolo eguale a quello θ dell'asse minore con la tangente, e le rette FT, $F'H'$ prolungate si segano in un punto N tale che $FN = 2a$, l'angolo $F'NF = NF'T = \pm$ $\pm(\theta - \psi)$, il triangolo $F'NF$ ci somministra la proporzione $F'F$: $: FN :: sen\,\widehat{F'NF} : sen\,\widehat{FF'N}$, ovvero: $\pm sen(\psi - \theta) = e\,sen\,\theta$ che è la sostituzione di Landen e posto $h = \frac{2\sqrt{e}}{1+e}$, prendendo il segno superiore nella precedente eguaglianza, si trova $F\left(h, \frac{\psi}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{2}\right) F(e, \theta)$ e nel caso del segno inferiore $-F\left(h, \frac{\pi - \psi}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{2}\right) F(e, \theta)$; onde se abbiasi $F\theta \pm F\theta' = cost.$ sarà pure $F\left(h, \frac{\psi'}{2}\right) \pm F\left(h, \frac{\psi}{2}\right) = cost.$; dunque si conchiude il teorema (2) *se da un punto qualunque di una conica si menano due tangenti PT, PT' ad un' ellisse omofocale, i raggi vettori congiungenti un fuoco F' con i punti di contatto T, T' fanno con l' asse maggiore gli angoli ψ, ψ' collegati dall' equazione*

$$\text{(II)} \quad \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi'}{2} \pm sen\frac{\psi}{2}\,sen\frac{\psi'}{2}\sqrt{1 - \frac{4e}{(1+e)^2}sen^2\frac{\mu}{2}} = \cos\frac{\mu}{2}.$$

Proiettando il raggio vettore $F'T$ sull'asse $2a$ si ottiene $tang\,\psi = \frac{b\cos\varphi}{a\,sen\,\varphi + c}$, ed unendo l'altro fuoco F al punto L intersezione della

tangente con l' asse minore, detto ν l' angolo FLT, dai valori $OL = \frac{b}{\cos\varphi}$, $FL = \frac{a\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}}{\cos\varphi}$, $FH = b\sqrt{\frac{1 - e\, sen\,\varphi}{1 + e\, sen\,\varphi}}$, si ricavano:

$LH = \frac{(c + a\, sen\,\varphi)}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{1 - e\, sen\,\varphi}{1 + e\cos\varphi}}$, $tang\,\nu = \frac{b\cos\varphi}{a\, sen\,\varphi + c}$, e quindi $\nu = \psi$;

dunque dalla proposizione (2) consegue il teorema (3) *se da un punto qualunque di una conica si menano le tangenti PT, PT' ad una ellisse omofocale, i raggi congiungenti un fuoco F con i punti di sezione dell' asse minore con le tangenti fanno con queste rette due angoli ν, ν', che soddisfano alla relazione* (III) $\cos\frac{1}{2}\nu\cos\frac{1}{2}\nu' \pm sen\frac{1}{2}\nu\, sen\frac{1}{2}\nu'\sqrt{1 - \frac{4e}{(1+e)^2} sen^2\frac{1}{2}\nu} = \cos\frac{\mu}{2}$.

29. — Chasles trasformò le surriferite proposizioni mediante la teoria delle polari reciproche; infatti si prenda per origine o polo uno dei fuochi, per es. F' e per linea direttrice la circonferenza (1) $x^2 + y^2 = r^2$, la polare di un punto qualunque (x', y') dell'ellisse (2) $\frac{(x' - c)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, rispetto al cerchio direttore, ha per equazione (3) $xx' + yy' = r^2$; considerando x', y' come parametri variabili per differenziazione delle (2), (3) si deducono le eguaglianze $\frac{(x' - c)\,dx'}{a^2} + \frac{y'dy'}{b^2} = o$, $xdx' + ydy' = o$, fra le quali eliminando la derivata $\frac{dy'}{dx'}$ risulta $\frac{a^2 x}{x' - c} = \frac{b^2 y}{y'} = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}$; e da questi rapporti si ottengono i valori di x', y' che sostituiti nella (3) ci determinano l' equazione dell' inviluppo delle rette polari, cioè: (4) $(x^2 + y^2)(a^2 - c^2) + 2cr^2 x - r^4 = o$, circonferenza c polare reciproca dell'ellisse (2) e mutando a^2 in $a^2 + \lambda$ si avrà la circonferenza c' (5) $(x^2 + y^2)(a^2 + \lambda - c^2) + 2cr^2 x - r^4 = o$, polare reciproca della conica (6) $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$, omofocale alla (2).

Siano $A'A$, $D'D$ gli assi delle coniche (2), (6) situati sulla retta focale ed $A'_0 A_0$, $D'_0 D_0$ i diametri corrispondenti delle circonferenze polari c, c'; gli estremi del primo giacciono da parti opposte dell' origine F' e si avrà $A'_0 F' = \frac{r^2}{A'F'} = \frac{r^2}{a - c}$, $F'A_0 = \frac{r^2}{F'A} = \frac{r^2}{a + c}$, e parimente $D'_0 F' = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + \lambda} - c}$, $F'D_0 = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + \lambda} + c}$; nel caso di $\lambda > c^2 - a^2$, cioè

la conica (6) sia un'ellisse, la circonferenza c' sarà entro la c se λ è positivo, ed il caso opposto se λ è negativo; infine se λ è negativo ed il suo valore assoluto supera $a^2 - c^2$, la conica (6) è un'iperbole e si avrà $F'D' = c - \sqrt{a^2 + \lambda}$, $F'D = c + \sqrt{a^2 + \lambda}$, il cerchio corrispondente c' sarà tutto esterno al cerchio c.

La polare di un punto (x_0, y_0) del piano rispetto ad una delle circonferenze reciproche (5) essendo $(xx_0 + yy_0)(a^2 + \lambda - c^2) + cr^2(x + x_0) - r^4 = o$, si ridurrà per l'origine F', le cui coordinate sono nulle, all'equazione $x = \frac{r^2}{c}$ e similmente la polare del punto $F_0\left(x = \frac{r^2}{c}, y = o\right)$ è $x = o$, cioè passa per l'origine; dunque i punti F', F_0 sono fra loro reciproci rispetto a ciascuna delle circonferenze (5); ed è evidente che il punto F_0 è il polo dell'asse minore rispetto al cerchio direttore. — L'asse radicale delle circonferenze (4), (5) è $x = \frac{r^2}{2c}$, dunque passa per il mezzo R della congiungente i punti reciproci, e poichè $A'_0F' = \frac{r^2}{a - c}$, $F'R = \frac{r^2}{2c}$, si avrà $A'_0R = \frac{r^2}{2c}\left(\frac{a + c}{a - c}\right)$; se C è il centro della circonferenza c, il raggio di questa ha per valore $A'_0C = \frac{A'_0F' + F'A_0}{2} = \frac{ar^2}{a^2 - c^2}$, e quindi la distanza $CR = A'_0R - A'_0C = \frac{r^2}{2c}\left(\frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}\right)$, onde la potenza del punto R rispetto al cerchio c è $CR^2 - CA'^2_0 = \frac{r^4}{4c^2} = RF'^2 = RF_0^2$; così le tangenti condotte dal punto R a ciascun cerchio (5) sono eguali alla semidistanza fra i punti reciproci.

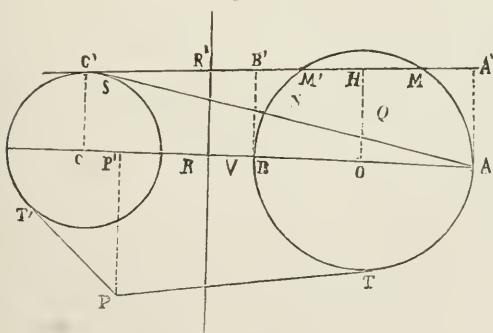
Si ha pure $CF' = A_0F' - A'_0C = \frac{r^2}{a - c} - \frac{ar^2}{a^2 - c^2} = \frac{cr^2}{a^2 - c^2}$, e quindi $\frac{CF'}{A'_0C} = \frac{c}{a} = e$; inoltre il rapporto fra il diametro della circonferenza c e la distanza del punto più lontano A'_0 dell'asse radicale è: $\frac{A'_0A_0}{A'_0R} =$ $= \frac{4e}{(1 + e)^2}$.

Stabilito il significato dei moduli nel sistema dei due cerchi, si trasformano le proposizioni dimostrate per le coniche omofocali, osservando che alle due tangenti $PT = m$, $PT' = m'$ corrisponderanno due punti M, M' della circonferenza c situati sulla retta p polare di P e tangente al cerchio c'; all'asse minore delle coniche corrisponde il suo polo F_0, e poichè l'angolo di due rette uguaglia l'angolo delle congiungenti i

loro poli col centro del cerchio direttore, dalla proposizione (1) si deduce (1'): *Dati due cerchi che non s' incontrano e preso il punto F', interno al primo ed avente la stessa polare nei due cerchi, se conducesi una tangente al secondo e segante il primo nei punti M, M'; i raggi $F'M$, $F'M'$ menati da F' a questi due punti formano con la retta dei centri due angoli θ, θ' collegati dalla relazione* (I).

Ai punti di contatto T, T' delle tangenti all' ellisse ed al secondo fuoco F corrispondono respettivamente le tangenti t, t' nei punti M, M' del cerchio c e l' asse radicale; quindi l' angolo $TF'F = \psi$ è eguale all' angolo della tangente t con l' asse predetto, il qual angolo è pure eguale a quello del raggio CM con la retta dei centri; dunque dalla proposizione (2) resulta il teorema (2'): *Dati due cerchi che non s' incontrano, descritta una tangente al secondo, e che seghi il primo in due punti M, M', questi determinano sulla prima circonferenza due archi ψ, ψ' contati dalla retta dei centri e collegati dalla relazione* (II). Infine la retta MF_0 è la polare di L, intersezione dell' asse minore con la tangente PT, la retta MF' ha il suo polo all' infinito sulla direzione della normale PT, e perciò l' angolo ν di questa retta con $F'L$ è eguale all' angolo $F'MF_0$; così dal teorema (3) si deduce (3'): *Dati due cerchi che non s' incontrano, descritta una tangente qualunque al secondo e segante il primo in due punti M, M' gli angoli ν, ν' aventi i vertici in questi punti ed i lati passanti per i punti fissi F', F_0, reciproci rispetto a ciascuno dei due cerchi, sono collegati per la relazione* (III).

30. — La rappresentazione geometrica dell' equazione di Lagrange contenuta nell' enunciato (2') si deve al celebre Jacobi, che la trovò direttamente; pure Chasles l' espose con diverse forme eleganti nel Capitolo XXXV del suo *Traité de Géométrie Supérieure*, Paris 1852. Si considerino due cerchi esterni od interni fra loro, di raggi r, r_1 e conducansi per il centro C del secondo cerchio una retta qualunque secante il primo

Fig. 17ª.

nei punti A, B, ed in un punto qualunque C' della circonferenza C una tangente ad essa che intersechi l'altra nei punti M, M', tirate le perpendicolari AA', BB', CC' sulla tangente si avrà fra queste parallele la nota relazione (1) $AA'.BC + CC'.AB = BB'.AC$, e poichè in ogni triangolo il prodotto di due lati equivale a quello del diametro del suo cerchio circoscritto e dell' altezza relativa al terzo lato, dai triangoli AMM', BMM'

si deducono l' eguaglianze $AA' = \frac{AM \,.\, AM'}{2r} = 2\,r\,sen \frac{\widehat{AOM}}{2}\, sen \frac{\widehat{AOM'}}{2}$,

$BB' = \frac{BM . BM'}{2r} = 2\,r\,sen \frac{\widehat{BOM}}{2}\, sen \frac{\widehat{BOM'}}{2}$, e per questi valori la relazione (1) diviene (2) $\frac{BC}{AC} sen \frac{\widehat{AOM}}{2}\, sen \frac{\widehat{AOM'}}{2} - sen \frac{\widehat{BOM}}{2}\, sen \frac{\widehat{BOM'}}{2} + \frac{r_1}{2r}\left(1 - \frac{BC}{AC}\right) = o$. Se la retta AB passa per il centro O del primo cerchio come vedesi nella figura, ponendo $\widehat{AOM} = 2\,\varphi$, $\widehat{AOM'} = 2\,\varphi'$, resulterà $MOB = \pi - 2\,\varphi$, $\widehat{M'OB} = \pi - 2\,\varphi'$, e indicata con d la distanza OC dei centri, sarà il rapporto $\frac{BC}{AC} = \frac{OC - OB}{AO + OC} = \frac{d - r}{d + r}$, positivo se i cerchi sono esterni e negativo nel caso che il cerchio r_1 sia tutto interno al cerchio OA, è evidente che la (2) assume la forma

(3) $\left(\frac{d-r}{d+r}\right) sen\,\varphi\, sen\,\varphi' - cos\,\varphi\, cos\,\varphi' + \frac{r_1}{d+r} = o.$

Se l' angolo φ è nullo, il punto M coinciderà con l' estremo A del diametro AB, ed M' coinciderà con un certo punto N situato sulla tangente AS menata dal punto A al cerchio C, l' angolo φ si ridurrà all' angolo $AON = 2\,\mu$ e dal triangolo ACS trovasi $\widehat{CAN} = \frac{\pi}{2} - \mu$, ed (4) $\frac{r_1}{r + d} = cos\,\mu$; similmente per i triangoli ABN, ACS rettangoli in N ed S resulta la proporzione (5) $\frac{BC}{AC} = \frac{NS}{AS}$.

I segmenti MC', $M'C'$ si ottengono dalle eguaglianze $MC'^2 = MC^2 - r^2 = MO^2 + OC^2 + 2\,MO\,.\,OC\,cos\,2\,\varphi - r^2 = (r + d)^2 - r_1^2 - 4\,r\,d\,sen^2\varphi$, $M'C'^2 = (r + d)^2 - r_1^2 - 4\,r\,d\,sen^2\varphi'$, le quali posto $\frac{4\,r\,d}{(r+d)^2 - r_1^2} = k^2$, ed osservato che $AS = \sqrt{(r + d)^2 - r_1^2}$ si possono scrivere semplicemente (6) $MC' = AS\,.\,\Delta\varphi$, (7) $M'C' = AS\,.\,\Delta\varphi'$; quest' ultimo per $\varphi' = \mu$ diviene (8) $\frac{NS}{AS} = \Delta\,\mu$; così la (3) si riduce alla seguente (9) $\pm\,\Delta\,\mu\; sen\,\varphi\, sen\,\varphi' -$

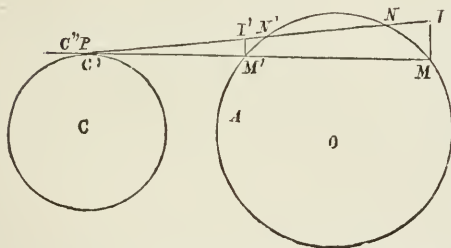
$-\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\mu = o$, e si prenderà per il primo termine il segno superiore o l'inferiore secondo che le circonferenze sono esterne od interne. Siccome la corda $MM' = 2\,r\,sen\,(\varphi' - \varphi)$ e si ha $MM' = MC' - M'C'$, in virtù dei valori (6), (7) si deduce (10) $2\,r\,sen\,(\varphi' - \varphi) = AS\,(\Delta\varphi - \Delta\varphi')$;

inoltre dalla (8) si ricava $AS - AN = AS\,.\,\Delta\mu$, oppure $AS = \dfrac{AN}{1 - \Delta\mu} =$

$= \dfrac{2\,r\,sen\,\mu}{1 - \Delta\mu}$ e perciò la (10) diviene la nota equazione $sen\,(\varphi' - \varphi)\dfrac{(1 - \Delta\mu)}{sen\,\mu} =$

$= \Delta\varphi - \Delta\varphi'$; nel caso dei cerchi interni si sarebbe trovato $sen\,(\varphi' - \varphi) \times \left(\dfrac{1 + \Delta\mu}{sen\,\mu}\right) = \Delta\varphi + \Delta\varphi'$: ma si può dimostrare con la stessa figura, infatti abbassando dal centro O le normali OH, OQ sulle rette MM', AS si avrà $2\,HC' = MC' + M'C'$, $HC' = OC\,sen\,AOP = d\,sen\,(\varphi + \varphi')$, e quindi $2\,d\,sen\,(\varphi + \varphi') = AS\,(\Delta\varphi + \Delta\varphi')$, similmente $2\,QS = AS + NS$,

cioè $2\,d\,sen\,\mu = AS + AS\,.\,\Delta\mu$, da cui $\dfrac{2\,d}{AS} = \dfrac{1 + \Delta\mu}{sen\,\mu}$, ec.

Fig. 18ª.

Per ottenere geometricamente l'equazione differenziale si descrivano due tangenti vicinissime fra loro nei punti C', C'' della circonferenza C e secanti l'altra O nei punti M, M', N, N'. Posto $AOM = 2\,\varphi$, $AOM' = 2\,\varphi'$ sarà $lim.\,\widehat{MN} = 2\,r\,d\,\varphi$, $lim.\,\widehat{M'N'} = -2\,r\,d\varphi'$; fatto centro nel punto d'incontro P delle due tangenti si descrivano con raggi PM', PM gli archi circolari $M'I'$, MI; i triangoli infinitesimi MNI, $M'N'I'$ sono simili essendo $lim.\,\widehat{IMN} = lim.\,\widehat{I'M'N'}$ e quindi la proporzione $\widehat{MI} : \widehat{M'I'} :: \widehat{MN} : \widehat{N'M'}$, ovvero $MP : M'P = \widehat{MN} : \widehat{N'M'}$, ed

al limite coincidendo P con C sarà $\dfrac{MC'}{M'C'} = lim.\dfrac{\widehat{MN}}{\widehat{M'N'}}$, da cui $\dfrac{d\varphi}{d\varphi'} + \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi'} = o$.
Se la circonferenza C è interna al cerchio O, gli archi infinitesimi MN, $M'N'$ sono dello stesso senso e si avrà $\dfrac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \dfrac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}$.

Quando l'ampiezza φ è reale, le funzioni ellittiche della variabile $u = F\varphi$ si rappresentano come semplici rapporti geometrici così per es. $\Delta\varphi = \dfrac{MC'}{a}$;

significando con a, b le tangenti condotte al cerchio C dagli estremi del diametro AB si trova $a^2 = (r + d)^2 - r_1^2$, $b^2 = (d - r)^2 - r_1^2$, dalle quali ricavasi $4dr = a^2 - b^2$ ed il modulo complementare $k_1 = \frac{b}{a}$.

Il modulo k è minore di uno, poichè se i cerchi sono esterni si ha $d > r + r_1$ e se interni $d < r - r_1$; onde in entrambi i casi $r_1^2 < (d - r)^2$; aggiungendo $4rd$ ai due membri di questa diseguaglianza si ha $r_1^2 + 4rd < (d + r)^2$, ovvero $4rd < (d + r)^2 - r_1^2$; si avverta che i cerchi posson esser eguali quando sono esterni. Se i cerchi sono tangenti, risulta $d = r \pm r_1$, $k = 1$ e si hanno le formule delle funzioni paraboliche, pag. 43.

Le proprietà dell'asse radicale conducono pure ad esprimere il modulo come semplice rapporto di due segmenti. Sia R l' intersezione della corda comune ai due cerchi con la retta OC dei centri di cui sia V il punto medio, la relazione $RO^2 - r^2 = RC^2 - r_1^2$ si riduce a $2\,OC . \times VR = r^2 - r_1^2$. Condotte da un punto qualunque P le tangenti PT, PT' a ciascuna delle circonferenze ed indicata con P' la proiezione ortogonale di P sulla retta dei centri, si avrà successivamente $PT^2 - PT'^2 = (PO^2 - r^2) - (PC^2 - r_1^2) = (PO^2 - PC^2) - (r^2 - r_1^2) = (P'O^2 - P'C^2) - (r^2 - r_1^2) = 2\,OC . VP' - 2\,OC . VR = 2\,OC . RP'$; dunque *la differenza dei quadrati delle tangenti condotte da un punto qualunque del piano a due cerchi equivale al rettangolo della distanza di questo punto dall' asse radicale e del segmento doppio della congiungente i due centri.* In particolare se P coincide con T' si avrà $\frac{PT^2}{RP'} = 2\,OC$, ovvero il quadrato della tangente menata da un punto P di una circonferenza ad un' altra, sta alla distanza di questo punto dall' asse radicale dei due cerchi in un rapporto costante eguale al doppio della distanza dei centri. Per la quale proprietà risulta $\frac{NS^2}{AS^2} = \frac{ND}{AR} = \frac{AR - AN\,sen\,\mu}{AR} = 1 - \frac{AB}{AR}\,sen^2\,\mu$ e quindi $k^2 = \frac{AB}{AR}$.

La distanza AR dipende solo dal diametro AB del cerchio O e dal modulo k, così facendo variare la distanza d dei centri ed il raggio r_1 del secondo cerchio, e conservando fisso il primo circolo e costante il modulo k, si otterranno in numero infinito cerchi coradicali al primo; i centri situati sulla stessa retta AR, due a due eguali ed in posizione simmetrica rispetto alla corda comune; i minimi si trovano facendo $r_1 = o$ nella formula del quadrato del modulo, e perciò i loro centri F', F_0 distano dal centro O del segmento d_0 determinato dall' equazione

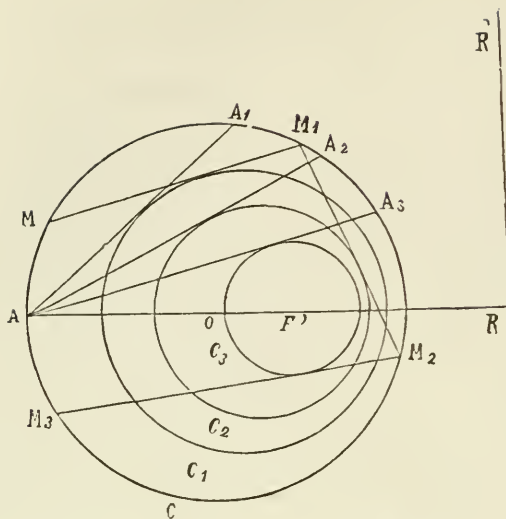
$k^2 = \frac{4\,d_0 r}{(r+d_0)^2}$, ovvero $k_1^2 = 1 - k^2 = \left(\frac{d_0 - r}{d_0 + r}\right)^2$, da cui ricavansi:

$OF' = r\frac{(1-k_1)}{1+k_1}$ ed $OF_0 = \frac{r\,(1+k_1)}{1-k_1}$; questi due cerchi di raggio nullo

si dicono pure *punti limiti* del sistema di cerchi coradicali e si costruiscono graficamente portando sulla retta dei centri a partire dal piede R dell'asse radicale la tangente menata da esso ad una circonferenza del sistema. Data una corda qualunque MM' del cerchio O vi saranno sempre due cerchi tangenti alla MM' e coradicali al primo, poichè per avere i punti di contatto E, E_1 basterà prolungare la data corda sino a segare l'asse radicale in R_1 ed a partire da questo punto prendere sulla stessa MM' i segmenti $R_1 E = - R_1 E_1$ eguali alla tangente tirata per lo stesso punto R_1 alla circonferenza O, le perpendicolari EC, $E_1 C_1$ innalzata alla corda MM' dai punti E, E_1 determineranno sulla retta OR normale all'asse radicale i çentri C, C_1 dei due cerchi. Si applica la costruzione riferita a trovare graficamente l'ampiezza dell'integrale ellittico $F\mu = a$ differenza degl'integrali simili $F\varphi = u$, $F\varphi' = v$; infatti descritti gli angoli $AOM = 2\varphi$, $AOM' = 2\varphi'$ in un cerchio qualunque di centro O e raggio arbitrario $OA = r$, si determini sulla retta AO prolungata il piede R dell'asse radicale costruendo la quarta proporzionale $rk^2 : r :: 2r : AR$; indi condotto l'asse RR_1 normale ad AO, si disegni il cerchio C coradicale al primo circolo O e che tocchi la corda MM', la tangente menata per il punto A al cerchio C segherà la circonferenza O in un secondo punto N tale che l'angolo AON sarà eguale a 2μ doppio dell'ampiezza cercata. Se invece debbasi costruire l'amplitudine dell'integrale $u_1 = u + v$ dopo aver descritti gli angoli $AOM = 2am.u$, $AOM' = 2am.v$ e la corda ideale RR_1 si disegnerà il circolo C tangente alla corda AM' e coradicale al cerchio O, indi per il punto M si condurrà alla circonferenza C la tangente MM'', la quale segando in M'' la prima OA vi determina l'angolo $AOM'' = 2am(u+v)$. Allorchè v è

l'integrale ellittico completo $K = F\frac{\pi}{2}$, l'angolo AOM' sarà eguale a π

doppio dell'ampiezza di K, e perciò la corda AM' prende la direzione AO, il cerchio tangente C riducesi al punto limite F' e la retta MF' segherà la circonferenza O nell' altro punto M'' tale che l'angolo $AOM'' = 2am(u+K)$. Per definizione chiamando $u = F\varphi$ l'argomento dell'ampiezza φ, la proprietà dimostrata si enuncia « *se la differenza degli argomenti u_1, u eguaglia l'integrale completo, la congiungente gli estremi degli archi referiti alla stessa origine, e che rappresentano i doppi valori delle loro ampiezze, passerà per un punto fisso.* »

Fig. 19ª.

Con la medesima costruzione esposta si può determinare graficamente l'amplitudine della somma di più argomenti dati u, a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, aventi lo stesso modulo. Infatti si prendano nella circonferenza c di raggio AO gli archi $\widehat{AM} = 2\,a\,m\,.\,u$, $\widehat{AA_1} = 2\,a\,m\,.\,a_1$ e descritto il circolo c_1 tangente alla corda AA_1 e coradicale al cerchio C secondo il modulo k si tiri la tangente MM_1 a questa circonferenza c_1 e si avrà $\widehat{AMM'} = 2\,a\,m\,(u + a_1)$; indi preso l'arco $AA_2 = 2\,a\,m\,.\,a_2$ e descritta la circonferenza c_2 tangente alla corda AA_2 e coradicale al cerchio c, si condurrà da M_1 la tangente $M_1\,M_2$ alla circonferenza c_2 e si avrà $\widehat{AMM_1M} = 2\,a\,m\,(u + a_1 + a_2)$; così proseguendo si costruirà l'arco $AMM_1\,M_2 \ldots M_n = 2\,a\,m\,(u + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$. Se descritte h rotazioni intorno al centro O il termine M_n coincide col principio M, il primo membro dell' eguaglianza precedente si riduce ad $\widehat{AM} + 2\pi h =$ $= 2\,a\,m\,u + 2\,a\,m\,(2\,h\,K) = 2\,a\,m\,(u + 2\,h\,K)$ in virtù della relazione evidente $F\,(\varphi + \pi\,h) = F\varphi + 2\,h\,F\frac{\pi}{2} = u + 2\,h\,K$; si conchiude l'eguaglianza $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2\,h\,K$, cioè il poligono $MM_1\,M_2 \ldots M_{n-1}$ di n lati iscritto nella circonferenza C è indipendente dall' ampiezza u o dalla posizione del primo vertice M, il suo ultimo lato $M_{n-1}\,M$ dipende dall' amplitudine dell' argomento a_n, la quale per l' ultima eguaglianza è determinata dal numero h e dalle ampiezze degli altri $n - 1$ argomenti a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$; dunque *se un poligono variabile di n lati è costantemente iscritto in una circonferenza ed $n - 1$ dei suoi lati successivi sono respettivamente tangenti alle circonferenze c_1, c_2, $c_3 \ldots c_{n-1}$, coradicali alla prima, anche l' n^{simo} lato inviluppera una circonferenza c_n coradicale.*

Quando gli n argomenti sono tutti eguali ad $a = \frac{2\,h\,K}{n}$ le corde AA_2, $AA_3, \ldots AA_n$ risultano identiche alla prima AA_1, e le circonferenze c_2,

$c_3, \ldots c_n$ coincideranno con c_1; dunque *esiste un' infinità di poligoni di* n *lati iscritti in un cerchio* c, *e circoscritti ad un altro cerchio* c_1. — Nel caso che il numero dei lati sia pari, cioè $n=2m$, si avrà $m a_1 = K$, l'arco $AMM_1 = 2am.(u+a_1)$ e l'arco $AMM_1 \ldots M_{m+1} = 2am\,(u+(m+1)a_1)$ e siccome la differenza degli argomenti di queste due ampiezze ha per valore $ma_1 = K$, si deduce per il principio dimostrato, che la corda $M_1 M_{m+1}$ passa per il punto limite F', dunque *in ciascuno dei poligoni di un numero pari di lati iscrittibile in un cerchio* c *e circoscrittibile ad un altro* c_1, *le diagonali congiungenti i vertici opposti passano per il punto fisso* F', *limite del sistema dei cerchi coradicali con i primi.* Nel quadrangolo e nell' esagono simultaneamente iscritti e circoscritti le rette che uniscono i punti d' intersezione dei lati opposti essendo polari di F', passeranno per l' altro punto limite F_0.

Questi teoremi di Poncelet sono evidentemente proiettivi e si estendono alle coniche; mediante la trasformazione polare prendendo l' origine del cerchio direttore nel punto limite F' si conchiude: 1° *Se un poligono variabile di* n *vertici è circoscritto ad una conica ed* $(n-1)$ *vertici descrivono coniche omofocali alla prima, anche l'* n^{simo} *vertice descriverà una conica omofocale.* — 2° *Se un poligono di un numero pari di lati è circoscritto ad una conica ed iscritto in un' altra omofocale, i punti d' intersezione dei lati opposti giaceranno sull' asse minore o sulla retta all' infinito.*

31. — Per trovare la relazione fra la distanza d dei centri ed i raggi r, ρ di due cerchi O, C, l' uno circoscritto e l' altro iscritto allo stesso poligono di n lati si prenda il primo vertice nel punto A situato sulla retta dei centri OC, l'angolo $AOA_1 = 2\varphi = 2am\frac{2K}{n}$, essendo $k^2 = \frac{4dr}{(d+r)^2-\rho^2}$; se P è il punto di contatto del primo lato AA_1 con il cerchio interno C dal triangolo rettangolo ACP risulta $\cos\varphi = \frac{\rho}{d+r}$ e quindi $\Delta\varphi = \frac{r-d}{r+d}$; è chiaro che si dovrà eliminare l' angolo φ fra una di queste equazioni e quella esprimente la moltisezione dell' integrale completo secondo il numero n. In alcuni casi particolari l' eliminazione si può ottenere con facilità; così se $F\varphi + F\varphi' = F\frac{\pi}{2} = K$, la formula di Lagrange si riduce a $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{k_1}$, da cui si ricava $\operatorname{sen}\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$, $\cos\varphi' = \frac{k_1 \operatorname{sen}\varphi}{\Delta\varphi}$ e $\Delta\varphi' = \frac{k_1}{\Delta\varphi}$. Sia $n=3$, $\varphi = am\frac{2}{3}K$, $\varphi' = am\frac{1}{3}K$; a motivo di $F\varphi = 2F\varphi'$, applicando la formula di Lagrange alla duplicazione dell'argomento si trova $\cos\varphi = \cos^2\varphi' - \operatorname{sen}^2\varphi'\Delta\varphi = \cos^2\varphi' - \operatorname{sen}\varphi' \times \cos\varphi$, da cui $\cos\varphi = 1 - \operatorname{sen}\varphi'$ ovvero $\cos\varphi + \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} = 1$, e sostituendo i

valori di $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ si trova $\frac{\rho}{d+r} + \frac{\rho}{r-d} = 1$, cioè $d^2 = r(r-2\rho)$ relazione data da Euler con altro metodo.

Nel caso di $n=4$ sarà $\varphi = am\frac{K}{2}$, $\varphi' = am\frac{K}{2}$, quindi $sen\,\varphi' = sen\,\varphi$ e dall'equazione $sen^2\varphi' + \cos^2\varphi = 1$ si ottiene $\left(\frac{\rho}{d+r}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{d-r}\right)^2 = 1$.

Infine per $n=5$ si avrà $\varphi = am\frac{2}{5}K$, $\varphi' = am.\frac{3}{5}K$, e chiamando α, α' le ampiezze corrispondenti ai doppi argomenti, cioè $\alpha = am\frac{4}{5}K$, $\alpha' = am\frac{6}{5}K$, si trova $F\alpha + F\alpha' = 2K = F\pi$, $2F\alpha_1 = 2K + \frac{2}{5}K = F\pi + F\varphi = F(\pi+\varphi)$, e per conseguenza $\cos\alpha = -\cos\alpha'$, $sen\,\alpha = sen\,\alpha'$, $\cos(\pi+\varphi) = \cos^2\alpha' - sen^2\alpha'\,\Delta(\pi+\varphi)$, da cui $sen\,\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1+\Delta\varphi}}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\Delta\varphi - \cos\varphi}{1+\Delta\varphi}}$, ed applicando la stessa relazione di Lagrange all'ampiezza φ considerata come amplitudine della differenza degli argomenti $\frac{4}{5}K$, $\frac{2}{5}K$, si deduce $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\varphi + sen\,\varphi\,sen\,\alpha\,\Delta\varphi$, onde sostituendo i precedenti valori di $sen\,\alpha$, $\cos\alpha$ e poi quelli di $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ in funzione di d, r, ρ con facili riduzioni si conchiude:

$$\rho\,(r+d)\left(\sqrt{2r} - \sqrt{r-d-\rho}\right) = (r-d)\;(r+\rho+d)\;\sqrt{r+d-\rho}.$$

Si potranno dalle precedenti ricavare le relazioni che devono esistere fra i semi-assi a, a_1 di due coniche omofocali e la distanza focale $2c$ affinchè uno stesso poligono di n lati possa esser iscritto nell'una e circoscritto all'altra: ora per i cerchi polari reciproci delle coniche, dalle formule della pag. 83, facendo $a^2 + \lambda = a_1^2$, ed il raggio del cerchio direttore eguale ad uno, risultano la distanza dei centri $d = \frac{c\,(a_1^2 - a^2)}{(a^2-c^2)\,(a_1^2-c^2)}$ ed i raggi $r = \frac{a}{a^2-c^2}$, $\rho = \frac{a_1}{a_1^2 - c_1^2}$ e poichè nel caso del triangolo si è trovato $d^2 = r^2 - 2r\rho$ con la sostituzione dei valori surriferiti si ottiene l'equazione $a_1^4 - 2a\,a_1^3 + 2a\,a_1\,c^2 - a^2c^2 = o$; la quale a motivo di $c = ae = a_1 e_1$ si riduce alla seguente $e_1^4 - 2ee_1^3 + 2ee_1 - e^2 = o$, ec.

Come pure volendo trovare la condizione affinchè uno stesso poligono di n lati sia circoscritto ad un'ellisse data, ed iscritto in una cir-

conferenza di raggio R avente il centro in uno dei fuochi F dell' ellisse, si osserverà che preso per origine questo fuoco, l' equazione dell' ellisse e del cerchio sono $\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x^2+y^2=R^2$; quindi le loro polari reciproche rispetto al cerchio direttore $x^2+y^2=p^2$ saranno respettivamente i cerchi $x^2+y^2-2\frac{p^2cx}{b^2}=\frac{p^4}{b^2}$, $x^2+y^2=\left(\frac{p^2}{R}\right)^2$ di raggi $r=\frac{p^2a}{b^2}$, $\rho=\frac{p^2}{R}$ e la cui distanza dei centri è $d=\frac{p^2c}{b^2}$; onde basterà sostituire questi valori di r, ρ, d nell' equazioni trovate per il sistema di due cerchi: così per il triangolo resulta $R=2a$, e per il quadrilatero $R=\sqrt{2(a^2+c^2)}$.

32. — La ricerca dell' equazione di condizione esistente fra i raggi r e ρ dei cerchi iscritto e circoscritto allo stesso poligono e la distanza d dei loro centri, fece continui progressi per opera dei geometri N. Fuss, Poncelet, Steiner, Mention ec. Jacobi ebbe la feconda idea di applicare gl' integrali ellittici di prima specie alla dimostrazione dei teoremi di Poncelet sui poligoni simultaneamente iscritti e circoscritti ai cerchi ed il 1° aprile 1828 pubblicò una sua Memoria col titolo: *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementar Geometrie,* giornale di Crelle, tomo 3°. Nell' anno successivo Richelot giovane discepolo di Jacobi estese al sistema di due cerchi minori della sfera le proposizioni del grande maestro, e servendosi di alcune formule della duplicazione delle funzioni ellittiche, determinò le relazioni occorrenti per passare dall' equazione algebrica relativa ad un poligono di n lati a quelle analoghe per il poligono di un doppio numero di lati. Infatti avendo stabilite l' eguaglianze $\varphi=am\frac{2K}{n}$, $cos\varphi=\frac{\rho}{d+r}$, $\Delta\varphi=\frac{r-d}{r+d}$, $k_1^2=1-k^2=\frac{(r-d)^2-\rho^2}{(r+d)^2-\rho^2}$ per il poligono di n lati, dicansi φ' l' ampiezza dell' argomento $\frac{2K}{2n}$, ovvero $\varphi'=am\frac{K}{n}$, e respettivamente ρ', d' il raggio del cerchio iscritto nel poligono di $2n$ lati e la distanza del suo centro a quello del cerchio r circoscritto allo stesso poligono, si avrà $cos\varphi'=\frac{\rho'}{d'+r}$, $\Delta\varphi'=\frac{r-d'}{r+d'}$; e $k_1^2=1-k^2=\frac{(r-d')^2-\rho'^2}{(r+d')^2-\rho'^2}$. La prima delle cercate relazioni risulterà dall' eguagliare i valori del quadrato del modulo k_1 cioè (1) $\frac{(r-d)^2-\rho^2}{(r+d)^2-\rho^2}=\frac{(r-d')^2-\rho'^2}{(r+d')^2-\rho'^2}$.

Si troverà la seconda osservando che la formula di Lagrange per la duplicazione diviene $\cos\varphi = \cos^2\varphi' - sen^2\varphi'\,\Delta\varphi$, e quindi $sen^2\varphi' = \frac{1-\cos\varphi}{1+\Delta\varphi}$, $(\Delta\varphi')^2 = 1 - k^2 sen^2\varphi' = \frac{1+\Delta\varphi - k^2 + k^2\cos^2\varphi}{1+\Delta\varphi}$; moltiplicando i due termini di questa frazione per $1-\Delta\varphi$, con brevi riduzioni si ottiene (2) $(\Delta\varphi')^2 = \frac{\Delta\varphi + \cos\varphi}{1+\cos\varphi}$. Ponendo $\frac{r+d}{\rho} = p$, $\frac{r-d}{\rho} = q$, $\frac{r+d'}{\rho'} = p'$, $\frac{r-d'}{\rho'} = q'$, le relazioni (1) e (2) si riducono alle seguenti $\frac{q^2-1}{p^2-1} = \frac{q'^2-1}{p'^2-1}$, $\frac{q'^2}{p'^2} = \frac{1+q}{1+p}$, dalle quali ne risulta la terza $\frac{q-1}{p-1} = \frac{p'}{q'}\left(\frac{q'^2-1}{p'^2-1}\right)$; risolvendo rispetto ai simboli p, q le due ultime equazioni si ottengono le formule di Richelot $p = \frac{p'^2 - q'^2 + p'^2 q'^2}{p'^2 + q'^2 - p'^2 q'^2}$, $q = \frac{p'^2 q'^2 - (p'^2 - q'^2)}{p'^2 + q'^2 - p'^2 q'^2}$. Con la sostituzione dei trovati valori di p, q nell' equazione di condizione relativa al poligono di n lati, si avrà la condizione analoga per il poligono di $2n$ lati.

Così per il triangolo, quadrilatero e pentagono furono determinate le successive equazioni (3) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (4) $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = 1$, $p\sqrt{p+q} = p\sqrt{q-1} + q(p+1)\sqrt{p-1}$; la quale ridotta razionale diviene $(p^2 + q^2 - p^2 q^2)^2 - 4p^2 q^2 (p-1)(q-1) = o$, e siccome il primo membro è divisibile per il polinomio $p^2 + q^2 - p^2 q^2 + 2pq\sqrt{(p-1)(q-1)} =$

$$= (p+q-pq)(p+q+pq) + 2qp\left(\sqrt{pq-p-q+1} - 1\right),$$

che evidentemente si annulla per $pq - p - q = o$, si dovrà dividere per questo fattore estraneo la stessa equazione razionale; perciò la vera equazione di condizione relativa al pentagono è (5) $p^2 q^2 (pq + p + q - 2) - pq(p^2 + q^2 - p - q) - (p^3 + q^3) = o$, ovvero $u^3 - v^3 + uv(u - v - 4) = o$, in cui $u = p + q = \frac{2r}{\rho}$ e $v = pq = \frac{r^2 - d^2}{\rho^2}$. Sostituendo l' espressioni di p, q in funzione di p', q' nell' eguaglianze (3), (4), (5) e poi i valori surriferiti di p', q' dati per r, d', ρ' si otterranno le relative equazioni di condizione per l' esagono, ottagono e decagono; ripetendo successivamente le medesime sostituzioni si avranno quelle relative ai poligoni aventi i numeri di lati di una delle forme 2^m, $3 \cdot 2^m$, $5 \cdot 2^m$.

In simil modo si trovano le formule per passare dal poligono di n lati a quello di un numero triplo di lati entrambi iscrittibili e circoscrit-

tibili simultaneamente; poichè scrivendo $\varphi = am\frac{2K}{n}$, $\alpha = am\frac{2K}{3n}$, e $\psi = am\frac{4K}{3n}$, fra gl' integrali ellittici di prima specie si hanno le relazioni $F\psi = 2F\alpha$, $F\varphi = 3F\alpha$; dalle quali in virtù dell' equazione di Lagrange si deducono l' eguaglianze $\cos\alpha = \cos\alpha\cos\psi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi\,\Delta\alpha$, $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\psi - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi\,\Delta\varphi$ e perciò ricavati i valori di $\operatorname{sen}\psi$, $\cos\psi$ ne risulta $\operatorname{tang}\psi = \frac{(\cos\alpha - \cos\varphi)\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(\cos\varphi\,\Delta\alpha + \cos\alpha\,\Delta\varphi)}$, e siccome (pag. 37) si ha pure $\operatorname{tang}\psi = \frac{2\operatorname{tang}\alpha\,\Delta\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha\,(\Delta\alpha)^2}$, col paragone dei due valori di $\operatorname{tang}\psi$ si ottiene la relazione $\frac{\cos\alpha - \cos\varphi}{\cos\varphi\,\Delta\alpha + \cos\alpha\,\Delta\varphi} = \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha\,\Delta\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\,(\Delta\alpha)^2}$. Facendovi le sostituzioni $\cos\varphi = \frac{1}{p}$, $\Delta\varphi = \frac{q}{p}$, $\cos\alpha = \frac{1}{p_1}$, $\Delta\alpha = \frac{q_1}{p_1}$, in cui si ha $p_1 = \frac{r + d_1}{\rho_1}$, $q_1 = \frac{r - d_1}{\rho_1}$; r, ρ_1 rappresentando i raggi dei cerchi respettivamente circoscritto ed iscritto al poligono di $3n$ lati e d_1 la distanza dei loro centri, si avrà $\frac{p - p_1}{q + q_1} = \frac{2p_1 q_1 (p_1^2 - 1)}{p_1^2 + q_1^2 - p_1^2 q_1^2}$, insieme con l' altra $\frac{p_1^2 - p^2}{q_1^2 - q^2} = \frac{p^2 - 1}{q^2 - 1}$, che deriva dall' eguagliare i quadrati dei moduli complementari e da una semplice proprietà delle proporzioni; dalle precedenti ne consegue la terza eguaglianza $\frac{q - q_1}{p + p_1} = \frac{2p_1 q_1 (q_1^2 - 1)}{p_1^2 + q_1^2 - p_1^2 q_1^2}$. Le due equazioni lineari rispetto a p, q ci somministrano facilmente i valori

$$p = \frac{p_1[p_1^4(q_1^2 - 1)^2 - 2p_1^2 q_1^2(q_1^2 + 1) - 3q_1^4]}{(p_1^2 + q_1^2 - p_1^2 q_1^2)^2 - 4p_1 q_1 (p_1^2 - 1)(q_1^2 - 1)},$$

$$q = q_1 \frac{[q_1^4(p_1^2 - 1)^2 - 2p_1^2 q_1^2(p_1^2 + 1) - 3p_1^4]}{(p_1^2 + q_1^2 - p_1^2 q_1^2)^2 - 4p_1 q_1 (p_1^2 - 1)(q_1^2 - 1)},$$

e basterà sostituirli nell' equazione di condizione relativa al poligono di n lati onde ottenere l' analoga per il poligono di $3n$ lati; con la successiva ripetizione del calcolo applicato ai poligoni di 3, 4, 5 lati si otterranno le relazioni per i poligoni il cui numero dei lati è della forma $3^m . 2^n . 5^s$, l' esponente s avendo per valore uno o zero.

33. — Con la proiezione centrale si possono estendere le surriferite proposizioni alle coniche ed alle figure sferiche; per esempio sopra una superficie sferica di raggio a siano descritte due circonferenze con raggi sferici α, β e δ simboleggi la distanza sferica dei loro centri; si prenda per centro di proiezione P il punto opposto al centro sferico del circolo α,

gli assi coordinati ortogonali con l'origine al centro della sfera, l'asse delle z passante per P, ed il piano $y=o$ contenga il centro sferico del secondo circolo β, l'equazioni delle superfici coniche proiettanti i cerchi essendo determinate dalla generatrice $x=m(z+a), y=n(z+a)$ con m, n parametri variabili e dalle due direttrici $(x^2+y^2=a^2 sen^2 \alpha, z=a \cos \alpha)$, $(x \, sen\, \delta + z \cos \delta = a \cos \beta, x^2+y^2+z^2=a^2)$ saranno respettivamente della forma $x^2+y^2=(z+a)^2 tang^2 \frac{\alpha}{2}$, $x^2+y^2+(z+a)^2\left(\frac{\cos \beta - \cos \delta}{\cos \beta + \cos \delta}\right) - - 2x(z+a)\frac{sen\, \delta}{\cos \beta + \cos \delta}=o$, nelle quali equazioni posto $z=o$ si otterranno le proiezioni stereografiche dei cerchi sferici; cioè due circonferenze aventi per raggi $r=a\, tang \frac{\alpha}{2}$, $\rho=\frac{a\, sen\, \beta}{\cos \beta + \cos \delta}$, e per distanza dei centri $d=\frac{a\, sen\, \delta}{\cos \beta + \cos \delta}$; ad un poligono rettilineo simultaneamente iscritto nella prima e circoscritto alla seconda corrisponderà sulla sfera un poligono iscritto nel cerchio α e circoscritto al cerchio β, ed i suoi lati saranno circonferenze minori passanti per P; la relazione algebrica fra i raggi α, β, e la distanza δ si otterrà col sostituire nelle formule trovate i precedenti valori di r, ρ, d. — I cerchi massimi $(z=Ax+By, x^2+y^2+z^2=a^2)$ con A, B variabili, si proiettano stereograficamente secondo i circoli $x^2+y^2+2a(Ax+By)=a^2$, i cui assi radicali passano per il centro della sfera; ed i poligoni sferici simultaneamente iscritti e circoscritti a circoli della sfera, si proiettano secondo poligoni piani con lati circolari tangenti ad uno stesso cerchio ed i vertici situati su d'un'altra circonferenza.

Col metodo della proiezione centrale si risolve il problema « *Date nel piano* α *due coniche* » per es.: (I) $x^2+y^2-z^2=o$, (II) $Ax^2+A'y^2+ + A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=o$, *trasformarle nelle due circonferenze,* (III) $X^2+Y^2-Z^2=o$, (IV) $M(X^2+Y^2)+2NYZ+PZ^2=o$ *situate nel piano* α'. (*) Infatti supponendo gli assi ortogonali, si sostituiscano nella (I) i valori di x, y, z ricavati dalla serie di rapporti:

$$\frac{x}{aX+bY+cZ}=\frac{y}{a'X+b'Y+c'Z}=\frac{z}{a''X+b''Y+c''Z}=\lambda,$$

identificando l'equazione che ne risulta con la (III) si ottengono le sei condizioni (1) $a^2+a'^2-a''^2=1$, (2) $b^2+b'^2-b''^2=1$, (3) $c^2+c'^2-c''^2=-1$, (4) $ab+a'b'-a''b''=o$, (5) $ac+a'c'-a''c''=o$, (6) $bc+b'c'-b''c''=o$; ed in virtù di queste ne deriva la nuova serie di rapporti:

$$\frac{X}{ax+a'y-a''z}=\frac{Y}{bx+b'y-b''z}=\frac{-Z}{cx+c'y-c''z}.$$

(*) *Metodo analitico della prospettiva,* esposto da JACOBI, nel tomo VIII del Giornale di Crelle, pag. 338.

È evidente che l'equazione $cx + c'y - c''z = o$, rappresenta la retta limite del piano α ed è polare comune alle coniche (1), (2) perchè corrisponde alla retta all'infinito del piano α' polare dei centri dei due circoli (III) e (IV); il suo polo C ha per coordinate $\left(\frac{x}{z} = \frac{c}{c''}, \frac{y}{z} = \frac{c'}{c''}\right)$, ed è omologo al centro $(X = o, Y = o)$ del circolo (III); la stessa retta $cx + c'y - c''z = o$, contiene evidentemente i due punti $A\left(\frac{x}{z} = \frac{a}{a''}, \frac{y}{z} = \frac{a'}{a''}\right)$ $B\left(\frac{x}{z} = \frac{b}{b''}, \frac{y}{z} = \frac{b'}{b''}\right)$, omologhi ai punti all'infinito situati sugli assi X, Y, cioè $\left(\frac{X}{Z} = \infty, \frac{Y}{Z} = o\right)$, $\left(\frac{X}{Z} = o, \frac{Y}{Z} = \infty\right)$, come lo provano pure le equazioni (5), (6). Similmente la retta $ax + a'y - a''z = o$, è la polare del punto A rispetto alle coniche (I), (II), contiene i punti B, C e corrisponde all'asse coordinato $X = o$, il quale passa per i centri dei circoli (III) e (IV); il che risulta pure dalle condizioni (4), (5); in ultimo la retta $bx + b'y - b''z = o$ è la polare di B rispetto alle coniche date e contiene i punti A, C; dunque il triangolo ABC è coniugato, ovvero ciascun vertice ha per polare il lato opposto nelle due coniche (I), (II). In generale esiste un sol triangolo coniugato comune, poichè facendo coincidere le rette polari $xx_1 + yy_1 - zz_1 = o, (Ax_1 + B''y_1 + B'z_1)x + (B''x_1 + A'y_1 + Bz_1)\, y + (B'x_1 + By_1 + A''z_1)\, z = o$, si avrà il sistema lineare omogeneo (7) $(A - s)x_1 + B''y_1 + B'z_1 = o$, $B''x_1 + (A' - s)y_1 + Bz_1 = o$, $B'x_1 + By_1 + (A'' + s)\, z_1 = o$; in cui s denota il rapporto dei coefficienti delle variabili x, y, z nell'equazioni delle polari.

Eliminando x_1, y_1, z_1 si ha la condizione (8) $\begin{vmatrix} A - s, & B'', & B' \\ B'', & A' - s, & B \\ B', & B, & A'' + s \end{vmatrix} =$

$= s^3 - s^2\,(A + A' - A'') + s\,(AA' - AA'' - A'A'' + B^2 + B'^2 - B''^2) + AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = o$; e per ogni radice reale s le due prime equazioni del sistema omogeneo (7) determinano le coordinate del polo. Moltiplicando respettivamente per x_1, y_1, z_1 le tre equazioni lineari e poi aggiungendole si trova (9) $Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2\,By_1 z_1 + 2\,B'x_1 z_1 + 2\,B''x_1 y_1 - s\,(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2) = o$, dunque i punti aventi la stessa polare rispetto alle coniche date giacciono sopra una conica che passa per i loro punti comuni; e siccome le surriferite equazioni lineari sono le derivate parziali rispetto ad x_1, y_1, z_1 dell'equazione precedente, si deduce che il centro di questa conica è sulla medesima, onde essa consiste in due rette secanti, le quali saranno reali se il determinante minore $B''^2 - (A - s)\,(A' - s)$ del discriminante (8) è positivo. Lo stesso valore di s decomporrà in due

rette la trasformata $M(X^2+Y^2)+2NYZ+PZ^2-s(X^2+Y^2-Z^2)=o$, il cui discriminante si dedurrà dalla (8) ponendo respettivamente le lettere M, M, P, N, o, o in luogo dei coefficienti A, A', A'', B, B', B'' e si

otterrà (10) $(M-s)\begin{vmatrix} M-s, & N \\ N & , P+s \end{vmatrix} = s^3 - s^2(2M-P)+s(M^2+N^2-2MP)+$

$+M(MP-N^2)=o$; eguagliando poi i coefficienti delle due cubiche (8), (10) si trovano le formule (11) $P=2M-(A+A'-A'')$, (12) $N^2=B^2+B'^2-B''^2-(A'-M)(A''+M)-(A''+M)(A-M)+$ $+(A-M)(A'-M)$, ed il coefficiente M è eguale ad s come risulta dalla cubica precedente, o dalla sostituzione delle formule di trasformazione nella (II), infatti il coefficiente di X^2 ha per valore $Aa^2+A'a'^2+A''a''^2+2Ba'a''+2B'aa''+2B''aa'$, cioè $s(a^2+a'^2-a''^2)=s$, in virtù delle (9), (1), similmente il coefficiente di Y^2 è (13) $Ab^2+A'b'^2+$ $+A''b''^2+2Bb'b''+2B'bb''+2B''bb'=s$. Si verifica che i coefficienti di $2XZ$, $2XY$ sono nulli; così per es., quello di $2XZ$ è il polinomio $Aac+A'a'c'+A''a''c''+B(a'c''+a''c')+B'(ac''+ca'')+B''(ac'+a'c)$, ora le coordinate del polo C verificano l' equazioni (7) e quindi $Ac+B''c'+B'c''=cs$, $B''c+A'c'+Bc''=sc'$, $B'c+Bc'+A''c''=-sc''$, le quali moltiplicate respettivamente per a, a', a'' e poi aggiunte in virtù della (5) danno una somma nulla.

La soluzione del problema sarà possibile geometricamente, nei casi che le due coniche date ammettono una secante ideale comune, è unica quando esse hanno soltanto due punti reali comuni, e vi è doppia soluzione se le coniche date non hanno alcun punto reale d' intersezione. Trovata la radice reale s del discriminante (8) le prime due equazioni (7) verificate dalle coordinate di A e la (1) determinano i coefficienti a, a', a'', e quindi mediante le (4), (13), (2) si calcolano i coefficienti b, b', b''; ed infine per le (3), (5), (6) le rimanenti costanti c, c', c''.

Si applica il precedente quesito ad estendere ai poligoni sferici le relazioni esistenti fra i raggi dei cerchi iscritto e circoscritto ad un poligono rettilineo e la distanza dei loro centri; infatti proiettando dal centro della sfera i due cerchi sferici di raggi α, β si avranno le superfici coniche $x^2+y^2=z^2 tang^2\alpha$, $y^2\cos^2\beta+x^2(\cos^2\beta-sen^2\delta)+z^2(\cos^2\beta-\cos^2\delta)$ $-2xz\, sen\,\delta\cos\delta=o$; eseguendo le sostituzioni $x=sen\,\alpha\, tang\,\alpha\, x'$, $y=sen\,\alpha\, tang\,\alpha\, y'$, $z=sen\,\alpha$, si otterranno le sezioni piane $x'^2+y'^2=1$,

$$y'^2 sen^2\alpha\cos^2\beta+x'^2 sen^2\alpha(\cos^2\beta-sen^2\delta)-\frac{2\,sen^2\alpha\; sen\,\delta\cos\delta}{tang\,\alpha}x'+$$

$$+sen^2\alpha\frac{(\cos^2\beta-\cos^2\delta)}{tang^2\alpha}=o;$$ e questa coinciderà con la conica (II) allorchè si faccia $B=o$, $B''=o$, $A=sen^2\alpha(\cos^2\beta-sen^2\delta)$, $A'=sen^2\alpha\cos^2\beta$, $A''=\cos^2\alpha(\cos^2\beta-sen^2\delta)$, $B'=sen\,\delta\cos\delta\, sen\,\alpha\cos\alpha$; e poichè si ha $B=B''=o$, l' equazione cubica (8) ammette la radice $s=A'$ e le circon-

ferenze trasformate (III), (IV) saranno $X^2+Y^2=1$, $(X^2+Y^2) sen^2\alpha cos^2\beta - 2 Y sen\delta sen\alpha cos\beta + (sen^2\delta - sen^2\beta cos^2\alpha) = o$, la seconda ha per raggio $\frac{tang\beta}{tang\alpha}$, ed il suo centro dista da quello del primo della quantità $\frac{sen\delta}{sen\alpha cos\beta}$; dunque nelle formule relative ai poligoni piani basterà sostituire $tang\alpha$ al raggio r del cerchio circoscritto, $tang\beta$ al raggio ρ del cerchio iscritto e l'espressione $\frac{sen\delta}{cos\alpha cos\beta}$ alla distanza d dei centri, onde ottenere le relazioni analoghe per i poligoni sferici.

34. — L'arco della lemniscata $r^2 = a^2 cos 2\omega$, compreso fra il vertice A ed il punto M di raggio vettore r, si è veduto alla pag. 12, num. 5, esprimersi con $s = \int_a^r \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}$; operando la sostituzione $r = a cos\varphi$, si trova $s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} sen^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right)$, e quindi un arco qualunque limitato dai raggi vettori $r_1 = a cos\varphi_1$, $r_2 = a cos\varphi_2$, equivale alla differenza $\frac{a}{\sqrt{2}}(F\varphi_2 - F\varphi_1) = \frac{a}{\sqrt{2}} F\mu$, essendo l'angolo μ determinato dalla relazione III, pag. 37:

$$sen\mu = \frac{sen\varphi_2 cos\varphi_1 \sqrt{1 - \frac{1}{2} sen^2\varphi_1} - sen\varphi_1 cos\varphi_2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} sen^2\varphi_2}}{1 - \frac{1}{2} sen^2\varphi_2 sen^2\varphi_1}.$$

Descritta l'iperbole equilatera concentrica e con lo stesso asse $2a$ della lemniscata, la lunghezza dell'arco AN compreso fra il vertice A ed il punto N inverso di M cioè $r' = \frac{a^2}{r} = \frac{a}{cos\varphi_1}$, è definito dall'integrale:

$$\widehat{AN} = \int_a^{r'} \frac{r'^2 dr'}{\sqrt{r'^4 - a^4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi_1}{cos^2\varphi_1 \Delta\varphi_1} = a\sqrt{2}\left[\Delta\varphi_1 tang\varphi_1 - E\varphi_1 + \frac{1}{2} F\varphi_1\right]$$

con il modulo $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Così all'arco $MM' = \frac{a}{\sqrt{2}}(F\varphi_1 - F\varphi_2) = \frac{a}{\sqrt{2}} F\mu$ della lemniscata corrisponde per l'iperbole equilatera l'arco $NN' =$

$a\sqrt{2}\left[\Delta\varphi_2 tang\varphi_2 - \Delta\varphi_1 tang\varphi_1 - (E\varphi_2 - E\varphi_1) + \frac{1}{2}(F\varphi_2 - F\varphi_1)\right]$, ovvero per la relazione $E\varphi_2 - E\varphi_1 = E\mu - \frac{1}{2} sen\,\mu\; sen\,\varphi_1\; sen\,\varphi_2$ si ha $\widehat{NN'} = a\sqrt{2}\left[\Delta\varphi_2 tang\,\varphi_2 - \Delta\varphi_1 tang\,\varphi_1 + \frac{1}{2} sen\,\mu\; sen\,\varphi_1\; sen\,\varphi_2 - E\mu + \frac{1}{2}F\mu\right]$. È dunque facile conchiudere il seguente teorema di Chasles: « *A due archi eguali della lemniscata corrispondono per la curva inversa due archi a differenza rettificabile.* » — *Comptes Rendus,* tomo XXI, anno 1845.

L'iperbole equilatera è un caso particolare della curva la cui equazione polare è della forma (1) $\rho^m = \frac{a^m}{\cos m\omega}$; detto α l'angolo della tangente nel punto M col raggio vettore OM si trova $tang\,\alpha = \rho\frac{d\omega}{d\rho} = \cot m\omega$, e quindi $m\omega = \frac{\pi}{2} - \alpha$; indicando poi con ρ_1 la normale OP menata sulla tangente ed ω_1 l'angolo di OP con l'asse polare, si otterrà $\omega - \omega_1 = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e per conseguenza (2) $\rho_1 = \rho\cos(\omega - \omega_1) = \rho\cos m\omega = a\cos^{\frac{m-1}{m}}\frac{m\omega_1}{m-1}$, equazione della prima pedale della curva (1). Con simile ragionamento si vedrà che la pedale della curva (2) o la seconda pedale della (1) ha per equazione polare (3) $\rho_2 = a\cos^{\frac{2m-1}{m}}\frac{m\omega_2}{2m-1}$ ec. Per $m = 2$ la linea (1) è l'iperbole equilatera, la (2) è la lemniscata e la (3) diviene la pedale del centro di questa linea sulle sue tangenti, cioè $\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cos\frac{2\omega}{3}$; mediante la sostituzione $\rho = a\cos^3\varphi$ si trova l'arco di questa curva eguale a

$$\frac{3a}{\sqrt{2}}\int_o^\varphi \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}sen^2\varphi}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}\left[2E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right) - F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right)\right];$$ che

preso fra i limiti o e $\frac{\pi}{2}$ dell'angolo φ darà la lunghezza del quadrante della curva medesima; paragonandola con l'espressione della differenza fra l'asintoto ed il ramo d'iperbole, pag. 33, si dimostra il teorema di William Roberts: « *La differenza fra un ramo infinito dell'iperbole equilatera ed il suo asintoto, eguaglia la terza parte del quadrante della sua seconda pedale.* »

35. — Ogni punto M dell' iperbole essendo determinato dalle coordinate $x = a\cos hu$, $y = b\,sen\,hu$, il suo arco AM contato dal vertice A dell' asse trasverso si esprime semplicemente con l' integrale $a\int_o^u du\sqrt{e^2\cos^2 hu - 1}$ in cui $e = \frac{c}{a}$; il semi-diametro OM ha per valore $a\sqrt{e^2 sen^2 hu + 1}$, ed il suo coniugato è $ON = a\sqrt{e^2\cos^2 hu - 1}$. Facendo per brevità $\sqrt{e^2\cos^2 hu - 1} = \Delta hu$, gl' integrali $\int_o^u \frac{du}{\Delta hu} = Lu$, $\int_o^u du\Delta hu = Iu$, si potranno chiamare iperbolici di prima e seconda specie riducibili agli ellittici per la sostituzione $sen\,hu = tang\,\varphi\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$; poichè da quest'ultima si deduce $du = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1 - \frac{1}{e^2} sen^2\varphi}}\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$, $\Delta hu = \frac{e}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$ e quindi:

$$Lu = \frac{1}{e}\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{e^2} sen^2\varphi}} = \frac{1}{e}F\left(\frac{1}{e}, \varphi\right), Iu = \left(e - \frac{1}{e}\right)\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi} =$$

$e\,\Delta\varphi\,tang\,\varphi + \left(e - \frac{1}{e}\right)F\left(\frac{1}{e}, \varphi\right) - eE\left(\frac{1}{e}, \varphi\right)$; ed è chiaro che per $u = \infty$ cioè $\varphi = \frac{\pi}{2}$ l' integrale iperbolico Iu diviene infinito; scrivendo poi $\frac{1}{e} = k$ risulta inversamente $F(k,\varphi) = \frac{1}{k}Lu$, $E(k,\varphi) = \frac{sen\,h\,2u}{2k\,\Delta hu} + \frac{(1-k^2)}{k}Lu - k\,Iu.$

La differenza fra l' asintoto OS e l' arco AM (fig. 8) si esprime con $a(e\cos hu - Iu)$, va crescendo con la variabile u e diviene massima per $u = \infty$.

Se α indica il valore di u_1 corrispondente ad $u = o$, l' equazione (1) $\frac{du}{\Delta hu} + \frac{du_1}{\Delta hu_1} = o$, ha per integrale (2) $Lu + Lu_1 = L\alpha$, ed applicando alla (1) il metodo di soluzione dato da Lagrange, pag. 48, si troveranno l' equazioni algebriche (3) $\frac{\Delta hu \pm \Delta hu_1}{sen\,h(u \pm u_1)} = \frac{\Delta h\alpha \pm \sqrt{e^2 - 1}}{sen\,h\,\alpha}$,

dalle quali eliminando $\Delta h \alpha$ consegue:

$$(4)\quad sen h \alpha = \frac{sen\, hu_1 \cos hu \,\Delta hu + sen\, hu \cos hu_1 \,\Delta hu_1}{e^2 - 1 - e^2 sen^2 hu\, sen^2 hu_1} \sqrt{e^2 - 1}$$

e da questa si ricavano:

$$(5)\quad \cos h \alpha = \frac{\cos hu \cos hu_1 (e^2 - 1) + \Delta hu \,\Delta hu_1\, sen\, hu\, sen\, hu_1}{e^2 - 1 - e^2 sen^2 hu\, sen^2 hu_1},$$

$$(6)\quad \Delta h \alpha = \sqrt{e^2 \cos^2 h \alpha - 1} = \frac{\Delta hu \,\Delta hu_1 + e^2 sen hu\, sen hu_1 \cos hu \cos hu_1}{e^2 - 1 - e^2 sen^2 hu\, sen^2 hu_1} \sqrt{e^2 - 1},$$

(7) $\cos h \alpha = \cos hu \cos hu_1 + sen\, hu\, sen\, hu_1 \dfrac{\Delta h \alpha}{\sqrt{e^2 - 1}}$, (8) $Iu + Iu_1 - I\alpha =$ $\dfrac{e^2}{\sqrt{e^2 - 1}}\, sen\, hu\, sen\, hu_1\, sen\, h \alpha$, ec.; e mutando il segno alla variabile u_1 si avranno gl' integrali dell' equazione differenziale $\dfrac{du}{\Delta hu} = \dfrac{du_1}{\Delta hu_1}$. Il significato geometrico dell' equazioni $\dfrac{\Delta hu \pm \Delta hu_1}{sen h (u - u_1)} = \dfrac{\Delta h \alpha \pm \sqrt{e^2 - 1}}{sen\, h \alpha}$ è simile a quello esposto per l' ellisse alla pag. 49; infatti essendo

$$sen h (u - u_1) = sen hu \cos hu_1 - sen hu_1 \cos hu = \frac{y x_1 - y_1 x}{ab} = \frac{2\, triang\, OMM'}{ab};$$

ed il parallelogrammo costruito sui due semi-diametri OM, OM' equivalendo a quello costruito sui loro semi-diametri coniugati $ON = a \Delta hu$, $ON' = a \Delta hu_1$ si deduce $triang\, OMM' = triang\, ONN'$; e però condotte le altezze NH, $N'H'$ del triangolo ONN' si conchiude la relazione $\dfrac{1}{NH} \pm \dfrac{1}{N'H'} = cost.$

Il teorema di Graves (num. 25) estendesi ad un' ellisse ed iperbole omofocali, e a due iperboli pure omofocali; con lo stesso metodo di dimostrazione si trova che le tangenti menate all' iperbole c da un punto P hanno per espressioni:

$$PT = a \left[\frac{\cos h (u - u_1) - 1}{sen h (u - u_1)}\right] \Delta hu, \quad PT_1 = a \left[\frac{\cos h (u - u_1) - 1}{sen h (u - u_1)}\right] \Delta hu_1$$

nelle quali u, u_1 sono le variabili corrispondenti ai punti di contatto T e T_1; e se P è un punto di una conica c' omofocale a c si avrà ripetendo il ragionamento della pag. 71, l' equazione $\dfrac{ds}{ds'} = \dfrac{PT^2}{PT_1^2}$ cioè: $\dfrac{du}{\Delta hu} = \dfrac{du_1}{\Delta hu_1}$; onde applicando le formule (3), (7) . . . . resulta

$$TP + PT_1 = a\,[\cos h\,(u - u_1) - 1]\left(\frac{\Delta\,h\,\alpha + \sqrt{e^2-1}}{sen\,h\,\alpha}\right) =$$

$= a\,tang\,h\,\frac{\alpha}{2}\,.\,(\Delta\,h\,\alpha + \sqrt{e^2-1}) - \frac{a\,e^2}{\sqrt{e^2-1}}\,sen\,hu\,sen\,hu_1\,sen\,h\,\alpha$, e siccome

$arco\,TT_1 = a(Iu_1 - Iu)$, o per la (8) $\widehat{TT_1} = aI\alpha - \frac{a\,e^2}{\sqrt{e^2-1}}\,sen\,hu\,sen\,hu_1\,sen\,h\,\alpha$

si conchiude $TP + PT_1 - \widehat{TT_1} = a\,[tang\,h\frac{\alpha}{2}\,(\Delta h\alpha + \sqrt{e^2-1}) - I\alpha] = cost.$

In simil modo il teorema di Mac-Cullagh (pag. 73, 74), si dimostra per le tangenti $T'P$, PT condotte da un punto di una conica ad un' iperbole omofocale ad essa; infatti supponendo $u > u_1$ resulta la differenza

(1') $PT - T'P = a\,tang\,h\,\frac{u - u_1}{2}\,(\Delta\,h\,u - \Delta\,hu_1)$; si noti con β l' ampiezza

iperbolica del punto M comune alle due coniche, le variabili u, u_1 siano collegate con β ed una variabile ausiliaria v per le relazioni integrali (2') $Lu = Lv + L\beta$, $Lu_1 = Lv - L\beta$; è chiaro che è soddisfatta l' equazione differenziale esprimente le due coniche esser omofocali. Applicando la formula (6) all' eguaglianze (2') si otterranno i valori $\Delta\,hu$, $\Delta\,hu_1$ in funzione di v, β e quindi la differenza:

$$\Delta\,hu - \Delta\,hu_1 = \frac{2\,e^2\,sen\,h\,\beta\,\cos h\,\beta\,sen\,h\,v\,\cos h\,v}{e^2 - 1 - e^2\,sen^2\,h\,\beta\,sen^2\,h\,v}\,\sqrt{e^2-1}\,;$$

inoltre dalla relazione (7) si deduce successivamente $\cos h\,v = \cos h\,\beta\,\cos hu -$

$- sen\,h\,\beta\,sen\,hu\frac{\Delta\,h\,v}{\sqrt{e^2-1}} = \cos h\,\beta\,\cos hu_1 + sen\,h\,\beta\,sen\,hu_1\,\frac{\Delta\,h\,v}{\sqrt{e^2-1}}$, da cui

$tang\,h\,\beta\,\frac{\Delta\,h\,v}{\sqrt{e^2-1}} = \frac{\cos hu - \cos hu_1}{sen\,hu + sen\,hu_1} = tang\,h\,\frac{(u - u_1)}{2}$, onde la (1') si pone

sotto la forma $PT - T'P = \frac{a\,e^2\,sen^2\,h\,\beta\,sen\,h\,2\,v\,\Delta\,h\,v}{e^2 - 1 - e^2\,sen^2\,h\,\beta\,sen^2\,h\,v}$. Ora dalle relazioni (8) si hanno l' espressioni degli archi iperbolici MT, $T'M$, cioè:

$\widehat{MT} = \widehat{AT} - \widehat{AM} = a\,(Iu - I\beta) = a\,Iv - a\,(I\beta + Iv - Iu) =$

$= a\,Iv - \frac{a\,e^2}{\sqrt{e^2-1}}\,sen\,h\,\beta\,sen\,h\,v\,sen\,h\,u$, $\widehat{T'M} = \widehat{T'A} + \widehat{AM} = a(Iu_1 + I\beta) =$

$= a\,Iv + a\,(I\beta + Iu_1 - Iv) = a\,Iv + \frac{a\,e^2}{\sqrt{e^2-1}}\,sen\,h\,\beta\,\,sen\,h\,v\,\,sen\,h\,u_1$, e

quindi $\widehat{T'M} - \widehat{MT} = \frac{a\,e^2}{\sqrt{e^2-1}}\,sen\,h\,\beta\,sen\,h\,v\,(sen\,hu_1 + sen\,hu)$; ricavando i

valori di $sen\,hu$, $sen\,hu_1$ in funzione delle ampiezze β, v mediante la (4), e

poi aggiungendole risulta $\operatorname{senh} u + \operatorname{senh} u_1 = \dfrac{2 \operatorname{senh} \beta \cosh v \, \Delta h v}{e^2 - 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 h \beta \operatorname{sen}^2 h v} \sqrt{c^2 - 1}$,

per il qual valore la differenza degli archi iperbolici $\widehat{T'M}$, $\widehat{MT}$ diviene identica a quella delle tangenti PT, $T'P$.

Da questa proposizione si deduce un' altra soluzione per determinare la differenza fra l' asintoto ed un ramo dell' iperbole (fig. 8), poichè basta costruire l' ellisse omofocale e circoscritta al rettangolo degli assi trasverso ed immaginario; chiamando a_1, b_1 i semi-assi dell' ellisse resulta $\dfrac{a^2}{a_1^2} + \dfrac{b^2}{a_1^2 - c^2} = 1$, da cui $a_1 = \sqrt{c(c+b)}$, $b_1 = \sqrt{bc}$, le coordinate dei punti di sezione delle due curve saranno $x = \pm a \sqrt{1 + \dfrac{b}{c}}$, $y = \pm b \sqrt{\dfrac{b}{c}}$; indicando con M_0 il punto comune alle due coniche e situato nell'angolo $x \, o \, y$, dalle formule della pag. 32, risulta $\tan \varphi_0 = \dfrac{c y_0}{b^2} = \sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $\Delta \varphi_0 = \sqrt{\dfrac{b}{c}}$, e però l'arco AM_0 dell' iperbole espresso con integrali ellittici è dato da $\widehat{AM_0} = c - cE\left(\dfrac{a}{c}, \varphi_0\right) + \dfrac{b^2}{c} F\left(\dfrac{a}{c}, \varphi_0\right)$. Ora il secondo termine rappresenta l' arco dell' ellisse avente i vertici nei fuochi dell' iperbole ed i fuochi nei vertici di questa curva, cioè gli assi eguali a c, b; il suo punto di Fagnani si ottiene per l' ampiezza $\tan \varphi = \sqrt{\dfrac{c}{b}}$ e perciò $\varphi = \varphi_0$, $2cE\left(\dfrac{a}{c}, \varphi_0\right) = cE\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{\pi}{2}\right) + c - b$, $2F\left(\dfrac{a}{c}, \varphi_0\right) = F\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; onde si ricava l'arco $AM_0 = \dfrac{c+b}{2} - \dfrac{c}{2} E\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{b^2}{2c} F\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Se B_1 è il punto d' intersezione dell' asintoto OS con la tangente al vertice A dell' iperbole, per il teorema dimostrato si ha $B_1 M_\infty - AB_1 = \widehat{M_0 M_\infty} - \widehat{AM_0} = \widehat{AM_\infty} - 2\widehat{AM_0}$ ed anche $OM_\infty - \widehat{AM_\infty} = OB_1 + AB_1 - 2\widehat{AM_0} = cE\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{b^2}{c} F\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ come fu trovato alla pag. 33.

Le relazioni (7), (8) si applicano facilmente a dividere un arco dato AB d' iperbole in due archi aventi la differenza rettificabile, ed a costruire per cerchi e rette due punti M, M', tali che l' arco MM' sia la metà dell' arco AB.

Dall' equazione $TP + PT_1' - \widehat{TT_1} = cost$: essendo P un punto del piano e PT, PT' le tangenti condotte all'iperbole, si deduce $d(TP + PT_1 - \widehat{TT_1}) = o$

e poichè in generale $TP + PT_1 = a\, tang h \frac{1}{2}(u - u_1)(\Delta hu + \Delta hu_1)$, $\widehat{TT_1} =$ $= a(Iu_1 - Iu)$ si avrà differenziando quest' eguaglianze e poi sottraendo le $(\Delta hu + \Delta hu_1)(du - du_1) + \frac{e^2}{2} sen h(u - u_1)\left(sen h 2u \frac{du}{\Delta hu} + sen h 2 u_1 \frac{du_1}{\Delta hu_1}\right) +$ $+ (cos h (u - u_1) - 1)(du \Delta hu - du_1 \Delta hu_1) = o$, la quale è identicamente soddisfatta per la proporzione $\frac{du}{\Delta hu} = \frac{du_1}{\Delta hu_1}$; ed integrando $Lu_1 - Lu =$ $L \varkappa$. Si otterrà il luogo del punto $P(x, y)$ con l'eliminazione delle variabili u, u_1 fra le tre equazioni $cos h \varkappa = cos hu\, cos hu_1 - sen hu\, sen hu_1 \frac{\Delta h \varkappa}{\sqrt{e^2 - 1}}$,
$cos hu\, cos hu_1 = \frac{a^2 \varepsilon (b^2 + y^2)}{b^2 x^2 - a^2 y^2}$, $sen hu\, sen hu_1 = \frac{\varepsilon b^2 (x^2 - a^2)}{b^2 x^2 - a^2 y^2}$, significando con ε l' unità positiva o negativa secondo che i punti di contatto T, T' giacciono dalla stessa parte, od opposta dell' asse trasverso.

L' equazione del luogo si riduce alla forma $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$; in cui

$$a_1^2 = a^2 \varepsilon \left(\frac{\Delta h \varkappa + \sqrt{e^2 - 1}}{cos h \varkappa \sqrt{e^2 - 1} + \varepsilon \Delta h \varkappa}\right), \quad b_1^2 = \frac{\varepsilon b^2}{\sqrt{e^2 - 1}}\left(\frac{\Delta h \varkappa + \sqrt{e^2 - 1}}{cos h \varkappa + \varepsilon}\right),$$

e con facile calcolo si conchiude $a_1^2 + \varepsilon b_1^2 = a^2 + b^2 = c^2$, la conica è un' ellisse (od iperbole) omofocale, se ε è l' unità positiva (o negativa).

I differenziali degli archi di due curve inverse riferite allo stesso asse polare ed al centro O d' inversione siano ds, ds_1; a motivo delle formule $ds_1^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\omega^2$, $r_1 = \frac{a^2}{r}$, risulta $ds_1^2 = \frac{a^4}{r^4}(dr^2 + r^2 d\omega^2) =$ $= \frac{a^4 ds^2}{r^4}$, cioè $ds_1 = \frac{a^2}{r^2} ds$; così essendo l' arco dell' iperbole equilatera $\widehat{AN} = a \int_o^u du \sqrt{2 cos^2 h u - 1} = a \int_o^u du \sqrt{cos h 2 u}$ ed il suo raggio centrale $ON = r = a \sqrt{cos h 2 u}$, si troverà per la curva inversa l' arco $\widehat{AM} = a \int_o^u \frac{du}{\sqrt{cos h 2 u}}$, ed il raggio vettore $OM = \frac{a}{\sqrt{cos h 2 u}}$. Se l'arco MM' di questa lemniscata è di lunghezza costante, si avrà l' equazione $d(\widehat{AM'} - \widehat{AM}) = o$, ovvero $\frac{du}{\sqrt{cos h 2 u}} = \frac{du_1}{\sqrt{cos h 2 u_1}}$: il cui integrale è

$Lu_1 - Lu = L\alpha$, dove la costante α è il valore di u_1 per $u = o$; nell'iperbole equilatera vi corrisponderà l'arco $NN' = a(Iu_1 - Iu) = a I\alpha - 2a\, sen\,hu\; sen\,hu_1\; sen\,h\alpha$, e le due variabili u, u_1 sono collegate con la costante α per la relazione

$$\cos hu \cos hu_1 - sen\,hu\; sen\,hu_1 \sqrt{\cos h 2\alpha} = \cos h\alpha,$$

dunque si deduce nuovamente il teorema di Chasles « *a due archi dell'iperbole aventi la differenza rettificabile corrispondono due archi eguali della lemniscata.* » Le normali ai raggi vettori di questa curva negli estremi di ciascuno MM' degli archi eguali toccano l'iperbole in due punti che determinano un arco $N_1' N_1'$ eguale a quello NN' intercetto dai prolungamenti dei raggi vettori, pag. 47, ed ognuno di questi archi iperbolici dicesi il corrispondente dell'arco di lemniscata l.

Il luogo dei punti d'incontro delle normali ai raggi vettori negli estremi degli archi eguali di l è un'iperbole omofocale all'iperbole equilatera generatrice di l; infatti si è provato che il luogo dei punti d'incontro delle tangenti menate agli estremi degli archi associati dell'iperbole è una conica a centro omofocale ad essa, e però fatto $\varepsilon = 1$, $e^2 = 2$ l'equazione del luogo sarà $x^2(\sqrt{\cos h 2\alpha} + \cos h\alpha) - y^2(1 + \cos h\alpha) = a^2(1 + \sqrt{\cos h 2\alpha})$. Quest'iperbole serve a costruire archi della lemniscata l eguali ad un arco dato, ed anche a trovare un arco di l eguale alla somma o differenza di due archi dati.

Se a contare da un punto della lemniscata l si prendono da ambe le parti due archi eguali fra loro, ma di lunghezza arbitraria e dai loro estremi si innalzano le normali ai raggi vettori, il punto ad esse comune sarà un'ellisse omofocale all'iperbole generatrice di l. Poichè siano $\widehat{M_1 M_0}$, $\widehat{M_0 M_2}$, due archi eguali della lemniscata, u_0 la costante che definisce il punto fisso M_0, ed u_1, u_2 le variabili che determinano i punti M_1, M_2, si avrà l'equazione $Lu_0 - Lu_1 = Lu_2 - Lu_0$, da cui $Lu_1 + Lu_2 = 2Lu_0$, integrale dell'equazione $\dfrac{du_1}{\sqrt{\cos h 2u_1}} + \dfrac{du_2}{\sqrt{\cos h 2u_2}} = o$, e quindi detto α il valore di u_2 per $u_1 = o$ si ha l'equazione algebrica $\cos hu_1 \cos hu_2 + sen\,hu_1\; sen\,hu_2 \sqrt{\cos h 2\alpha} = \cos h\alpha$; si notino con x, y le coordinate del punto P sezione delle normali ai raggi vettori nei punti M_1, M_2 a motivo delle relazioni: $\cos hu_1 \cos hu_2 = \dfrac{a^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, $sen\,hu_1\; sen\,hu_2 = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 - y^2}$, il luogo di P sarà l'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{\cos h 2\alpha} - \cos h\alpha}{\sqrt{\cos h a} - 1}\right) + \frac{y^2}{a^2}\left(\frac{1 + \cos h\alpha}{\sqrt{\cos h\alpha} - 1}\right) = 1,$$

e facilmente si verifica che la differenza fra i quadrati dei semi-assi è eguale a $2a^2$.

Ogni tangente all'iperbole equilatera generatrice della lemniscata l ha l'equazione della forma $x \cos hu - y \operatorname{sen} hu = a$; indicando con X, Y le coordinate del punto inverso di x, y dalla serie dei rapporti eguali $\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{a^2}{X^2 + Y^2}$, si deducono le formule di trasformazione; dunque la curva inversa della tangente iperbolica è il cerchio $X^2 + Y^2 + a \operatorname{sen} hu\, Y - a \cos hu\,.\, X = o$, che passa per il centro ed ha per inviluppo la lemniscata l; i centri di questi circoli giacciono sull'iperbole equilatera $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{a^2}{4}$ omofocale ad l. Parimente il luogo del secondo punto d'intersezione dei due cerchi passanti per il centro e tangenti ad l negli estremi di ciascuno degli archi di lunghezza costante $a L \alpha$ è la linea inversa dell'iperbole $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, ed avendo per equazione $a^4 \left(\frac{X^2}{a_1^2} - \frac{Y^2}{b_1^2}\right) = (X^2 + Y^2)^2$ è una specie di lemniscata pedale del centro di un'iperbole sulle sue tangenti.

Infine le quattro normali ai raggi vettori estremi di due archi eguali di l toccano la sua iperbole generatrice negli estremi di due archi associati e però formano un quadrilatero circoscrittibile al cerchio, dunque mediante l'inversione si conchiude: « *i quattro cerchi passanti per il centro della lemniscata e tangenti alla curva negli estremi di due archi eguali, sono tangenti ad uno stesso cerchio.* » *Comptes Rendus* 1845, pag. 199. *De quelques propriétés des arcs égaux de la lemniscate,* par M. Chasles.

36. — Un importante sistema di coordinate per le linee piane ed analogo al sistema polare consiste nell'assumere per variabili il raggio vettore r condotto dal polo O al punto M della curva e la perpendicolare $p = OP$ abbassata da O sulla tangente MT; posto $MP = t$, $OMP = \alpha$ inclinazione del raggio vettore sulla tangente, resultano le semplici relazioni (1) $r^2 = p^2 + t^2$, (2) $\operatorname{tang} \alpha = \frac{p}{t} = \frac{r\,d\omega}{dr}$; dalle quali si ottiene: (3) $p^2 = \frac{r^4}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}$; il raggio di curvatura si determina con la formula (4) $R = \frac{r\,dr}{dp}$; ed il quadrato del differenziale dell'arco essendo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2$, a motivo della (2) si trasforma in $ds^2 = dr^2 + \frac{p^2 dr^2}{t^2} = \frac{r^2 dr^2}{t^2}$,

e per conseguenza (5) $ds = \frac{r\,dr}{t} = \frac{p}{t}\,dp + dt$. Prendendo gli assi cartesiani ortogonali, con l'origine nel polo, ed Ox coincidente con l'asse polare, si ha (6) $r^2 = x^2 + y^2$, $p = \pm\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)$; così dall'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$, si deduce $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{p^2}$, ed eliminando le variabili x^2, y^2 fra queste due ultime e la prima delle (6) si conchiude $r^2 p^2 - p^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2 = o$, ovvero (7) $p^2(a^2 + b^2 - r^2) = a^2 b^2$; dalla quale apparisce l'ellisse appartenere alla classe delle curve aventi l'equazione della forma (8) $f\,[(k^2 - r^2)\,p^2,\ (k^2 - p^2)\,r^2,\ c] = o$, ove c, k sono quantità costanti. Al punto M di coordinate r, p si faccia corrispondere il punto $M'(r_1, p_1)$ in modo che sia $r_1^2 = k^2 - p^2$, $p_1^2 = k^2 - r^2$; evidentemente M' giace sulla stessa curva, e ne risulta $t^2 = r^2 - p^2 = r_1^2 - p_1^2 = t_1^2$, cioè $t = t_1$. Inoltre dall'equazione $p^2 + r_1^2 = k^2$ si ricava $p\,dp + r_1\,dr_1 = o$, ed in virtù di questa eguaglianza la (5) diviene $ds = -\frac{r_1\,dr_1}{t_1} + dt = -ds_1 + dt$ contando gli archi s ed s_1 in senso opposto da due punti fissi N, N' della curva; integrando la precedente si avrà $s - s_1 = t$; la quale estensione del teorema di Fagnani alle curve rappresentate dalla (8) fu data dal professor John Griffiths di Oxford l'anno 1880. (*) Similmente dall'equazione polare della spirale parabolica $(a - r)^2 = 2ab\omega$, pag. 1ª, si deduce $\frac{d\omega}{dr} = \frac{r - a}{ab}$, perciò la stessa curva si rappresenta pure con la relazione $r^2(r - a)^2\,(r^2 - p^2) = a^2 b^2 p^2$; è facile vedere che posto $r = a - r_1$, $\frac{p_1}{p} = \frac{r_1}{r}$ e quindi $\frac{r_1}{r} = \frac{t_1}{t}$, il punto M' definito da questi rapporti giace sulla spirale e dalla (5) resulta $ds_1 = \frac{r_1\,dr_1}{t_1} = \frac{r}{t}\,dr_1 = -\frac{r\,dr}{t} = -ds$ cioè $s + s_1 = cost.$, che esprime il teorema di Bernoulli, dunque nei punti associati M, M' i triangoli rettangoli OMP, $OM'P'$, sono simili; la qual proprietà si estende alle curve aventi l'equazione differenziale della forma $f\left[r^2(r - a)^2,\ \frac{r^2 - p^2}{p^2},\ \frac{r^2 - p^2}{r^2},\ c\right] = o$. Data la curva $f(r, p) = o$, si trova quella della sua prima pedale con le sostituzioni $p = r_1$, $r = \frac{r_1^2}{p_1}$, poichè l'angolo α della tangente MT col raggio vettore OM è eguale a quello che la tangente PT' alla pedale fa con il suo corrispondente raggio vettore OP; così per es., dall'equazione $pr = a^2$ dell'iperbole equilatera si deduce la lemniscata $r_1^3 = a^2 p_1$, indi la pedale della lemni-

(*) *Proceedings of the London Mathematical Society*. Vol. XI, pag. 87.

scata $r_2^5 = a^2 p_2^3, \ldots$ ed in generale $r_n^{2n+1} = a^2 p_n^{2n-1}$ per la curva n^{sima} pedale dell' iperbole equilatera. Se chiamasi λ l'angolo che OP fa con l'asse polare, le coordinate polari del punto P sono p, λ e però l'angolo α della tangente PT' col raggio vettore OP è dato da $tang\,\alpha = \frac{p\,d\lambda}{dp}$, e siccome dalla (2) si ha pure $tang\,\alpha = \frac{p}{t}$; si ottiene col confronto $t = \frac{dp}{d\lambda}$; onde l'elemento differenziale della curva M per la (5) si esprime con $ds = p\,d\lambda + dt$, ed integrando $s = \int p\,d\lambda + t$.

37. — Col metodo della proiezione centrale facilmente si trasformano le curve piane in curve sferiche; sia una linea piana s referita al polo S ed all'asse polare Sx, posto $SM = r$, l'angolo $xSM = \omega$, $PM = t$ segmento della tangente compreso fra il punto di contatto M ed il piede P della normale $SP = p$ abbassata dal polo sulla tangente, s'innalzi la perpendicolare $OS = c$ al piano della curva, e descrivasi col centro in O e raggio eguale ad uno la superficie sferica; proiettando su questa da O la curva s, si otterrà una curva sferica σ e le proiezioni delle rette SM, MP, PS saranno gli archi di circolo massimo $\widehat{S'M'} = \rho$, $\widehat{M'P'} = \tau$, $P'S' = \varpi$. Il triangolo sferico $M'S'P'$ è rettangolo in P' e per conseguenza (1) $cos\,\rho = cos\,\varpi\; cos\,\tau$; chiamando θ l'angolo $P'M'S$ dallo stesso triangolo si ricava (2) $cos\,\theta = \frac{tang\,\tau}{tang\,\rho}$.

Dai triangoli rettilinei OSM, OSP si ottengono (3) $OM = \frac{c}{cos\,\rho}$, $r = c\,tang\,\rho$, $p = c\,tang\,\varpi$, ed essendo ω l'inclinazione del piano OSM col piano OSx sarà comune l'angolo polare alle due curve piane e sferiche, perciò se nell'equazione $f(r, \omega) = o$ della linea s si sostituisca $c\,tang\,\rho$ in luogo di r, si avrà l'equazione della curva sferica σ; così per es.. dall'ellisse piana $r^2\left(\frac{cos^2\,\omega}{a^2} + \frac{sen^2\,\omega}{b^2}\right) = 1$, resulta l'ellisse sferica

(4) $tang^2\,\rho\left(\frac{cos^2\,\omega}{tang^2\,\alpha} + \frac{sen^2\,\omega}{tang^2\,\beta}\right) = 1$; in cui α e β, sono gli archi corrispondenti ai raggi vettori a, b semi-assi dell'ellisse piana. Divisa l'equazione (4) per $tang^2\,\rho$, e poi aggiunta l'unità ai due membri si otterrà

(5) $\frac{cos^2\,\omega}{sen^2\,\alpha} + \frac{sen^2\,\omega}{sen^2\,\beta} = \frac{1}{sen^2\,\rho}$.

Gli assi dell'ellisse sferica sono i due archi di cerchio massimo 2α, 2β, fra loro normali e bisecantisi in S'; i fuochi F, F' non sono le

proiezioni centrali dei fuochi dell' ellisse piana, sibbene le intersezioni dell' asse maggiore 2α con il cerchio descritto da un vertice dell' asse minore come centro sferico e con raggio eguale ad α; e quindi posto $\widehat{F'S'} = \widehat{S'F} = \varepsilon$, sarà (6) $\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. *L' ellisse sferica è il luogo geometrico dei vertici M' dei triangoli isoperimetri, ed aventi la base comune* $\widehat{FF'}$.

Poichè si ponga $\widehat{F'M'} + \widehat{M'F} = 2\alpha$, $\widehat{CM'} = \rho$, $FCM' = \omega$, e si avranno l' eguaglianze $\cos\widehat{FM'} = \cos\rho\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\rho\operatorname{sen}\varepsilon\cos\omega$, $\cos\widehat{F'M'} = \cos\rho \times \cos\varepsilon - \operatorname{sen}\rho\operatorname{sen}\varepsilon\cos\omega$, dalle quali ne conseguono le relazioni $\cos\widehat{FM'} + \cos\widehat{F'M'} = 2\cos\rho\cos\varepsilon$, $\cos\widehat{FM'} - \cos\widehat{F'M'} = 2\operatorname{sen}\rho\operatorname{sen}\varepsilon\cos\omega$; trasformando i primi membri in prodotti, le precedenti divengono:

$$\cos\left(\frac{FM' - F'M'}{2}\right) = \frac{\cos\varepsilon\cos\rho}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{FM' - F'M'}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\rho\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha},$$

che innalzate a quadrato e poi aggiunte conducono alla relazione: $1 = \frac{\cos^2\varepsilon\cos^2\rho}{\cos^2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon\operatorname{sen}^2\rho\cos^2\omega}{\operatorname{sen}^2\alpha}$; ed eliminando ε mediante la (6) si troverà la stessa equazione (5). Parimente nell' eguaglianza $p^2(a^2 + b^2 - r^2) = a^2 b^2$, sostituendo i valori di p, r dati dalle (3) si giungerà all' equazione differenziale dell' ellisse sferica, cioè (7) $\operatorname{tang}^2\varpi(\operatorname{tang}^2\alpha + \operatorname{tang}^2\beta - \operatorname{tang}^2\rho) = \operatorname{tang}^2\alpha\operatorname{tang}^2\beta$.

Il differenziale dell' arco di una linea sferica si ottiene direttamente in coordinate polari, poichè condotti i raggi sferici $\widehat{S'M'} = \rho$, $\widehat{S'N'} = \rho + d\rho$ corrispondenti agli angoli ω, $\omega + d\omega$ e descritto col centro sferico in S' e raggio ρ l' arco $M'M''$ segante in M'' l' arco AN', si avrà $\lim\widehat{M'M''} = \operatorname{sen}\rho \,.\, d\omega$, e dal triangolo infinitesimo $M'M''N'$ rettangolo in M'' si dedurrà (8) $d\sigma^2 = d\rho^2 + \operatorname{sen}^2\rho\, d\omega^2$, come pure (9) $\operatorname{tang}\theta = \lim\frac{\widehat{M'M''}}{M''N'} = \frac{\operatorname{sen}\rho\, d\omega}{d\rho}$; confrontando queste due ultime ed applicando la (2) resulta (10) $d\sigma = \frac{d\rho}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{tang}\rho}{\operatorname{tang}\tau} d\rho$. Inoltre si osservi che differenziando la relazione $\cos\rho = \cos\varpi \,.\, \cos\tau$ e poi dividendo l' eguaglianza che ne risulta per la stessa relazione, si ottiene $\operatorname{tang}\rho \,.\, d\rho = \operatorname{tang}\varpi \,.\, d\varpi + \operatorname{tang}\tau \,.\, d\tau$; è chiaro che la (10) si trasforma nella (11) $d\sigma = d\tau + \frac{\operatorname{tang}\varpi}{\operatorname{tang}\tau} d\varpi$. I triangoli rettilinei OPS, OPM danno pure

l'eguaglianze $OP = \frac{c}{\cos\varpi}$, $PM = t = OP\, tang\,\tau = \frac{c\, tang\,\tau}{\cos\varpi}$, e siccome $t = \frac{dp}{d\lambda}$, $p = c\, tang\,\varpi$ si troverà facilmente $d\lambda = \frac{d\varpi}{\cos\varpi\, tang\,\tau}$ e la (11) diviene (12) $d\sigma = d\tau + sen\,\varpi\, d\lambda$, formula simile a quella dimostrata per le curve piane. Si possono ottenere altre notevoli espressioni per $d\sigma$; così dall'equazione $\cos\rho = \cos\varpi \cos\tau$, ovvero (13) $1 + tang^2\rho = (1 + tang^2\varpi)(1 + tang^2\tau)$ si deduce $\frac{tang^2\rho}{tang^2\tau} = 1 + \frac{tang^2\varpi}{sen^2\tau}$, e quindi la (10) assume la forma (14) $d\sigma^2 = d\rho^2 + \frac{tang^2\varpi}{sen^2\tau} d\rho^2$; la quale paragonata con la (8) dà la relazione (15) $tang\,\varpi = \pm \frac{d\omega}{d\rho} sen\,\rho\, sen\,\tau$, ec.

Volendo rettificare l'ellisse sferica, si osservi che sostituendo nella equazione (7) a $tang^2\varpi$ il suo valore dedotto dalla (13) cioè $\frac{tang^2\rho - tang^2\tau}{1 + tang^2\tau}$ si avrà (16) $tang^2\tau = \frac{(tang^2\alpha - tang^2\rho)(tang^2\rho - tang^2\beta)}{(1 + tang^2\alpha)(1 + tang^2\beta) - (1 + tang^2\rho)}$.

Pongasi per brevità $tang\,\alpha = a$, $tang\,\beta = b$, poichè l'equazione (4) dell'ellisse sferica è soddisfatta dalle seguenti $tang\,\rho \cos\omega = a\, sen\,\varphi$, $tang\,\rho\, sen\,\omega = b\cos\varphi$, con φ variabile ausiliaria, si avrà $tang^2\rho = a^2 sen^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = b^2 + (a^2 - b^2) sen^2\varphi$; onde per questo valore la (16) diviene

$$tang^2\tau = \frac{(a^2 - b^2)\cos^2\varphi\, sen^2\varphi}{a^2(1 + b^2) - (a^2 - b^2) sen^2\varphi},$$

e quindi la (10)

$$d\sigma = \frac{d\varphi\,[a^2(1 + b^2) - (a^2 - b^2) sen^2\varphi]}{[(1 + b^2) + (a^2 - b^2) sen^2\varphi]\sqrt{a^2(1 + b^2) - (a^2 - b^2) sen^2\varphi}},$$

aggiungendo al numeratore la quantità nulla $d\varphi(1 + b^2) - d\varphi(1 + b^2)$, e facendo $\frac{a^2 - b^2}{a^2(1 + b^2)} = k^2$, $\sqrt{1 - k^2 sen^2\varphi} = \Delta\varphi$, la precedente si riduce alla forma (17) $d\sigma = \frac{1}{a\sqrt{1 + b^2}}\left[\frac{(1 + a^2)\, d\varphi}{(1 + a^2 k^2 sen^2\varphi)\,\Delta\varphi} - \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right]$; dunque la rettificazione dell'ellisse sferica dipende dagl'integrali ellittici di prima e terza specie.

La quadratura di una parte della superficie sferica limitata da una curva chiusa, il cui perimetro non s'interseca, trovasi in coordinate polari per l'integrale (18) $A = \int (1 - \cos\rho)\, d\omega$; infatti s'immagini di-

visa la superficie in rettangoli sferici infinitesimi formati da meridiani SM', SM'' facenti fra loro un angolo $d\omega$ e da paralleli $M'M''$, $N'N''$ vicinissimi, essendo i punti N', N'' situati sui respettivi archi SM', SM''; per conseguenza $A = lim\, \Sigma\, \widehat{M'N'} . \widehat{M'M''}$; osservando che $lim\, \widehat{M'N'} = d\rho$ $lim\, \widehat{M'M''} = sen\, \rho\, .\, d\omega$, si deduce $A = \int \int sen\, \rho\, d\omega\, d\rho = \int (C - cos\, \rho)\, d\omega$, ed il valore della costante C è l'unità, se per $\rho = o$ l'area si annulla. Così dall'equazione polare (5) dell'ellisse sferica si ricava:

$$cos\, \rho = cos\, \alpha \sqrt{\frac{1 + \frac{tang^2 \alpha}{tang^2 \beta} tang^2 \omega}{1 + \frac{sen^2 \alpha}{sen^2 \beta} tang^2 \omega}},$$ ed eseguendo la sostituzione

$\frac{tang\, \alpha}{tang\, \beta} tang\, \omega = tang\, \varphi$, si trovano $cos\, \rho = \frac{cos\, \alpha}{\sqrt{1 - sen^2 \varepsilon\, sen^2 \varphi}}$,

$d\omega = \frac{tang\, \beta}{tang\, \alpha} \frac{d\varphi}{1 - \frac{sen^2 \varepsilon}{sen^2 \alpha} sen^2 \varphi}$; per i quali valori l'integrale (18) determinato fra i limiti o e $\frac{\pi}{2}$ darà l'area della quarta parte dell'ellisse sferica $A = \frac{\pi}{2} - \frac{tang\, \beta}{tang\, \alpha} cos\, \alpha \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{sen^2 \varepsilon}{sen^2 \alpha} sen^2 \varphi\right) \sqrt{1 - sen^2 \varepsilon\, sen^2 \varphi}}$, integrale completo ellittico di terza specie di parametro circolare, poichè $\frac{sen^2 \varepsilon}{sen^2 \alpha}$ è minore di uno.

Misurando i due archi σ, σ' di una curva sferica dai suoi punti fissi A, B e fatte le ipotesi $tang\, \tau = tang\, \tau'$, $tang\, \varpi\, d\varpi + tang\, \rho'\, d\rho' = o$, ne consegue $\sigma - \sigma' = \tau$, ed integrando l'antecedente equazione risulta $cos\, \varpi\, .\, cos\, \rho' = cost.$, da cui $\frac{cos\, \rho}{cos\, \rho'} = \frac{cos\, \varpi}{cos\, \varpi'}$; viceversa da questa proporzione e dall'altra $cos\, \rho = cos\, \varpi\, .\, cos\, \tau$, si deduce $cos\, \tau = cos\, \tau'$; *la differenza degli archi σ, σ' è rettificabile per linee circolari:* adunque per l'ellisse sferica sussiste il teorema di Fagnani dimostrato per le coniche piane, pag. 22-26, A e B sono i vertici del quadrante; la proporzione surriferita fra i coseni dei raggi vettori dei punti associati e delle normali agli archi tangenti si può scrivere sotto la forma $\frac{1 + tang^2 \rho'}{1 + tang^2 \rho} = \frac{1 + tang^2 \varpi'}{1 + tang^2 \varpi}$, ed eliminando i raggi vettori mediante l'equazione differenziale della ellisse si conchiude $(1 + cot^2 \varpi)(1 + cot^2 \varpi') = (1 + cot^2 \alpha)(1 + cot^2 \beta)$; ovvero

(I) $sen\,\varpi\,sen\,\varpi' = sen\,\alpha\,sen\,\beta$. Attribuiscasi a ϖ il valore α e si troverà per soluzione più semplice $\varpi' = \beta$, cui corrisponde il raggio vettore $\rho' = \beta$; onde l'equazione integrale $cos\,\varpi\,.\,cos\,\rho' = cost.$, diviene $cos\,\varpi\,.\,cos\,\rho' = cos\,\alpha\,cos\,\beta$.

Il massimo τ_0 dell'arco τ si potrà dedurre dall'equazione generale $tang^2\tau = \frac{(a^2 - tang^2\rho)(tang^2\rho - b^2)}{a^2 + b^2 + a^2b^2 - tang^2\rho}$, e facilmente si otterrà:

$$tang\,\tau_0 = a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2} = \frac{sen\,\alpha - sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta},$$

$$tang^2\rho_0 = \frac{a^2 + b^2 + \left(a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2}\right)^2}{2},$$

$tang^2\varpi_0 = \frac{ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} - ab}$; il qual risultato si deduce pure col fare $\varpi' = \varpi$ nella relazione (I) ed il punto V dell'ellisse corrispondente a questi valori si dice *punto di sezione circolare*. Mediante l'ampiezza φ del punto ellittico M, cioè ponendo $tang^2\rho = a^2\,sen^2\varphi + b^2\,cos^2\varphi$, $\frac{a^2 - b^2}{1 + b^2} = c^2$, e $k^2 = \frac{c^2}{a^2}$ si trova in generale $tang\,\tau = \frac{k\,sen\,\varphi\,cos\,\varphi\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - k^2\,sen^2\varphi}}$, ed il massimo di τ si avrà scrivendo $\frac{d\,tang\,\tau}{d\varphi} = o$, ovvero $k^2\,sen^4\varphi_0 - 2\,sen^2\varphi_0 + 1 = o$; identica a quella trovata alla pag. 25; si ricava $tang\,\varphi_0 = \sqrt{\frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta}}$, e quindi nuovamente lo stesso valore di $tang\,\tau_0$. Il raggio vettore $\widehat{OV} = \rho_0$ fa con l'asse maggiore l'angolo ω_0 dato dalla relazione $tang\,\omega_0 = \frac{b}{a}\,cotang\,\varphi_0 = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}}$, e con l'arco τ di cerchio massimo tangente in V all'ellisse l'angolo θ_0 tale che sia $cos\,\theta_0 = \frac{tang\,\tau_0}{tang\,\rho_0}$, ovvero $sen\,\theta_0 = \frac{sen\,\varpi_0}{sen\,\rho_0}$.

Siano A_1 e B_1 i punti d'intersezione dell'arco tangente τ con i prolungamenti dei due semi-assi AO, OB, applicando la nota relazione fra due lati, l'angolo compreso e l'angolo opposto ad uno di essi, si avranno dai triangoli sferici OVA_1, OB_1V l'eguaglianze:

$$cot\,VA_1 = \frac{sen\,\theta_0\,cot\,\omega_0 - cos\,\theta_0\,cos\,\rho_0}{sen\,\rho_0} = \frac{sen\,\varpi_0\,cot\,\omega_0 - cos^2\rho_0\,tang\,\tau_0}{sen^2\rho_0} = \frac{cos\,\beta}{sen\,\beta\,cos\,\alpha}$$

$$cot\,B_1V = \frac{sen\,\varpi_0\,tang\,\omega_0 + cos^2\rho_0\,tang\,\tau_0}{sen^2\rho_0} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha\,cos\,\beta};$$

dalle quali risultano $tang\, VA_1 = b \cos\alpha$, $tang\, B_1 V = a \cos\beta$,

$$tang\,(B_1 V - VA_1) = \frac{sen\,\alpha - sen\,\beta}{\cos\alpha \cos\beta} = tang\,\tau_0, tang(B_1 V + VA_1) = \frac{sen\,\alpha + sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta};$$

Se il raggio della sfera diviene infinito si avrà $VA_1 = b$, $B_1 V = a$, (pag. 22-23); e così per la tangente nel punto di sezione rettilinea o circolare di un' ellisse piana o sferica si ha il teorema di Fagnani espresso per $\widehat{BV} - \widehat{VA} = B_1 V - VA_1 = \tau_0$.

38. — Anche la formula di addizione degl' integrali ellittici di terza specie (pag. 39) conduce direttamente alla proposizione di Fagnani; infatti ponendo $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2(1+b^2)}$, $n = a^2 k^2$, quella formula diviene:

$$\Pi\varphi' + \Pi\varphi - \Pi\mu = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{1+a^2} arc\,tang \frac{(a^2-b^2)(a^2+1)\, sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'}{a\sqrt{1+b^2}[a^2+1-(a^2-b^2)\cos\mu\cos\varphi\cos\varphi']}$$

in cui $\cos\mu = \cos\varphi\cos\varphi' - sen\,\varphi\, sen\,\varphi' \Delta\mu$, e poichè l'arco di ellisse sferica misurato dal vertice B del semi-asse minore ha per espressione $\widehat{BM} = \frac{(1+a^2)\Pi\varphi - F\varphi}{a\sqrt{1+b^2}}$, ed è un quadrante quando sia $\varphi = \frac{\pi}{2}$, si deduce che l'arco inverso di BM, con l'origine al vertice A, valutato nello stesso senso dell'arco diretto è dato da $\widehat{M'A} = \frac{1+a^2}{a\sqrt{1+b^2}}\left(\Pi\frac{\pi}{2} - \Pi\varphi'\right) - \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}}\left(F\frac{\pi}{2} - F\varphi'\right)$. Applicando la surriferita formula di addizione con $\mu = \frac{\pi}{2}$, risulta $\widehat{BM} - \widehat{M'A} = arc\,tang \frac{(a^2-b^2)\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'}{a\sqrt{1+b^2}}$, le amplitudini φ, φ' sono collegate dalla relazione di Lagrange che si riduce alla seguente $tang\,\varphi\, tang\,\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}} = \frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta}$, dalla quale si ricavano $sen\,\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$, $sen\,\varphi = \frac{\cos\varphi'}{\Delta\varphi'}$ e quindi $\frac{sen\,\varphi'\cos\varphi'}{\Delta\varphi'} = \frac{sen\,\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}$; la differenza degli archi associati ha per valore $arc\,tang \frac{(a^2-b^2)\, sen\,\varphi\cos\varphi}{a\sqrt{1+b^2}\,\Delta\varphi} = \tau = \tau'$, per l'eguaglianza precedente. Facendo $\varphi = \varphi' = \varphi_0$ si trova $tang^2\varphi_0 = \frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta}$, e ne consegue $\widehat{BV} - \widehat{VA} = \tau_0 = arc\,tang\left(\frac{sen\,\alpha - sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)$.

I problemi di Euler esposti al n° 16, si estendono alla sfera; infatti dall'eguaglianze $\widehat{BV} - \widehat{VA} = \tau_0$, $\widehat{BV} + \widehat{VA} = \widehat{BA}$, $\widehat{BM'} - \widehat{BM} = \frac{1}{2}\widehat{BA}$, risulta $\widehat{BM} + \widehat{BV} - \widehat{BM'} = \frac{1}{2}\tau_0$, ed essendo respettivamente φ, φ', φ_0 le ampiezze rispettive dei punti M, M', V si avrà $F\varphi_0 = F\varphi' - F\varphi$, $\cos\varphi_0 = \cos\varphi\cos\varphi' + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'\,\Delta\varphi_0$, applicando la formula surriferita dell'addizione degl'integrali ellittici di terza specie si deduce l'equazione:

$$\frac{1+a^2}{a\sqrt{1+b^2}}(\Pi\varphi_0 + \Pi\varphi - \Pi\varphi') = \operatorname{arc\,tang}\frac{(a^2-b^2)(a^2+1)\operatorname{sen}\varphi_0\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'}{a\sqrt{1+b^2}[a^2+1-(a^2-b^2)\cos\varphi_0\cos\varphi\cos\varphi']} =$$

$$= \frac{1}{2}\tau_0 = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\tau_0}-1}{\operatorname{tang}\tau_0}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}\right);$$

dalle quali si conchiude:

$$\frac{\cos\beta(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta)\operatorname{sen}\varphi_0\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha[\cos^2\beta - (\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta)\cos\varphi_0\cos\varphi\cos\varphi']} = \frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}.$$

Osservando che $\operatorname{sen}\varphi_0 = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}}$, $\Delta\varphi_0 = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi_0} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}}$, si potranno ricavare linearmente i prodotti $\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'$, $\cos\varphi\cos\varphi'$ in funzione dei seni e coseni dei semi-assi α, β; e quindi calcolare le ampiezze φ, φ'.

Anche per il 2° problema (pag. 44) esteso all'ellisse sferica si trovano le relazioni $\widehat{DM} - \widehat{MD'} = 2\tau$, essendo $\operatorname{tang}\tau = \frac{(a^2-b^2)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{a\,\Delta\varphi\sqrt{1+b^2}}$, e l'ampiezze φ, φ' dei punti D, M collegate dall'eguaglianza $\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$; le coordinate del punto dividente M sono $x = a\operatorname{sen}\varphi' = \frac{a\cos\varphi'}{\Delta\varphi}$; $y = b\cos\varphi'$; essendo $\Delta\varphi = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \cos^2\varphi}$, formule costruibili con la retta ed il circolo.

39. — Dall'equazione polare dell'ellisse sferica (num. 37) con l'origine al suo centro C e ridotta alla forma $a^2 b^2 \cot^2\rho = b^2 + (a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\omega$, si deduce l'analoga con il polo coincidente nel fuoco F per le sostituzioni $\operatorname{sen}\omega = \frac{\operatorname{sen}\rho'\operatorname{sen}2\omega'}{\operatorname{sen}\rho}$, $\cos\rho = \cos\varepsilon\cos\rho' - \operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\rho'\cos 2\omega'$ ricavate

dal triangolo sferico CFM, simboleggiando con ρ' il raggio vettore FM, e con $\pi - 2\omega'$ l'angolo CFM; onde per le note formule $\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}$, $\operatorname{sen}\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{1+a^2}}$ si giunge all'eguaglianza $(a^2-b^2)\times$ $\operatorname{tang}^2\rho' \operatorname{sen}^2 2\omega' + b^2(1+\operatorname{tang}^2\rho') = b^2\left[\sqrt{b^2+1} - \operatorname{tang}\rho' \cos 2\omega' \sqrt{a^2-b^2}\right]^2$ ovvero $-\operatorname{tang}\rho' \cos 2\omega' \sqrt{(1+b^2)(a^2-b^2)} + b^2 = \pm a \operatorname{tang}\rho'$; dalla quale posto $\frac{b^2}{a} = g'$, $\frac{1}{a}\sqrt{(1+b^2)(a^2-b^2)} = e'$ risulta l'equazione focale $\operatorname{tang}\rho' = \frac{g'}{1+e'\cos 2\omega}$. Nel caso particolare di $a^2 - b^2 = 1$, od $e' = 1$, la curva prende il nome di *parabola sferica*, è una proiezione centrale della parabola piana $r = \frac{2g}{1+\cos 2\omega}$: il punto all'infinito di questa ha per omologo nella sfera il punto $\rho' = \frac{\pi}{2}$, $\omega' = \frac{\pi}{2}$, la parabola sferica è un'ellisse avente per asse maggiore l'arco $\frac{\pi}{2} + \gamma$, dove γ indica l'arco AF distanza del vertice A al fuoco F; infatti $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{1}{a} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, cioè: $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \alpha$, inoltre essendo $\varepsilon + \gamma = \alpha$, si conchiude $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$, ed il parametro $g' = \frac{b^2}{a} = \operatorname{tang}\gamma$. Nella parabola piana chiamando p la normale condotta dal fuoco F sulla tangente e λ l'angolo acuto che fa con l'asse della curva, si hanno le relazioni $g = p\cos\lambda$, $p = r\cos\lambda$; eliminando λ ne consegue $p^2 = gr$; adunque l'equazione differenziale della parabola sferica con l'origine nel fuoco sarà $\operatorname{tang}^2\varpi = \operatorname{tang}\gamma \,.\, \operatorname{tang}\rho$; dove ϖ è l'arco FP di cerchio massimo condotto per F e normale all'arco tangente in M, e poichè dall'equazione $g = r\cos^2\lambda$ trasformata per la sfera si ha $\operatorname{tang}\rho = \frac{\operatorname{tang}\gamma}{\cos^2\lambda}$, si deduce $\operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\varpi\cos\lambda$, e $\operatorname{sen}\varpi = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\sqrt{1-\cos^2\gamma\operatorname{sen}^2\lambda}}$; similmente dal triangolo sferico FPM rettangolo in P ricavasi $\operatorname{tang}\tau = \operatorname{sen}\varpi\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{tang}\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\gamma\operatorname{sen}^2\lambda}}$.

Mediante le ultime relazioni, la nota formula (12) di rettificazione per le curve della sfera (pag. 111) diviene $\sigma = \operatorname{sen}\gamma \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\gamma\operatorname{sen}^2\lambda}} +$ $\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{tang}\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\gamma\operatorname{sen}^2\lambda}}\right)$; dunque *l'arco della parabola sferica si*

esprime con integrali ellittici di prima specie. Attribuendo a γ il valore $\frac{\pi}{4}$ ne risulta $tang\, \varpi = sec\, \lambda$, e siccome l'altro vertice A' dell'asse maggiore si ottiene per $\lambda = \frac{\pi}{2}$ si conchiude il perimetro dell'ellisse sferica avente la distanza focale $\frac{\pi}{4}$ e l'asse maggiore $3\frac{\pi}{4}$ rappresentato dall'espressione $\pi + \sqrt{2} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\, \lambda}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\, sen^2\, \lambda}}$, cioè supera di una semi-circonferenza massima il perimetro della lemniscata di Bernoulli descritta con l'asse pari al diametro della sfera medesima (*).

In un'ellisse piana di semi-assi a_1, b_1 l'angolo λ dell'asse maggiore con la normale p tirata dal centro sulla tangente si determina mediante la formula $p^2 = a_1^2\, cos^2\, \lambda + b_1^2\, sen^2\, \lambda$, e quindi per l'ellisse sferica proiezione centrale della prima risulta $tang^2 \varpi = a^2\, cos^2\, \lambda + b^2\, sen^2\, \lambda$, da cui $sen^2 \varpi = \frac{a^2 + b^2\, tang^2\, \lambda}{(1 + a^2) + (1 + b^2)\, tang^2 \lambda}$ dove a, b significano le tangenti dei semi-assi α, β. Parimente eliminando $tang\, \rho$ fra la (7) e la (16) si trova $tang^2\, \tau = \frac{(a^2 - tang^2\, \varpi)\,(tang^2\, \varpi - b^2)}{tang^2\, \varpi\, (1 + tang^2\, \varpi)} = \frac{1}{sen^2\, \varpi}\, (a^2 - (1 + a^2)\, sen^2 \varpi) \times$ $\times \left((1+b^2)\, sen^2 \varpi - b^2\right)$; eseguendo le sostituzioni $tang\, \lambda = tang\, \psi \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + b^2}}$, $tang^2\, \varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{1 + b^2} = a^2 k^2 = n$ e posto per brevità $\sqrt{1 - k^2\, sen^2\, \psi} = \Delta\, \psi$ si ottengono i valori $sen\, \varpi = \frac{a\, \Delta\, \psi}{\sqrt{1 + a^2}}$, $d\, \lambda = \frac{d\, \psi}{1 + n\, sen^2\, \psi} \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + b^2}}$, $tang\, \tau = \frac{(a^2 - b^2)}{a \sqrt{1 + b^2}}\, \frac{sen\, \psi\, \ cos\, \psi}{\Delta\, \psi}$ ed in virtù della (12) (pag. 111) il differenziale dell'arco di ellisse sferica assume la forma $d\, \sigma = \frac{a}{\sqrt{1 + b^2}} \times$ $\frac{d\, \psi\, \Delta\, \psi}{1 + n sen^2 \psi} - d\, \tau$; in cui aggiunta e tolta la quantità $\frac{1}{a \sqrt{1 + b^2}}\, \frac{d\, \psi}{(1 + n\, sen^2\, \psi)\, \Delta \psi}$, con semplici riduzioni ed integrando fra i limiti o e ψ, si avrà:

$$\sigma = \frac{1 + a^2}{a \sqrt{1 + b^2}}\, \Pi\, (n, k, \psi) - \frac{1}{a \sqrt{1 + b^2}}\, F\, (k, \psi) - \tau.$$

Se tre ampiezze ψ, ψ' ψ'' siano collegate dalla relazione $F \psi + F \psi' = F \psi''$

(*) Vedi la memoria del Rev. James Booth nelle *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1852.*

e si chiamino σ, σ', σ'' i corrispondenti archi di ellisse sferica, si ricaverà l'eguaglianza $\sigma + \sigma' - \sigma'' = \theta - (\tau + \tau' - \tau'')$; dove

$$tang\,\theta = \frac{\sqrt{m\,n}\,sen\,\psi\,sen\,\psi'\,sen\,\psi''}{1 - \frac{n}{n+1}\cos\psi\cos\psi'\cos\psi''} \text{ ed } m = \frac{n+k^2}{n+1} = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

40. La proiezione sferica dell'iperbole piana (1) $r^2\left(\frac{\cos^2\omega}{a_1^2} - \frac{sen^2\omega}{b_1^2}\right) = 1$, si rappresenta in coordinate polari con (2) $tang^2\rho\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2} - \frac{sen^2\omega}{b^2}\right) = 1$, ovvero per l'equazione differenziale (3) $tang^2\varpi = \frac{a^2 b^2}{tang^2\rho - (a^2 - b^2)}$; dove a, b simboleggiano le tangenti dei semi-assi α, β trasverso ed immaginario. La curva si compone di due semi-ellissi sferiche eguali e simmetricamente poste rispetto al piano passante per l'asse 2β, infatti si prenda per nuovo polo il punto C' situato sull'asse polare $\omega = o$ e distante di $\frac{\pi}{2}$ dal centro C dell'iperbole, simboleggiando con $\rho' = \widehat{C'M}$ ed $\omega' = \widehat{MCC'}$ le nuove coordinate di un punto M della curva, in virtù del triangolo sferico CMC' si deducono le relazioni $\cos\rho = sen\,\rho'\cos\omega'$, $sen\,\rho\cos\omega = \cos\rho'$, $sen\,\rho\,sen\,\omega = sen\,\rho'\,sen\,\omega'$ e da queste le seguenti

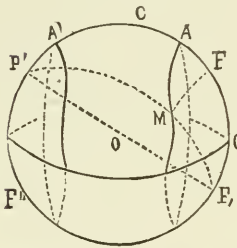



Fig. 20ª.

$tang\,\rho\cos\omega = \frac{\cos\omega'}{tang\,\rho'}$, $tang\,\rho\,sen\,\omega = tang\,\omega'$, che sostituite nella (2) conducono all'ellisse sferica $\frac{1}{tang^2\rho'} = a^2\cos^2\omega' + \frac{a^2}{b^2}sen^2\omega'$; di cui detti α', β' i semi-assi, $2\varepsilon'$ la distanza focale FF' si ottengono le formule $tang\,\alpha' = \frac{1}{a} = cot\,\alpha$, $tang\,\beta' = \frac{b}{a} = tang\,\beta\,cot\,\alpha$, $tang\,\varepsilon' = \sqrt{\frac{1-b^2}{a^2+b^2}}$; cioè $b < 1$ è la condizione affinchè $2\alpha'$ sia l'asse maggiore. Il fuoco F dell'ellisse ed il punto F' simmetrico rispetto al centro O dell'altro fuoco F_1 uniti ad ogni punto M dell'iperbole hanno la differenza delle loro distanze geodetiche $\widehat{FM} = u$, $\widehat{MF} = v$ eguale all'asse trasverso 2α e però si definiscono i due fuochi dell'iperbole sferica, poichè sottraendo le due $\widehat{F'M} + \widehat{MF_1} = \pi$, $\widehat{FM} + \widehat{MF_1} = 2\alpha'$, si ottiene $\widehat{F'M} - \widehat{FM} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = 2\alpha$ e la semi-distanza focale $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varepsilon'$.

Il geometra William Roberts distinse due casi particolari di questa linea, chiamandola *iperbole sfero-equilatera di prima e di seconda specie* secondochè sussistano fra gli assi la condizione $b = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, oppure

l' eguaglianza $a = b$ e l'ellisse corrispondente ha l'asse minore $2\beta' = \frac{\pi}{2}$. Le due linee sferiche hanno proprietà simili a quelle dell'iperbole equilatera piana; così per la prima in virtù della relazione $tang\,\beta = sen\,\alpha$ ne consegue $cos\,\varepsilon = cos^2\alpha$, ed a motivo dell'eguaglianze $cos\,u + cos\,v = 2\,cos\,\varepsilon\,cos\,\rho$, $cos\,u - cos\,v = 2\,sen\,\varepsilon\,sen\,\rho\,cos\,\omega$, si ricava facilmente $tang\frac{u}{2}\,tang\frac{v}{2} = tang^2\frac{\rho}{2}$, come pure dall' equazione differenziale risulta $sen\,\varpi\,tang\,\rho = sen\,\alpha\,tang\,\alpha$, proporzioni analoghe alle seguenti $uv = r^2, pr = a^2$ dell'iperbole equilatera piana. Si può aggiungere che *l'iperbole sfero-equilatera di prima specie è il luogo dei vertici* M *dei triangoli sferici aventi in comune la base* 2α, e *la differenza degli angoli* U, V *alla base costante ed eguale a* $\frac{\pi}{2}$; infatti dicasi ρ la distanza del vertice M dal punto medio della base 2α ed ω l'inclinazione di ρ su quest'arco preso per base, dalle relazioni $V - U = C$, $cot\,\rho\,sen\,\alpha = cos\,\alpha\,cos\,\omega + sen\,\omega\,cot\,U$, $cot\,\rho\,sen\,\alpha = -cos\,\alpha\,cos\,\omega + sen\,\omega\,cot\,V$, $cot\,(V - U) = \frac{cot\,U\,cot\,V + 1}{cot\,U - cot\,V}$; eliminando U, V si trova $cot^2\rho\,sen^2\alpha = cos^2\alpha\,cos^2\omega - sen^2\omega + 2\,cos\,\alpha\,cos\,\omega\,sen\,\omega\,cot\,C$, la quale per $C = \frac{\pi}{2}$ diviene $cot^2\rho = \frac{cos^2\omega}{tang^2\alpha} - \frac{sen^2\omega}{sen^2\alpha}$, se invece la somma degli angoli U, V fosse una costante C si avrebbe la relazione $cot^2\rho\,sen^2\alpha = cos^2\alpha\,cos^2\omega + sen^2\omega + 2\,cot\,\rho\,sen\,\alpha\,sen\,\omega\,cot\,C$, che per $C = \frac{\pi}{2}$ riducesi all' ellisse sferica $cot^2\rho = \frac{cos^2\omega}{tang^2\alpha} + \frac{sen^2\omega}{sen^2\alpha}$.

La pedale del centro dell'iperbole (1) sulle sue tangenti è la *lemniscata iperbolica* $r^2 = a_1^2\,cos^2\omega - b_1^2\,sen^2\omega$; la cui proiezione centrale sulla sfera è rappresentata da $tang^2\rho = a^2\,cos^2\omega - b^2\,sen^2\omega$ e dicesi *lemniscata sfero-iperbolica;* applicando la formula (18) pag. 111 per la quadratura di tutta la superficie racchiusa da questa curva si trova:

$$A = 4\left[\omega_1 - \int_0^{\omega_1}\frac{d\,\omega}{\sqrt{1 + a^2 - (a^2 + b^2)\,sen^2\omega}}\right] = 4\,\omega_1 - \frac{4}{\sqrt{1 + a^2}}F(k_1, \omega_1),$$

dove $tang\,\omega_1 = \frac{a}{b}$ e $k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 + a^2}}$. Mutando b^2 in $-b^2$ si ottiene la *lemniscata sfero-ellittica* $tang^2\rho = a^2\,cos^2\omega + b^2\,sen^2\omega$ proiezione sferica della pedale del centro dell' ellisse piana sulle sue tangenti, e presi per limiti di ω_1 gli angoli o e $\frac{\pi}{2}$ si avrà l'intera superficie racchiusa dalla detta curva eguale a $2\pi - \frac{4}{\sqrt{1 + a^2}}F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, col modulo

$k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1}}$; dunque *le curve polari delle lemniscate sfero-iperbolica ed ellittica si rettificano con integrali ellittici di prima specie.*

41. — L'equazione $f(r, \omega) = o$ rappresenti in coordinate polari una curva piana; descrivendo una sfera con raggio arbitrario c e col centro nel polo, è chiaro che la prospettiva σ della linea fatta sulla superficie sferica da uno dei poli del cerchio massimo situato sul piano della curva si otterrà col sostituire $c \, tang \frac{\rho}{2}$ al raggio vettore r nell'equazione $f(r, \omega) = o$ ed è evidente che l'asse polare della linea sferica coincide con la prospettiva dell'asse polare della linea piana. Fattovi $c = 1$ e portando nell'equazione $ds^2 = dr^2 + r^2 \, d\omega^2$ il valore $r = tang \frac{\rho}{2}$, trovasi la formula $ds^2 = \frac{d\rho^2 + sen^2 \rho \, d\omega^2}{4 \cos^4 \frac{\rho}{2}}$, ovvero $d\sigma = \frac{2 \, ds}{1 + r^2}$. Così la proiezione stereografica della lemniscata iperbolica è la curva $tang^2 \frac{\rho}{2} = a^2 \cos^2 \omega - b^2 sen^2 \omega$; luogo del punto simmetrico al centro dell'iperbole sferica rispetto ad ogni sua tangente, il differenziale del suo arco è

$$d\sigma = 2 \, d\omega \sqrt{\frac{a^4 - (a^4 - b^4) sen^2 \omega}{(a^2 - (a^2 + b^2) sen^2 \omega)(1 + a^2 - (a^2 + b^2) sen^2 \omega)^2}}.$$

Allorchè fra le costanti a, b sussiste la relazione $\frac{a^4 - b^4}{a^4} = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2}$, cioè $b^2 = \frac{a^2}{1 + a^2}$, l'iperbole generatrice è equilatera di prima specie, ed il differenziale precedente si riduce alla forma

$$d\sigma = \frac{2 \, a^2}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{[a^2 - (a^2 + b^2) sen^2 \omega][1 + a^2 - (a^2 + b^2) sen^2 \omega]}},$$

e per le successive sostituzioni $tang \, \omega = (1 + a^2) tang \, u$, $sen \, u = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} sen \, \varphi$ alla più semplice $d\sigma = \frac{du \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{a^2 - (1 + a^2) sen^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{1 + a^2} sen^2 \varphi}}$,

il cui integrale preso fra i limiti o, φ è $\sigma = \cos \alpha \, F(sen \, \alpha, \varphi)$, ove $tang \, \alpha = a$.

L'iperbole sfero-equilatera di 2ª specie è rappresentata da ciascuna dell'equazioni $tang \, \rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2 \omega}}$, $tang \, \varpi \, tang \, \rho = a^2$; la sua pedale o *lemniscata sfero-iperbolica di 2ª specie* con $tang \, \rho' = a \sqrt{\cos 2 \omega}$. Il punto

simmetrico del centro dell'iperbole equilatera rispetto ad ogni sua tangente descrive la curva $tang \frac{\rho}{2} = a \sqrt{\cos 2\omega}$, identica alla proiezione stereografica della lemniscata di Bernoulli $r = a \sqrt{\cos 2\omega}$ e come enunciò W. Roberts *essa è rettificabile con un integrale ellittico di 3ª specie avente per modulo* $\sqrt{\frac{1}{2}}$; infatti l'arco infinitesimo essendo $ds = \frac{2a\, d\omega}{(1+a^2 \cos 2\omega)\sqrt{\cos 2\omega}}$ mediante la sostituzione $\cos 2\omega = \cos^2\varphi$ si trasforma in

$$ds = \frac{a\sqrt{2}\,.\, d\varphi}{(1+a^2\cos^2\varphi)\sqrt{1-\frac{1}{2}\,sen^2\varphi}},$$

ed integrando fra i limiti o, φ risulta $s = \frac{a\sqrt{2}}{1+a^2}\Pi\left(n, \sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right)$, dove il parametro $n = -\frac{a^2}{1+a^2}$; nel caso di $a = 1$ si riduce ad integrale ellittico di 2ª specie $s = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^3} = \sqrt{2}\,E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{sen\,\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}$.

Per i valori di a che superano l'unità, un arco MM' della curva compreso fra due raggi vettori $tang\frac{\rho}{2} = a\cos\varphi$, $tang\frac{\rho_1}{2} = a\cos\varphi_1$ si esprime con la formula:

$$\frac{a\sqrt{2}}{1+a^2}\Pi\left(n, \sqrt{\frac{1}{2}}, \mu\right) - \frac{2\,a^2}{\sqrt{a^4-1}}\,arctang\,\frac{a\sqrt{2(a^4-1)}\,sen\,\varphi\,sen\,\varphi_1\,sen\,\mu}{2(1+a^2)\,(1+a^2\cos\varphi\cos\varphi_1\cos\mu)},$$

essendo $F\mu = F\varphi - F\varphi_1$. Infine se la costante positiva a sia minore di uno, il secondo termine della precedente espressione di MM' si trasforma in una quantità logaritmica (pag. 40).

42. — Due curve sferiche s, s' riferite allo stesso polo ed asse polare si diranno *inverse* fra loro, se le lunghezze dei raggi vettori ρ, ρ' situati sulla medesima geodetica descritta per il polo sono collegate dalla relazione $tang\frac{\rho}{2}\,tang\frac{\rho'}{2} = a^2$; la quale differenziata dà l'eguaglianza $\frac{d\rho}{sen\,\rho} + \frac{d\rho'}{sen\,\rho'} = o$, e però gli elementi infinitesimi delle due curve sono proporzionali ai seni dei raggi vettori; cioè $ds' = \frac{sen\,\rho'}{sen\,\rho}\,ds = \frac{a^2\,ds}{sen^2\frac{\rho}{2} + a^4\cos^2\frac{\rho}{2}}$, e nel caso di $a = 1$ si deduce, $ds' = ds$, od $s' = s +$ costante.

La proiezione stereografica dell'iperbole equilatera piana $r = \frac{a_1}{\sqrt{\cos 2\,\omega}}$ è la curva $tang\,\frac{\rho'}{2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\,\omega}}$, inversa della lemniscata sfero-iperbolica di 2ª specie; il differenziale del suo arco è $ds' = \frac{2\,a\,d\omega}{(a^2 + \cos 2\omega)\sqrt{\cos 2\,\omega}}$, che per la suddetta sostituzione $\cos 2\,\omega = \cos^2 \varphi$ integrato fra i limiti o e φ diviene $s' = \frac{a\sqrt{2}}{1+a^2}\,\Pi\left(n', \sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right)$, sendo $n' = -\frac{1}{1+a^2} = -(1+n)$. Questo valore di s' ricavasi da quello dell'arco s col mutare a nel suo reciproco $\frac{1}{a}$; dunque *a due archi eguali della lemniscata sfero-iperbolica corrispondono per la curva inversa due archi aventi la differenza rettificabile con archi circolari, o quantità logaritmiche.*

Gli angoli obliqui di un triangolo sferico rettangolo non essendo complementari, le successive pedali di una linea sferica non seguono la stessa legge di derivazione delle pedali di una curva piana, perlochè il geometra William Roberts vi ha sostituito una specie di curve sferiche deducentesi con legge simile. Sia M un punto di una di queste linee; condotto l'arco di cerchio massimo MT tangente in M ed indicato con θ l'angolo TMO della tangente MT col raggio OM, si tiri per O un raggio vettore OM', che faccia con OM l'angolo $MOM' = \frac{\pi}{2} - \theta$, poi descrivasi col centro nel punto medio I di OM e raggio sferico OI una circonferenza segante in M' l'arco di cerchio massimo OM', il luogo di M' sarà una curva tale che la sua tangente $M'T'$ fa con OM' lo stesso angolo θ. Infatti posto $\widehat{OM} = \rho$, $\widehat{OM'} = \rho_1$, $\widehat{MOM'} = \frac{\pi}{2} - \theta = \omega - \omega_1$; dal triangolo sferico IOI' rettangolo in I' si ricava $tang\,\frac{\rho_1}{2} = tang\,\frac{\rho}{2}\,sen\,\theta$, indi dalle due eguaglianze:

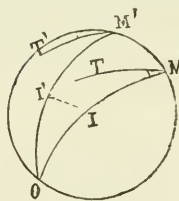



Fig. 21ª.

$$\frac{d\rho_1}{\cos^2\frac{\rho_1}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\rho}{2}}\,(d\rho\,sen\,\theta + sen\,\rho\,\cos\theta\,d\theta),\quad \frac{sen\,\rho_1}{\cos^2\frac{\rho_1}{2}} = \frac{sen\,\rho\,sen\,\theta}{\cos^2\frac{\rho}{2}}\,.$$

risulta $\frac{d\rho_1}{sen\,\rho_1} = \frac{d\rho}{sen\,\rho} + \cot\theta\,d\theta$, la quale in virtù delle formule $tang\,\theta = \frac{sen\,\rho\,d\omega}{d\rho}$, $tang\,\theta_1 = \frac{sen\,\rho_1\,d\omega_1}{d\theta_1}$ si riduce a $d\omega_1 \cot\theta_1 = (d\omega + d\theta)\cot\theta$, ed avendosi $\frac{\pi}{2} + \omega_1 = \omega + \theta$, ne consegue $\theta = \theta_1$.

La proiezione stereografica della curva piana $r = \frac{a_1}{\sqrt[m]{\cos m\omega}}$ è la sferica (1) $tang \frac{\rho}{2} = \frac{a}{\sqrt[m]{\cos m\omega}}$, in questa l'angolo θ della tangente col raggio vettore ρ si trova espresso per $tang\, \theta = cot\, m\omega$, ovvero $\theta = \frac{\pi}{2} - m\omega$, e per conseguenza $\omega_1 = (m-1)\,\omega$; dunque le successive curve derivate dalla (1) secondo la genesi esposta hanno per equazioni $tang \frac{\rho_1}{2} = a \cos^{\frac{m-1}{m}} \frac{m\omega_1}{m-1}$, $tang \frac{\rho_2}{2} = a \cos^{\frac{2m-1}{m}} \frac{m\omega_2}{2m-1}, \ldots tang \frac{\rho_n}{2} = a \cos^{\frac{nm-1}{m}} \frac{m\omega_n}{nm-1} \ldots$ che sono evidentemente le proiezioni stereografiche delle successive pedali della curva piana surriferita. Nel caso particolare di $m = 2$ si ha l'n^{sima} derivata $tang^{\frac{2}{2n-1}} \frac{\rho_n}{2} = a^{\frac{2}{2n-1}} \cos \frac{2}{2n-1}\, \omega_n$, ed il differenziale del suo arco s_n per la sostituzione $\cos \frac{2}{2n-1}\, \omega_n = \cos^2 \varphi$ assume la forma:

$$ds_n = \frac{(2n-1)\, a \sqrt{2} \cos^{2(n-1)} \varphi\, d\varphi}{(1 + a^2 \cos^{4n-2} \varphi) \sqrt{1 - \frac{1}{2} sen^2 \varphi}},$$

ed è quindi riducibile agli ellittici, come accade sul piano che l'n^{sima} pedale dell'iperbole equilatera si rettifica pure con integrali ellittici.

43. — Un'ellisse sferica E è l'intersezione della superficie conica (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ con la sfera (2) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, nell'ipotesi di $a > b$ le sezioni cicliche del cono sono determinate dai due piani (3) $y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = z^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ e le rette focali per l'eguaglianze (4) $\frac{x^2}{a^2 - b^2} = \frac{z^2}{b^2 + c^2}, y = o$, l'angolo ε che ciascuna di queste due rette fa con l'asse Oz è dato per la formula (5) $tang\, \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}$. Il cono polare, cioè il luogo delle rette normali condotte per il vertice e tangenti la superficie (1), ha per equazione (6) $a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^2 z^2$ e sega la sfera (2) secondo l'ellisse E' polare della prima E; i piani ciclici del cono (6) essendo (7) $x^2 (a^2 - b^2) = z^2 (b^2 + c^2)$ sono perpendicolari alle rette (4) e le focali coincidono con le rette normali ai piani (3). Dunque *i fuochi della conica polare giacciono sull'asse minore della conica data e sono i poli degli archi ciclici di questa curva;* reciprocamente *i fuochi della conica data sono i poli*

degli archi ciclici della conica polare. Le proiezioni ortogonali delle due curve E, E' sul piano xOy sono l'ellissi (8) $x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{r^2}{c^2}$, $(a^2+c^2)x^2+(b^2+c^2)y^2=r^2c^2$ aventi i loro fuochi reali alla medesima distanza, la prima sull'asse Ox, e la seconda sopra Oy. Due o più coni della forma (1) si dicono *omociclici* se i loro assi soddisfano alla relazione (9) $tang^2\eta=\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}\right)$, da cui $sen^2\eta=\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}\right)$, è evidente che indicando con h un coefficiente arbitrario, il cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+h(x^2+y^2+z^2)=o$ è omociclico al cono (1) e lo stesso si dica del cono $x^2\left[h\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)-1\right]+$ $+y^2\left[h\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)-1\right]=z^2$: la cui sezione con la sfera è un'ellisse E_1, che si proietta ortogonalmente sul piano xOy secondo la conica $x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+$ $+y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{r^2}{4c^2}$ concentrica e simile alla prima della (8).

I coni polari di due coni omociclici hanno le stesse rette focali e però le loro sezioni con la sfera sono due ellissi omofocali. La prima rettificazione dell'ellisse sferica è dovuta al Prof. Gudermann che adoperò le coordinate Cartesiane (tomo 14° del Giornale di Crelle); indicando con x, y, z le ortogonali del punto M di una linea nello spazio, il quadrato dell'arco infinitesimo si esprime con $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ ed ove la detta linea giaccia sulla sfera $x^2+y^2+z^2=1$, si avrà $dz=-\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{z}\right)$ e per conseguenza $ds^2=\frac{(1-y^2)\,dx^2+(1-x^2)\,dy^2+2\,xy\,dx\,dy}{1-x^2-y^2}$, così prendendo $c=1$ nella proiezione (8) dell'ellisse sferica e posto per brevità $1+\frac{1}{a^2}=a_1^2$, $1+\frac{1}{b^2}=b_1^2$ si faranno le sostituzioni $a_1x=cos\,\omega$, $b_1y=sen\,\omega$ ed il differenziale precedente diverrà $ds=d\omega\sqrt{\frac{a_1^2-1-(a_1^2-b_1^2)\,sen^2\omega}{b_1^2(a_1^2-1)-(a_1^2-b_1^2)sen_1^2\omega}}$ e questo mediante la novella sostituzione $tang\,\omega=tang\,\theta\sqrt{\frac{a_1^2-1}{b_1^2-1}}$ si riduce alla forma normale del differenziale ellittico di terza specie $ds=\frac{b^2}{a\sqrt{1+b^2}}\frac{d\theta}{(1+n\,sen^2\theta)\,\Delta\theta}$, con il parametro $n=-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$ ed il modulo $k=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{1+b^2}}$. Integrando fra i limiti o e θ si ottiene l'arco

misurato dal vertice dell' asse maggiore $s = \frac{b^2}{a\sqrt{1+b^2}} \Pi(n, k, \theta)$, onde mutati a, b respettivamente nei rapporti $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$, per $\theta = \frac{\pi}{2}$ risulta il perimetro dell'ellisse sferica (10) $E = \frac{4b^2 r}{a\sqrt{b^2+c^2}} \Pi\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right)$, dove $n = -\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$ e $k = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2+b^2}} = sen\,\alpha$. E cambiando a, b, c respettivamente nelle frazioni $\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{1}{c}$ si otterrà la periferia dell' ellisse polare

$$E' = \frac{4bcr}{a\sqrt{b^2+c^2}} \Pi\left(n, k_1, \frac{\pi}{2}\right), \tag{11}$$

che ha lo stesso parametro di E ed il modulo $k_1 = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}} = tang\,\alpha$; i due moduli k, k_1 ed il parametro comune n sono collegati dall' eguaglianza $(1-k^2)(1-k_1^2) = 1+n$. In virtù della proprietà fondamentale delle linee sferiche supplementari, le respettive superficie S, S' delle due ellissi E, E' per $r=1$ si deducono dalle relazioni $E'+S=E+S'=2\pi$. L'ellisse E_1 omociclica alla E si rettifica mediante formula analoga sostituendo ad $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$ le respettive espressioni $\frac{a}{\sqrt{h(a^2+c^2)-a^2}}, \frac{b}{\sqrt{h(b^2+c^2)-b^2}}$, e si troverà lo stesso modulo $k = sen\,\alpha$ ed il parametro $n' = -\frac{hc^2(a^2-b^2)}{a^2[h(c^2+b^2)-b^2]}$.

44. — Se λ indica una costante arbitraria, la superficie conica

$$\frac{x^2}{\lambda(a^2+1)-1} + \frac{y^2}{\lambda(b^2+1)-1} = z^2 \tag{1}$$

ha le medesime rette focali del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$; le sezioni di queste due superficie con la sfera $x^2+y^2+z^2=1$ sono due ellissi omofocali c, c'. I piani tangenti $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = zz_1$, $\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = zz_2$ segano la superficie sferica secondo due circonferenze massime tangenti all' ellisse interna e mediante le coordinate dei punti di contatto (2) $\frac{x_1}{z_1} = a\,sen\,\varphi$, $\frac{y_1}{z_1} = b\cos\varphi$, $\frac{x_2}{z_2} = a\,sen\,\varphi'$, $\frac{y_2}{z_2} = b\cos\varphi'$ si avrà per la retta comune ai detti piani tangenti (3) $\frac{x}{a(\cos\varphi-\cos\varphi')} = \frac{y}{b(sen\,\varphi'-sen\,\varphi)} = \frac{z}{sen(\varphi'-\varphi)}$. Applicando

il ragionamento del numero 25 a due ellissi sferiche omofocali c, c' e chiamati $\widehat{PT}$, $\widehat{PT'}$ gli archi di cerchio massimo condotti dal punto P di c' a toccare nei punti T, T' l'ellisse c si giunge all'equazione $\frac{ds}{ds'} = \frac{sen^2 \widehat{TP}}{sen^2 T'P}$, dove ds, ds' sono i differenziali degli archi delle due coniche. Ora l'arco TP misurando l'angolo dei raggi della sfera, che passano per i suoi estremi T, P si determina in funzione dei coefficienti angolari $\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right)$ del raggio OT ed $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ del raggio OP mediante la formula

$$sen\ \widehat{TP} = \sqrt{\frac{(xy_1 - yx_1)^2 + (x_1 z - z_1 x)^2 + (z_1 y - y_1 z)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}},$$

che per le sostituzioni delle coordinate surriferite in funzione delle ampiezze φ, φ' diviene $\frac{sen\ TP}{cos\ \widehat{CP}} = a \left[\frac{1 - cos(\varphi - \varphi')}{sen(\varphi - \varphi')}\right] \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1 + n\, sen^2 \varphi}}$ dove $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2(1 + b^2)}$ ed $n = a^2 k^2 = tang^2 \varepsilon$. E poichè dall'equazioni (2) insieme con la $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$ si ricava $z_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 + b^2)(1 + n\, sen^2 \varphi)}}$, risultano i differenziali $dz_1 = -\frac{n\, sen\,\varphi\, cos\,\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1 + b^2)(1 + n\, sen^2\varphi)^3}}$, $dx_1 = a\, sen\,\varphi\, dz_1 + a z_1 cos\,\varphi\, d\varphi$, $dy_1 = b\, cos\,\varphi\, dz_1 - b z_1 sen\,\varphi\, d\varphi$; esprimendo tutto in funzione di φ si troverà $ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \frac{a^2 d\varphi^2 \Delta\varphi^2}{(1 + b^2)(1 + n\, sen^2\varphi)^2}$; da cui $ds = \frac{sen\,\alpha\, d\varphi\, \Delta\varphi}{cos\,\varepsilon\,(1 + n\, sen^2\varphi)}$ identica alla formula (17) della pag. 111. Così per le coniche sferiche omofocali si ottiene la medesima equazione differenziale $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}$ che per le coniche piane; chiamando P_0 il punto dell'ellisse c' determinato dai valori $\varphi = o$, $\varphi' = \mu$ delle ampiezze dei punti di contatto delle tangenti menate da esso all'ellisse interna saranno $\frac{x_0}{z_0} = a \frac{(1 - cos\,\mu)}{sen\,\mu}$, $\frac{y_0}{z_0} = b$ le coordinate di P_0, ed il valore di λ si dedurrà per l'equazione $\frac{a^2(1 - cos\,\mu)}{(1 + cos\,\mu)(\lambda a^2 + \lambda - 1)} + \frac{b^2}{\lambda b^2 + \lambda - 1} = 1$, cioè

$$\lambda = \frac{1 + cos\,\mu + a^2 \pm a^2 \Delta\mu}{(1 + a^2)(1 + cos\,\mu)}:$$

preso il segno positivo per $\Delta\mu$ risultano i quadrati delle tangenti dei semi-

assi dell' ellisse esterna c', espressi da

$$\lambda\,(1+a^2)-1=\frac{a^2\,(1+\Delta\,\mu)}{1+\cos\mu},\ \lambda\,(1+b^2)-1=\frac{b^2\,(1+\Delta\,\mu)}{\Delta\,\mu+\cos\mu},$$

identiche alle formule esposte alla pag. 72 per i quadrati dei semi-assi dell' ellissi piane omofocali, quindi con la stessa dimostrazione si conchiude nuovamente il teorema Lagrangiano $\cos\mu=\cos\varphi\cos\varphi'+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'\Delta\,\mu$. Poichè sulla sfera il sistema di due coniche omocicliche ha per figura correlativa il sistema di due coniche omofocali e viceversa, mediante il principio di dualità un teorema relativo al primo sistema si trasformerà nel teorema corrispondente al secondo. Così per esempio dalla proposizione I° *In una conica sferica* c *la somma o la differenza dei raggi vettori* $\widehat{FM}$, $\widehat{MF'}$ *menati da due fuochi* F, F' *a ciascun punto* M *della conica è costante, si deduce*: 1° *la somma o la differenza dei due angoli* $(\widehat{f, m})$, $(\widehat{f', m})$ *che ciascuna geodetica* m *tangente una conica sferica fa con i due cerchi ciclici* f, f' *è costante.* In simil guisa risultano le proposizioni correlative

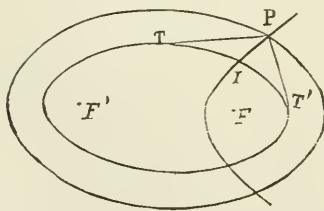
2° *I raggi* r, r' *congiungenti i due fuochi* F, F' *con un punto* M *di una conica sferica fanno angoli eguali* $(\widehat{r, t})$, $(\widehat{r', t'})$ *con la geodetica* t *che tocca in* M *la detta curva.* II° *ogni arco geodetico* m *tangente una conica sferica* c' *sega gli archi ciclici* f, f' *in due punti* f m, f'm *equidistanti dal punto di contatto* c' m.

3° *Le geodetiche tangenti* t, t' *menate da un punto* P *di una conica sferica ad un' altra omofocale* c' *fanno angoli eguali con la geodetica* m *tangente in* P *la prima conica* c. III° *I punti di sezione* T, T' *di una conica sferica* γ *con la geodetica* p *tangente in* M *un' altra conica interna* γ' *ed omociclica alla prima sono equidistanti dal punto* M *di contatto.*

Siano tre punti M, M', M'' infinitamente vicini della conica γ' e si descrivano le geodetiche $\widehat{MM'}$, $\widehat{M'M''}$ seganti la conica esterna γ nei respettivi punti A, B, A', B'; poichè M' si può considerare come il punto medio degli archi AB, $A'B'$, le aree dei settori $AM'A'$, $BM'B'$ differiscono di quantità infinitesime di second' ordine dalle aree dei triangoli sferici $AM'A'$, $BM'B'$; quindi aggiungendo ad entrambi la superficie sferica compresa fra le geodetiche $A'M'$, $M'B$ e l'arco $A'B$ della conica esterna si ottengono aree eguali. Dunque 4° *se due coniche sferiche* γ, γ' *sono omocicliche, ogni geodetica* p *tangente la curva interna* γ' *sega dall' esterna* γ *un segmento di area costante,* e ne consegue per correlativo il teorema di Graves. IV° *Se per un punto* P *di una conica sferica* c' *si descrivono due geodetiche tangenti una conica interna ed omofocale* c *nei punti* T, T', *la somma degli archi* PT, PT' *e dell' arco concavo di* c *da essi intercetto è costante.*

45. — Reciprocamente dalle proprietà delle coniche omofocali si possono ricavare le formule di addizione degl'integrali ellittici. Siano $x_1 = a\, sen\, \varphi$, $y_1 = b\, cos\, \varphi$ le coordinate del punto di contatto T ed $x_0 = a_1\, sen\, \alpha$, $y_0 = b_1\, cos\, \alpha$ quelle del punto P, essendo per ipotesi la retta PT tangente all'ellisse piana c si avrà $\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} = 1$, ovvero (1) $\frac{a_1}{a}\, sen\, \alpha\, sen\, \varphi + \frac{b_1}{b} cos\, \alpha\, cos\, \varphi = 1$; in cui facendo $b_1 = \frac{b}{cos\, \theta}$, $a^2 k^2 = a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$ si ricava $a_1^2 = \frac{b^2}{cos^2 \theta} + a^2 - b^2$, od $a_1 = \frac{a \Delta \theta}{cos\, \theta}$; dunque per questi valori la (1) prende la forma $cos\, \theta = cos\, \alpha\, cos\, \varphi + sen\, \alpha\, sen\, \varphi\, \Delta\, \theta$. Inoltre è notevolissima la relazione (2) $(a a_1\, cos\, \alpha\, cos\, \varphi + b b_1\, sen\, \alpha\, sen\, \varphi)^2 = (a^2 cos^2 \alpha + b^2 sen^2 \alpha)(a^2 cos^2 \varphi + b^2 sen^2 \varphi)$, che si verifica scrivendo per brevità $sen\, \alpha\, sen\, \varphi = \frac{a\lambda}{a_1}$, indi per la (1) $cos\, \alpha\, cos\, \varphi = \frac{b}{b_1}(1 - \lambda)$, $1 - (sen^2 \alpha\, cos^2 \varphi + sen^2 \varphi\, cos^2 \alpha) = \frac{a^2 \lambda^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{b_1^2}(1 - \lambda)^2$; con le quali sostituzioni la (2) diviene $\left[\frac{b}{a}(1 - \lambda) + \frac{a}{b}\lambda\right]^2 - \frac{a_1^2 - b_1^2}{b^2}(1 - \lambda)^2 + \frac{(a_1^2 - b_1^2)}{a^2}\lambda^2 - 1 = o$, cioè identicamente nulla. La medesima relazione (2) per i valori di a_1, b_1 equivale alla formula $\Delta\, \theta - k^2 cos\, \theta\, sen\, \alpha\, sen\, \varphi = \Delta\, \alpha\, \Delta\, \varphi$, già esposta alla pag. 37.

Chiamando t la lunghezza PT, poste le sue proiezioni sugli assi coordinati $a_1\, sen\, \alpha - a\, sen\, \varphi = x$, $b_1\, cos\, \alpha - b\, cos\, \varphi = y$, indi fatto $\lambda - sen^2 \varphi = \lambda'$ si hanno l'eguaglianze (3) $x = \frac{a \lambda'}{sen\, \varphi}$, $y = -\frac{b \lambda'}{cos\, \varphi}$; $t = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a \lambda' \Delta \varphi}{sen\, \varphi\, cos\, \varphi}$ e poichè differenziando la precedente (4) $t^2 = (a_1\, sen\, \alpha - a\, sen\, \varphi)^2 + (b_1\, cos\, \alpha - b\, cos\, \varphi)^2$ risulta $t\, dt = (a_1\, x\, cos\, \alpha - b_1\, y\, sen\, \alpha)\, d\alpha - (a\, x\, cos\, \varphi - b\, y\, sen\, \varphi)\, d\varphi$, sostituendo i valori di x, y espressi dalla (3) si ottiene $t\, dt = (a a_1\, cos\, \alpha\, cos\, \varphi + b b_1\, sen\, \alpha\, sen\, \varphi)\, \frac{\lambda'}{sen\, \varphi\, cos\, \varphi}\, d\alpha - \frac{a^2 \lambda' (\Delta \varphi)^2}{sen\, \varphi\, cos\, \varphi} = a \Delta \varphi \Delta \alpha \frac{t\, d\alpha}{\Delta \varphi} - \frac{at}{\Delta \varphi}(\Delta \varphi)^2 d\varphi$, ovvero $dt = a(\Delta \alpha\, d\alpha - \Delta \varphi\, d\varphi)$ ed integrando (5) $t = a(E\alpha - E\varphi) + C$.

Fig. 22ª.

L'iperbole omofocale alle suddette ellissi e che passa per il punto P ha per equazione $\frac{x^2}{sen^2 \alpha} - \frac{y^2}{cos^2 \alpha} = a^2 - b^2$, un suo punto I di sezione con l'ellisse interna $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ha per coordinate $x = a\, sen\, \alpha$, $y = b\, cos\, \alpha$; e quindi la (5) si traduce nel teorema di Griffiths PT — arco ellittico $TI = C$ (*).

(*) *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 13, pagg. 177-79.

In simil guisa per la seconda tangente PT' condotta dal punto P all' ellisse interna si troverebbe PT' — arco ellittico $IT' = C'$; le costanti C e C' sono eguali, e si dimostra col prendere il punto P in uno dei vertici dell' asse minore dell' ellisse esterna; aggiungendo e sottraendo le due precedenti eguaglianze ne discendono i due teoremi di Graves e di Mac-Cullagh.

Si ponga $a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2 = c^2$, $a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2$, e riducendo la (1) si troverà facilmente $t^2 = c^2 (sen^2 \alpha + sen^2 \varphi) - \frac{2 a_1}{a} c^2 \, sen \, \alpha \, sen \, \varphi + c_1^2$: per eliminare la somma dei quadrati dei seni di α e φ si farà uso della stessa (1) scritta sotto la forma:

$$\frac{b_1^2}{b^2} (1 - sen^2 \varphi)(1 - sen^2 \alpha) = \left(1 - \frac{a_1}{a} sen \, \alpha \, sen \, \varphi\right)^2,$$

e quindi con semplici calcoli si avrà $c^2 sen^2 \alpha \, sen^2 \varphi - 2 a a_1 sen \, \alpha \, sen \, \varphi + a^2 + \frac{a^2 b_1^2}{c^2 c_1^2}(c_1^2 - t^2) = o$; da cui $sen \, \alpha \, sen \, \varphi = \frac{a a_1}{c^2} \pm \frac{a b_1 t}{c^2 c_1}$, ovvero (6) $t = \frac{a_1 c_1}{b_1} \pm \frac{c^2 c_1}{a b_1} sen \, \alpha \, sen \, \varphi$, che eguagliato alla (5) e supposto $\alpha = 0$ per $\varphi = o$ condurrà alla nota formula di addizione per gl'integrali ellittici di 2ª specie. Mutando nella (1) l'angolo φ in φ' e risolvendo il sistema rispetto alle coordinate di P si ottengono l'espressioni $a_1 \, sen \, \alpha = \frac{a \, sen\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)}{cos\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)}$, $b_1 \cos \alpha = \frac{b \cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)}{cos\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)}$, e siccome il punto P giace sull' ellisse di semiassi a_1, b_1 ne risulta l'eguaglianza $\frac{a^2}{a_1^2} sen^2\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) + \frac{b^2}{b_1^2} cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)$, da cui si ricava

$$\text{(7)} \qquad \frac{c_1 c^2}{a_1 b_1} sen^2\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) = \frac{a_1 c_1}{b_1} - \frac{a_1 c_1}{b_1} sen^2\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right).$$

Le tangenti PT, PT' a motivo della (6) sono date dalle formule $t = \frac{a_1 c_1}{b_1} - \frac{c_1 c^2}{a_1 b_1} sen \, \alpha \, sen \, \varphi$, $t' = \frac{a_1 c_1}{b_1} - \frac{c_1 c^2}{a_1 b_1} sen \, \alpha \, sen \, \varphi'$, e quindi la loro somma è semplicemente (8) $t + t' = \frac{2 a_1 c_1}{b_1} - \frac{2 c_1 c^2}{a_1 b_1} sen^2\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) = \frac{2 a_1 b_1}{c_1} sen^2\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)$.

Mediante le funzioni iperboliche si estendono le precedenti proposizioni

a due iperboli omofocali: le coordinate di P saranno:

$$a_1 \cos h\, \alpha = \frac{a \cos h\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\cos h\left(\frac{u-u'}{2}\right)}, \quad b_1 \operatorname{sen} h\, \alpha = \frac{b \operatorname{sen} h\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\cos h\left(\frac{u-u'}{2}\right)},$$

dove u, u' sono le ampiezze dei punti di contatto T e T' delle tangenti PT, PT' menate dal punto P dell'iperbole $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ alla omofocale $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Alle relazioni (1) e (2) corrispondono respettivamente $\frac{a_1}{a} \cos h\, \alpha \cos h u -$ $- \frac{b_1}{b} \operatorname{sen} h\, \alpha \operatorname{sen} h\, u = 1$, $(a a_1 \operatorname{sen} h\, \alpha \operatorname{sen} h\, u + b b_1 \cos h\, \alpha \cos h\, u)^2 =$ $= (a^2 \operatorname{sen}^2 h\, \alpha + b^2 \cos^2 h\, \alpha)(a^2 \operatorname{sen}^2 h\, u + b^2 \cos^2 h\, u)$, $t^2 = (a_1 \cos h\, \alpha -$ $- a \cos h\, u)^2 + (b_1 \operatorname{sen} h\, \alpha - b \operatorname{sen} h\, u)^2$; e facendo $a_1 \cos h\, \alpha - a \cos h\, u = x$, $b_1 \operatorname{sen} h\, \alpha - b \operatorname{sen} h\, u = y$, $\cos h\, u \cos h\, \alpha = \frac{a \lambda}{a_1}$, $\operatorname{sen} h\, u \operatorname{sen} h\, \alpha = \frac{b}{b_1}(\lambda - 1)$, $\lambda - \cos^2 h\, u = \lambda'$ si deducono le seguenti:

$$x = \frac{a \lambda'}{\cos h\, u}, \quad y = \frac{b \lambda'}{\operatorname{sen} h\, u}, \quad t = \frac{a \lambda' \Delta h\, u}{\operatorname{sen} h\, u \cos h\, u}, \quad dt = a(\Delta h u\, du - \Delta h\, \alpha\, d\alpha),$$

ovvero descritta per P l'ellisse omofocale $\frac{x^2}{\cos^2 h\, \alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 h\, \alpha} = a^2 + b^2 = c^2$, che seghi nel punto I l'iperbole di semi-assi a, b si avrà pure PT—arco iperb. $TI = C$; indicando poi con c_1^2 la differenza $a^2 - a_1^2 = b_1^2 - b_1^2$ resultano l'eguaglianze $t^2 = c^2(\cos^2 h\, \alpha + \cos^2 h\, u) - c_1^2 - \frac{2 a_1}{a} c^2 \cos h u \cos h\, \alpha$,

$c^2 \cos^2 h\, \alpha \cos^2 h\, u - 2\, a\, a_1 \cos h\, u \cos h\, \alpha + \frac{a^2 a_1^2}{c^2} - \frac{a^2 b_1^2 t^2}{c^2 c_1^2} = o$, da cui

$\cos h\, \alpha \cos h\, u = \frac{a a_1}{c^2} \mp \frac{a_1 b_1 t}{c_1 c^2}$. Fra le due ampiezze u, u' si ha la relazione

$\frac{a^2}{a_1^2} \cos^2 h\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \frac{b^2}{b_1^2} \operatorname{sen}^2 h\left(\frac{u+u'}{2}\right) = \cos^2 h\left(\frac{u-u'}{2}\right)$, oppure $\frac{c^2 c_1^2}{a_1^2 b_1^2} \times$ $\times \cos^2 h\left(\frac{u+u'}{2}\right) = -\frac{c_1^2}{b_1^2} + \operatorname{sen}^2 h\left(\frac{u-u'}{2}\right)$, ne consegue la somma delle tangenti $t + t' = \frac{2 a_1 c_1}{b_1} + \frac{2 c_1 c^2}{a_1 b_1} \cos^2 h\left(\frac{u+u'}{2}\right) = \frac{2 a_1 b_1}{c_1} \operatorname{sen}^2 h\left(\frac{u-u'}{2}\right)$ ecc.

46. — Ogni punto della superficie sferica (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ si rappresenta con le coordinate (2) $x = u\sqrt{1 - k_1^2 v^2}$, $y = v\sqrt{1 - k^2 u^2}$, $z = \sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}$; le costanti k, k_1 soddisfacendo all'eguaglianza (3)

$k^2 + k_1^2 = 1$. Eliminando successivamente i parametri variabili u, v fra le precedenti (2) si ricavano i coni quadrici:

$$(4)\quad \frac{k_1^2 x^2}{1 - k_1^2 v^2} - \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{1 - v^2} = o, \quad (5)\quad -\frac{x^2}{u^2} + \frac{k^2 y^2}{1 - k^2 u^2} + \frac{z^2}{1 - u^2} = o,$$

che per ogni coppia di valori attribuiti ad u e v si segano ortogonalmente; cioè sono perpendicolari fra loro i piani tangenti lungo ciascuna delle quattro generatrici comuni, verificandosi la condizione $\frac{-k_1^2 x^2}{u^2 (1 - k_1^2 v^2)} - \frac{k^2 y^2}{v^2 (1 - k^2 u^2)} + \frac{z^2}{(1 - u^2)(1 - v^2)} = o$ in virtù delle formule (2), (3).

I detti coni intercettano sulla superficie sferica (1) due coniche ortogonali s, s'; calcolando le derivate parziali delle variabili x, y, z rispetto a ciascuna delle indipendenti u, v si otterranno gli archi infinitesimi delle due coniche espressi per le relazioni $ds = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} = du \sqrt{\frac{1 - k_1^2 u^2 - k^2 v^2}{(1 - u^2)(1 - k_1^2 u^2)}}$, $ds' = dv \sqrt{\frac{1 - k_1^2 u^2 - k^2 v^2}{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}}$ e perciò decomponendo una parte S della superficie sferica in rettangoli curvilinei mediante sistemi di coniche ortogonali a due a due, e con i lati adiacenti ds, ds' si deduce (6) $dS = \frac{(1 - k_1^2 u^2 - k^2 v^2)\, du\, dv}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)(1 - k_1^2 u^2)(1 - k^2 v^2)}}$, da cui, fatte le sostituzioni $u = sen\, \varphi$, $v = sen\, \theta$, facilmente si ottiene:

$$(7)\quad S = \int_o^\varphi \int_o^\theta d\varphi\, d\theta \left[\frac{\Delta(k_1, \theta)}{\Delta(k, \varphi)} + \frac{\Delta(k, \varphi)}{\Delta(k_1, \theta)} - \frac{1}{\Delta(k, \varphi)} \frac{1}{\Delta(k_1, \theta)}\right] =$$

$$= F(k, \varphi)\, E(k_1, \theta) + F(k_1, \theta)\, E(k, \varphi) - F(k, \varphi)\, F(k_1, \theta).$$

Al valore nullo attribuito ad u e v corrispondono respettivamente i cerchi massimi $(x = o,\ y^2 + z^2 = 1)$, $(y = o,\ x^2 + z^2 = 1)$, ed agli altri valori limiti $u = sen\, \varphi$, $v = sen\, \theta$ le due ellissi sferiche determinate dalla (1) insieme con ciascuna dell'equazioni (4), (5). Facendo $u = 1$, ovvero $\varphi = \frac{\pi}{2}$ la conica (1), (5) riducesi alla circonferenza massima $(z = o, x^2 + y^2 = 1)$, il valor corrispondente di S rappresenta la parte S_1 di superficie sferica racchiusa fra i piani $x = o, y = o, z = o$ ed il quadrante dell'altra ellisse (1), (4) in cui $v = sen\, \theta$; evidentemente S_1 eguaglia la differenza fra l'area $\frac{\pi}{2}$ del triangolo sferico trirettangolo compreso nel triedro $Oxyz$ e la quarta parte Q dell'area dell'ellisse (1), (4); che ha i semi-assi α, β determi-

nati per $tang\,\alpha = \frac{\Delta(k_1, \theta)}{k_1 sen\,\theta}$, $tang\,\beta = cot\,\theta$; e la sua ellisse polare ha per tangenti dei semi-assi i valori $a = tang\,\theta$, $b = \frac{k_1 sen\,\theta}{\Delta(k_1, \theta)}$. Applicando la formula (17) della pag. 111 si deduce il quadrante della ellisse polare, che eguagliato all'area S_1 darà la notevole relazione:

$$(8) \qquad \frac{\pi}{2} - Q = \frac{\Delta(k_1, \theta)}{sen\,\theta\,cos\,\theta}\left[\Pi\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right) - cos^2\theta\,F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) E(k_1, \theta) + F(k_1, \theta)\,E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) F(k_1, \theta)$$

dove $n = k^2 tang^2\,\theta$, il primo membro della (8) è pure eguale ad un'integrale ellittico completo di terza specie col parametro circolare negativo; basta porre nella formula (11) della pag. 125 i valori $a = \frac{\Delta(k_1, \theta)}{k_1 sen\,\theta}$, $b = cot\,\theta$, $c = r = 1$, e ne risulterà il quadrante dell' ellisse polare sotto la forma $\frac{k_1 sen\,\theta\,cos\,\theta}{\Delta(k_1, \theta)}\,\Pi\left(n', k, \frac{\pi}{2}\right)$, sendo:

$$n' = -1 + \frac{b^2}{a^2} = -\left[\frac{k}{\Delta(k_1, \theta)}\right]^2 = -\left(\frac{n + k^2}{n + 1}\right);$$

dunque *un integrale ellittico completo di terza specie si esprime con integrali ellittici di prima e seconda specie.* Infine per $\theta = \frac{\pi}{2}$ l'area Q si annulla, e dalla (8) ne consegue il bel teorema del celebre Legendre $\frac{\pi}{2} = FE_1 + EF_1 - FF_1$; in cui i simboli F ed E significano gl' integrali ellittici completi di prima specie aventi il modulo k, ed F_1, E_1 gl' integrali omonimi e relativi al modulo complementare k_1.

Il metodo geometrico di questa dimostrazione spetta al Prof. Eugenio Catalan e si legge nella sua memoria *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques* inserita nel tomo XX degli Atti dei Nuovi Lincei (anno 1866-67), pag. 171.

Capo Quarto.

CURVE RETTIFICABILI PER INTEGRALI ELLITTICI.

47. — Leonardo Euler (*) propose la ricerca delle linee rettificabili con archi di coniche piane, e pervenne a soluzioni particolari del suo quesito, ad esempio simboleggiando con x, y le coordinate ortogonali di ciascun punto M della curva ignota, l'equazione $ds = m\,d\varphi\,\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$ ridotta razionale diviene (1) $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$, dove n denota il prodotto della costante m per il modulo complementare $k_1 = \sqrt{1-k^2}$. La precedente equazione (1) è identicamente soddisfatta ponendo $\frac{dx}{d\varphi} = m \cos \varphi \cos \lambda + n \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \lambda$, $\frac{dy}{d\varphi} = m \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda - n \operatorname{sen} \varphi \cos \lambda$, ovvero trasformando i prodotti delle funzioni goniometriche nelle somme corrispondenti si ottengono $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{m-n}{2} \cos(\varphi + \lambda) + \frac{m+n}{2} \cos(\varphi - \lambda)$, $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{m-n}{2} \operatorname{sen}(\varphi + \lambda) - \left(\frac{m+n}{2}\right) \operatorname{sen}(\varphi - \lambda)$ e quindi le variabili x, y saranno funzioni di una sola variabile ove si assegni una relazione fra gli angoli λ e φ; così per $\lambda = p\varphi$ risultano $\frac{2x}{m} = \frac{1+k_1}{p-1} \operatorname{sen}(p-1)\varphi + \frac{1-k_1}{p+1} \operatorname{sen}(p+1)\varphi$, $-\frac{2y}{m} = \frac{1-k_1}{p+1} \cos(p+1)\varphi + \frac{1+k_1}{p-1} \cos(p-1)\varphi$. Si verifica l'indeterminata equazione (1) pure con le formule (2) $\frac{dx}{d\varphi} = a \cos \lambda + b \cos \alpha$, $\frac{dy}{d\varphi} = a \operatorname{sen} \lambda + b \operatorname{sen} \alpha$ avendo espresso con a, b segmenti rettilinei dati ed α, λ angoli variabili, e facilmente si giunge alla condizione $(a+b)^2 - 4\,ab \operatorname{sen}^2 (\lambda - \alpha) = m^2 - m^2 k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$, da cui si traggono $m = a + b$, $k^2 = \frac{4\,ab}{(a+b)^2}$, $\lambda = \alpha + \varphi$; e per questo valore le (2) si riducono alle seguenti (3) $\frac{dx}{d\varphi} = a \cos(\alpha + \varphi) + b \cos \alpha$, $\frac{dy}{d\varphi} = a \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) +$

(*) *De innumeris curvis algebraicis quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri liceat.* Nova Acta Petrop., tomo V, anno 1789. — *Mémoires posthumes* de L. Euler pubblicate da Schubert et Fuss, tomo I.

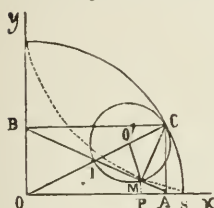
$+ b\,sen\,\alpha$; per $\alpha = o$ divengono $y = c - a\cos\varphi$, $x = c_1 + b\varphi - a\,sen\,\varphi$ e prendendo le costanti c, c_1 rispettivamente eguali a b e zero, la curva sarà una trocoide, onde si conchiude il teorema di Pascal *la lunghezza della curva descritta da un punto* M *del piano di un circolo mobile che ruzzola sopra una retta, equivale ad un arco dell'ellisse avente per semiassi* a + b, ± (a — b); *dove* b *è il raggio del cerchio mobile ed* a *la distanza del punto* M *dal centro di questo circolo.* Attribuendo poi alla costante c il valore nb, alla c_1 il valore o e mutando a in na si ottiene il teorema di Manheim, *il luogo geometrico dei punti che dividono le normali ad una trocoide in una ragione costante è rettificabile per archi ellittici;* poichè l'equazione della normale ad una curva essendo $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$, fatto $Y = o$ si troverà per l'ascissa del suo incontro con l'asse Ox la quantità $X_0 = x + y\frac{dy}{dx}$ e siccome $y = b - a\cos\varphi$, $x = b\varphi - a\,sen\,\varphi$ si dedurrà $X_0 = b\varphi$; inoltre dividendo tutte le normali alla trocoide nella ragione costante n, le coordinate x_1, y_1 del punto di divisione risultano dalle relazioni $\frac{y_1}{y} = \frac{x_1 - X_0}{x - X_0} = n$, ovvero $y_1 = ny = nb - na\cos\varphi$, $x_1 = X_0 + n(x - X_0) = b\varphi - na\,sen\,\varphi$. Ritornando all'equazione (3) si faccia $\varphi = (m - n)\,\omega$, $\alpha = n\omega$, ed integrandole si avrà

$$y = (m-n)\left(\frac{a}{m}\cos m\omega + \frac{b}{n}\cos n\omega\right), -x = (m-n)\left(\frac{a}{m}sen\,m\omega + \frac{b}{n}sen\,n\omega\right)$$

che sono della forma $y = A\cos m\omega + B\cos n\omega$, $x = A\,sen\,m\omega + B\,sen\,n\omega$ la qual curva sarà algebrica se i numeri m, n abbiano una ragione commensurabile; nel caso particolare di $k^2 = 1$, ovvero $mA = nB$ si rettifica con funzioni circolari, infatti il differenziale dell'arco riducesi a $ds = 2mA\cos\frac{(m-n)}{2}\omega . d\omega$ e quindi $s = C + \frac{4mA}{m-n}sen\frac{(m-n)\omega}{2}$. Le epicicloidi ed ipocicloidi appartengono a questo genere di curve, B è il raggio del cerchio mobile, $A \pm B$ quello del cerchio fisso ed $m = 1$.

Identificando l'espressione $ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2$ col quadrato del differenziale dell'arco ellittico $\left(a^2\cos^2\varphi + \frac{a^2}{n^2}sen^2\varphi\right)d\varphi^2$ si ottiene una semplice soluzione $\frac{dr}{d\varphi} = a\cos\varphi$, $\frac{r\,d\omega}{d\varphi} = \frac{a}{n}\,sen\,\varphi$, cioè $r = a\,sen\,\varphi$, $\varphi = n\omega + C$, dunque *le curve rappresentate in coordinate polari dall' equazione* $r = a\,sen\,(n\omega + C)$ *sono rettificabili per archi ellittici.* Parimente posto $\varphi = \frac{\omega}{2}$, $k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2}$ trovasi $s = 2(a+b)\,E(k, \varphi)$ per l'arco della linea $r = a\cos\omega + b$, che si chiama la *concoide di Pascal,* e nel caso di $b = a$ *la cardioide.* Se facciasi $n = 2$, $C = o$ il luogo è la proiezione del vertice O dell'angolo retto AOB sul segmento rettilineo $AB = 2a$, che scorre tenendo

sempre gli estremi A, B sopra i lati fissi OA, OB dell'angolo; si compone di quattro foglie ed è identica alla pedale dell'ipocicloide a quattro cuspidi $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ generata da un cerchio mobile, il quale ruzzola nell'interno di un cerchio fisso e di raggio quadruplo; perchè in ogni situazione AB della

Fig. 23ª.

retta mobile vi è un punto M di un'ellisse che ha per tangente la retta AB e si determina conducendo dal centro istantaneo C di rotazione la normale CM a questa retta: inoltre dal triangolo rettangolo ACB si ricava $AC^2=AM.\ AB$ ed anche la proporzione $\frac{AM}{AB}=\frac{MP}{AC}$; perciò notando con x, y le coordinate di M dalle precedenti si ottiene $AC^3=a^2y$, e parimente $BC^3=a^2x$, quindi per il luogo di M risulta $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$. Chiamando O' il centro della circonferenza descritta sul diametro $CI=\frac{a}{2}$, sarà l'angolo $CO'M=$ $=2\ CIA=4\ COA$, onde l'arco CM descritto con raggio $\frac{a}{4}$ eguaglia l'arco CS descritto con raggio a. Si avverta che quest'ipocicloide è pure il luogo geometrico del punto di Fagnani nell'ellissi concentriche aventi gli assi nella stessa direzione e la somma costante $2\,l$; infatti per il numero 9, dalle formule $x^{\frac{2}{3}}=\frac{a}{(a+b)^{\frac{1}{3}}}$, $y^{\frac{2}{3}}=\frac{b}{(a+b)^{\frac{1}{3}}}$ si deduce $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=$ $=(a+b)^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$.

48. — Le cubiche circolari espresse in coordinate ortogonali dall'equazione (1) $(x^2+y^2)(x-a)=b\,x^2$ ed in polari da $r=a\sec\omega+b\cos\omega$ si rettificano per integrali ellittici: con semplice calcolo si trova

$$\frac{ds}{d\omega}=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2+r^2}=\sqrt{(a+b)^2+2\,a\,(a-b)\,tang^2\omega+a^2\,tang^4\omega}\,;$$

ovvero ponendo $tang\,\omega=t$ risulta $ds=\frac{dt}{1+t^2}\sqrt{a^2t^4+2\,a\,(a-b)\,t^2+(a+b)^2}$. Nel solo caso di $b=-a$ il differenziale diviene algebrico-logaritmico e la curva è la *cissoide di Diocle*, si trova $s=a\int_0^t\frac{t\,dt}{1+t^2}\sqrt{t^2+4}+C=$

$$=a\sqrt{t^2+4}+\frac{a}{2}\sqrt{3}\,log\left(\frac{\sqrt{t^2+4}-\sqrt{3}}{\sqrt{t^2+4}+\sqrt{3}}\right)-2\,a-a\sqrt{3}\,log\,(2-\sqrt{3})$$

dove i logaritmi sono neperiani; la parte indipendente da t col segno cambiato rappresenta la semi-differenza fra l'intera curva ed il suo asintoto e si dimostra cercando il limite di $a+at-s$ per $t=\infty$; è facile

conchiudere il principio, dato un arco MM' della cissoide e l'origine N di un secondo arco della stessa curva si potrà determinare l'altro estremo N' in modo che la loro differenza $\widehat{MM} - \widehat{NN'}$ sia un'espressione algebrica; indicati con u, u_1, v, v_1 i valori di $\sqrt{4+t^2}$ corrispondenti agli estremi M, M', N, N' dei due archi, dovrà sussistere la relazione $\frac{uu_1 - 3}{u - u_1} = \frac{vv_1 - 3}{v - v_1}$.

Quando si faccia $b = a$, la curva (1) si può chiamare la *coniugata della cissoide*, poichè ha lo stesso asintoto ed una simile genesi: infatti si descriva un cerchio sul segmento $OA = a$ come diametro, e si meni la tangente indefinita nel punto A, indi per il polo O una qualunque retta secante in N la circonferenza ed in T la tangente, il raggio vettore della cissoide situato sulla traversale OA sarà $OT - ON$, e della sua coniugata $OM = OT + ON$. Le coordinate cartesiane del punto M si esprimono con funzioni razionali di una variabile u, cioè $x = a\left(\frac{2+u^2}{1+u^2}\right)$, $y = au\left(\frac{2+u^2}{1+u^2}\right)$; ed il coefficiente angolare della tangente $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{2+u^2+u^4}{2u}\right)$ ha per derivata $\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{2u^2}(3u^4 + u^2 - 2)$; le cui radici

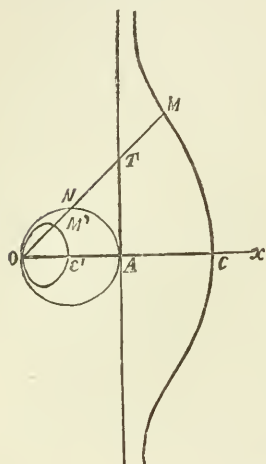



Fig. 24ª.

reali $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ determinano i punti di flesso $x = \frac{8a}{5}$, $y = \pm\frac{8a}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Una linea inversa della cubica rispetto allo stesso polo O è l'ellisse $y^2 + 2x^2 - ax = o$ od $r_1 = \frac{a\cos\omega}{1+\cos^2\omega}$, avente per assi $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{2}$ e siccome il differenziale dell'arco ellittico misurato dal vertice C' dell'asse minore è $ds_1 = \frac{a}{4}\sqrt{2}\,d\varphi\,\Delta\varphi$, dove φ è l'angolo eccentrico ed il modulo $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$; si avrà pure l'arco ds della cubica per la formula $ds = \frac{a^2}{r_1^2}ds_1$ (pag. 105). Ora proiettando sull'asse polare il raggio vettore r_1 dell'ellisse si trova $r_1\cos\omega = \frac{a}{4} + \frac{a}{4}\cos\varphi$ e quindi:

$$\cos^2\omega = \frac{1+\cos\varphi}{3-\cos\varphi},\quad ds = \frac{4\,a\,d\varphi\,\Delta\varphi\,\sqrt{2}}{(3-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)};$$

ed allo stesso risultato si sarebbe giunti con la sostituzione $t = \sqrt{2}\,tang\,\frac{\varphi}{2}$

nell'eguaglianza $s = a\int_0^t \frac{t\,dt}{1+t^4}\sqrt{4+t^4}$. Si verificano le seguenti trasformate:

$$\frac{ds}{a\sqrt{2}} = d\varphi\,\Delta\varphi\left(\frac{1}{3-\cos\varphi}+\frac{1}{1+\cos\varphi}\right) = d\varphi\,\Delta\varphi\left(\frac{3+\cos\varphi}{8+\mathrm{sen}^2\varphi}+\frac{1-\cos\varphi}{\mathrm{sen}^2\varphi}\right) =$$

$$= \frac{3\,d\varphi\,\Delta\varphi}{8+\mathrm{sen}^2\varphi}+\frac{d\varphi\,\Delta\varphi}{\mathrm{sen}^2\varphi}-\frac{8\cos\varphi\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\mathrm{sen}^2\varphi\,(8+\mathrm{sen}^2\varphi)}.$$ E dalle formule $\int \frac{d\varphi\,\Delta\varphi}{1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi} =$

$$= \left(1+\frac{k^2}{n}\right)\Pi\varphi - \frac{k^2}{n}F\varphi,\ \int\frac{d\varphi\,\Delta\varphi}{\mathrm{sen}^2\varphi} = (1-k^2)\,F\varphi - E\varphi - \cot\varphi\,\Delta\varphi,$$

$$\int\frac{\cos\varphi\,\Delta\varphi\,d\varphi}{\mathrm{sen}^2\varphi\,(1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi)} = -\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi} + \sqrt{n+k^2}\ \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{n+k^2}}\right)$$

ponendo $n = \frac{1}{8}$, $k^2 = \frac{1}{2}$ si conchiude l'arco della cubica

$$s = a\sqrt{2}\left[\frac{15}{8}\Pi\varphi - E\varphi - F\varphi + \Delta\varphi\,\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}\sqrt{\frac{8}{5}}\right) + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5}{8}}\right].$$

Per il valore $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha la lunghezza dell'arco della cubica corrispondente al primo quadrante dell'ellisse.

Alla suddetta classe di cubiche appartiene la strofoide chiamata *logociclica* dal geometra James Booth: si genera conducendo da un punto fisso A ad una direttrice Oy la normale AO ed una secante qualunque AS; fatto centro in S e descritto col raggio SO una circonferenza, i punti di sezione M, M' di questa linea con AS giacciono sulla curva. Presa la retta AO per asse polare e posto $AO = a$, $\widehat{OAM} = \varphi$, si trova $OS =$ $= a\,\mathrm{tang}\,\varphi$, $AS = \frac{a}{\cos\varphi}$, quindi $AM = r = \frac{a}{\cos\varphi} -$ $- a\,\mathrm{tang}\,\varphi = a\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) = a\,(\cos h\,u -$ $- \mathrm{sen}\,h\,u) = ae^{-u}$, $AM' = r_1 = \frac{a}{\cos\varphi} + a\,\mathrm{tang}\,\varphi =$ $= a\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = a\,(\cos h\,u + \mathrm{sen}\,h\,u) = ae^{u}$; evidentemente la strofoide è inversa di sè stessa rispetto al polo A e la potenza a^2 d'inversione.

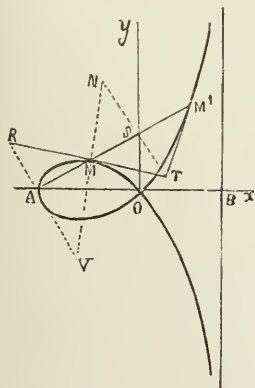



Fig. 25.ª

Condotte le tangenti MT, $M'T$ ai punti reciproci gli angoli TMM_1, $MM'T$ sono eguali in virtù della proprietà generale delle linee inverse; ovvero come si deduce dalla nota formula $\mathrm{tang}\,\alpha = r\frac{d\varphi}{dr}$; infatti nella strofoide si ha $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\cos\varphi}$, $\frac{dr_1}{d\varphi} = \frac{r_1}{\cos\varphi}$ e perciò $\mathrm{tang}\,\widehat{AMT} = -\cos\varphi$,

$tang\ AM'T' = cos\ \varphi = - tang\ AMT$: dunque il triangolo $MM'T$ è isoscele e risulta $ST = SM\ tang\ \alpha = SO\ cos\ \varphi = a\ sen\ \varphi$, inoltre ST è normale ad AS, l'angolo $OST = \varphi$ ed $ST = SO\ cos\ \varphi$, onde il triangolo OTS è rettangolo in T, ovvero $OT = OS\ sen\ \varphi = \frac{a\ sen^2\ \varphi}{cos\ \varphi}$; dunque *il luogo del punto d'intersezione delle tangenti alla strofoide nei punti reciproci è una cissoide.* Volendo condurre le tangenti nei punti M, M' della strofoide basterà innalzare dal punto S la normale ST al raggio vettore, AM, indi tirare OT normale ad. ST ed unire il loro punto d'incontro T con i punti M, M'. Le tangenti parallelle all'asse AO sono determinate per l'equazione $tang\ \varphi = cos\ \varphi$, ovvero $sen^2\ \varphi = 1 - sen\ \varphi$, cioè *l'ordinata massima dell'ovale divide l'asse in media ed estrema ragione.* Rappresenti N il punto comune alle normali MN, $M'N$ sarà $SN = MS\ cot\ \alpha = a\ tang\ \varphi \times$ $\times\ cot\ \alpha = \frac{a\ sen\ \varphi}{cos^2\ \varphi}$ e per conseguenza $AN^2 = AS^2 + SN^2 = \frac{a^2}{cos^2 \varphi} + \frac{a^2\ sen^2\ \varphi}{cos^4\ \varphi} = \frac{a^2}{cos^4\ \varphi}$, da cui $AN = \frac{2\ a}{1 + cos\ 2\ \varphi}$ e siccome $tang\ SAN = \frac{SN}{AS} = tang\ \varphi$ si deduce $\widehat{SAN} = \varphi$ ed $OAN = 2\ \varphi$. Dunque *il luogo dell'intersezione delle normali ai punti reciproci è una parabola avente per fuoco il polo* A *e per tangente al vertice la direttrice della strofoide.* Anche gli estremi R e V della suttangente e della sunnormale polare descrivono parabole.

Indicando con ω l'angolo AOM si troveranno $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\ \omega$, $OM =$ $= 2\ OS\ sen\ \frac{ASO}{2} = 2\ a\ tang\ \varphi\ sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 2\ a\ cot\ 2\ \omega\ sen\ \omega$, $OM' =$ $= 2\ OS\ sen\ \frac{OSM'}{2} = 2\ a\ tang\ \varphi\ sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 2\ a\ cot\ 2\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) sen\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$; onde $r = \frac{a\ cos\ 2\ \omega}{cos\ \omega} = - \frac{a}{cos\ \omega} + 2\ a\ cos\ \omega$ è l'equazione polare della strofoide referita all'asse OA ed il polo nel punto doppio O. La curva si può definire come l'intersezione dei cerchi $x^2 + y^2 = 2\ \beta\ y$ con le rette convergenti $\frac{y}{\beta} - \frac{x}{a} = 1$, eliminando il parametro variabile β si ottiene l'equazione della strofoide in coordinate cartesiane ortogonali $x\ (x^2 + y^2) =$ $= a\ (y^2 - x^2)$ e referita alle tangenti nel punto doppio, che sono le bisettrici degli assi, mediante le note formule $x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$ diviene $(X - Y)\ (X^2 + Y^2) = 2\ a\ \sqrt{2}.\ XY$; ovvero posto $Y = u\ X$ si esprimeranno le coordinate con funzioni razionali di u per $\frac{X}{u} = \frac{Y}{u^2} = \frac{2\ a\ \sqrt{2}}{(1 - u)\ (1 + u^2)}$.

Essa è distinta dalla cubica di Cartesio $y^2 = x^2\left(\frac{a - x}{a + 3\ x}\right)$, che riferita alle

tangenti nel punto doppio ha per equazione $X^3 + Y^3 = a\sqrt{2}\,XY$ e si genera per intersezione dell' ellissi $x^2 + 3y^2 = 2\beta y$ con le rette convergenti $\frac{2y}{\beta} + \frac{x}{a} = 1$, sendo β il parametro variabile. La strofoide è pure l'inviluppo del cerchio che passa per il nodo O ed il cui centro è sulla parabola avente il fuoco nel vertice A dell' ovale e la direttrice Oy comune con essa, infatti l'equazione della suddetta parabola essendo $y_1^2 = = 2ax_1 - a^2$, e quella del cerchio $x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = o$ si avrà per l'inviluppo l' equazione $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$; che è una strofoide con l' ovale a destra dell' asse Oy.

Gli archi della strofoide si valutano per integrali ellittici di prima e seconda specie col modulo $\sqrt{\frac{1}{2}}$; infatti l' equazione polare posta l'origine al vertice A dell' ovale essendo $r = a\left(\frac{1 \pm sen\,\varphi}{cos\,\varphi}\right)$, si ricava $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{cos\,\varphi}$ e per conseguenza

$$\frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1 + \frac{1}{cos^2\varphi}} = \frac{a}{cos^2\varphi}\sqrt{1 + cos^2\varphi} \pm \frac{a\,sen\,\varphi}{cos^2\varphi}\sqrt{1 + cos^2\varphi}.$$

Ora mediante l' integrazione per parti si ottengono le formule:

$$\int \frac{d\varphi}{cos^2\varphi}\sqrt{1 + cos^2\varphi} = tang\,\varphi\sqrt{1 + cos^2\varphi} + \sqrt{2}\,(F\varphi - E\varphi),$$

$$\int \frac{sen\,\varphi}{cos^2\varphi}\sqrt{1 + cos^2\varphi}\,.\,d\varphi = \frac{\sqrt{1 + cos^2\varphi}}{cos\,\varphi} + log\left(\sqrt{1 + cos^2\varphi} - cos\,\varphi\right);$$

onde misurando gli archi della strofoide a contare dal punto doppio O si hanno le relazioni:

$$\widehat{OM'} = a\left(\frac{1 + sen\,\varphi}{cos\,\varphi}\right)\sqrt{1 + cos^2\varphi} + a\sqrt{2}\,(F\varphi - E\varphi - 1) + a\,log\left(\frac{\sqrt{1 + cos^2\varphi} - cos\,\varphi}{\sqrt{2} - 1}\right)$$

$$\widehat{OM} = -a\left(\frac{1 - sen\,\varphi}{cos\,\varphi}\right)\sqrt{1 + cos^2\varphi} + a\sqrt{2}\,(F\varphi - E\varphi + 1) - a\,log\left(\frac{\sqrt{1 + cos^2\varphi} - cos\,\varphi}{\sqrt{2} - 1}\right)$$

dunque la differenza degli archi OM', OM corrispondenti ad uno stesso valore di φ è una quantità algebrico-logaritmica e facendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nell' ultima eguaglianza si avrà per il semi-perimetro dell' ovale l' espressione $a\sqrt{2}\left(F\frac{\pi}{2} - E\frac{\pi}{2} + 1\right) + a\,log\left(\sqrt{2} - 1\right)$, mentre il valore dell' arco OM' diviene infinito; ma se prima si sottragga il raggio vettore $AM' = a\left(\frac{1 + sen\,\varphi}{cos\,\varphi}\right)$ si deduce:

$$\widehat{OM'} - AM' = \frac{a\,(1 + sen\,\varphi)\,cos\,\varphi}{1 + \sqrt{1 + cos^2\varphi}} + a\sqrt{2}\,(F\varphi - E\varphi - 1) + a\,log\left(\frac{\sqrt{1 + cos^2\varphi} - cos\,\varphi}{\sqrt{2} - 1}\right);$$

e questa per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ diviene $a\sqrt{2}\left(F\frac{\pi}{2} - E\frac{\pi}{2} - 1\right) - a \log(\sqrt{2}-1)$ aggiungendola col semi-perimetro dell'ovale e moltiplicando il risultato per 2 si conchiude che $4a\sqrt{2}\left(F\frac{\pi}{2} - E\frac{\pi}{2}\right)$ è la differenza fra la lunghezza di tutta la strofoide e del suo asintoto.

Per la quadratura della curva applicando la formula $ds = \frac{1}{2}r^2 \, d\varphi$, sendo per l'ovale $r = a\left(\frac{1 - sen\,\varphi}{\cos\varphi}\right)$, ovvero $sen\,\varphi = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}$, $d\varphi = \frac{-2a\,dr}{a^2 + r^2}$ si avrà $ds = -a\,dr + \frac{a^3\,dr}{a^2 + r^2}$ ed integrando $s = -ar + a^2 \operatorname{arc\,tang}\frac{r}{a} + a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ poichè l'area si annulla per $\varphi = o$ od $r = a$; il valore $r = o$ dà la superficie della semi-ovale; parimente detto ρ il raggio vettore condotto per A fino a segare l'asintoto sarà $ds_1 = \frac{1}{2}(\rho^2 - r_1^2)\,d\varphi$ l'elemento dell'area compreso fra i rami infiniti della strofoide ed il suo asintoto, ed essendo $\cos\varphi = \frac{2ar_1}{a^2 + r_1^2}$, $\rho = \frac{2a}{\cos\varphi} = \frac{a^2}{r_1} + r_1$, $d\varphi = \frac{2a\,dr_1}{a^2 + r_1^2}$ si ottiene $ds_1 = \frac{a^3\,dr_1}{r_1^2} + \frac{a^3\,dr_1}{a^2 + r_1^2}$, il cui integrale è $s_1 = -\frac{a^3}{r_1} + a^2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{r_1}{a}\right) + a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$; posto $r_1 = \infty$ e raddoppiando risulterà per lo spazio compreso fra l'asintoto ed i rami infiniti della curva $2a^2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$; ed aggiungendovi l'ovale $2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ si conchiude la total superficie esser quadrupla del quadrato costruito sul segmento AO.

49. — Una classe di curve rettificabili con integrali ellittici è contenuta nell'equazione polare (1) $r^4 - 2r^2u + m^2 = o$, dove u significa una funzione determinata dell'angolo ω ed m^2 una quantità costante; posto $\frac{du}{d\omega} = u'$ dalla (1) risulta

$\frac{dr}{d\omega} = \frac{ru'}{2\sqrt{u^2 - m^2}}$ e dalla formula $\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2$ si deduce $\frac{ds}{d\omega} = r\sqrt{1 + \frac{u'^2}{4(u^2 - m^2)}}$. Ora i due raggi vettori corrispondenti ad uno stesso valore di ω nel caso che siano reali e positivi si esprimono con $\sqrt{u \pm \sqrt{u^2 - m^2}} = \sqrt{\frac{u+m}{2}} \pm \sqrt{\frac{u-m}{2}}$, onde i due archi s, s' compresi fra i due raggi vettori determinati dagli angoli ω', ω'' sono (2) $\begin{matrix} s' \\ s \end{matrix} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\omega'}^{\omega''} d\omega \sqrt{\frac{u'^2 + 4(u^2 - m^2)}{u - m}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\omega'}^{\omega''} d\omega \sqrt{\frac{u'^2 + 4(u^2 - m^2)}{u + m}}.$$

Se la costante m^2 risulti negativa il raggio vettore $\sqrt{u - \sqrt{u^2 - m^2}}$ è immaginario e si avrà un solo arco reale

$$(3) \qquad s' = \int_{\omega'}^{\omega''} d\,\omega \sqrt{\left(u + \sqrt{u^2 - m^2}\right)\left(1 + \frac{u'^2}{4\,(u^2 - m^2)}\right)}.$$

Per primo esempio si consideri la *Cassinoide* od ellissi di Cassini definita come il luogo dei vertici dei triangoli aventi la base comune fissa in posizione ed il rettangolo degli altri due lati eguale ad una costante a^2; la sua equazione polare è della forma (1) ove si prenda per polo il punto medio O della base $FF' = 2c$, e questa retta per origine delle inclinazioni ω e facilmente si trovano $u = c^2 \cos 2\omega$, $m^2 = c^4 - a^4$; $\dfrac{dr}{d\omega} = \dfrac{c^2 r \operatorname{sen} 2\omega}{c^2 \cos 2\omega - r^2}$, quindi per le formule del n.° 36 la normale abbassata dal centro O sulla tangente è $p = \dfrac{r(r^2 - c^2 \cos 2\omega)}{a^2} = \dfrac{r^4 - c^4 + a^4}{2a^2 r}$, da cui $\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{3r^4 - a^4 + c^4}{2a^2 r^2}$,

ed il raggio di curvatura $R = \dfrac{r\,dr}{dp} = \dfrac{2a^2 r^3}{3r^4 - a^4 + c^4} = \dfrac{a^2 r}{r^2 + c^2 \cos 2\omega}$.

Siccome in ciascun punto d' inflessione di una linea il raggio di curvatura diviene infinito, la lemniscata $r^2 + c^2 \cos 2\omega = o$ sarà il luogo dei punti d'inflessione di tutte le cassinoidi omofocali, e per ognuna si avranno quattro punti determinati dall' equazioni $\cos 2\omega = \pm \sqrt{\dfrac{a^4 - c^4}{3c^4}}$, $r^4 = = \dfrac{a^4 - c^4}{3}$; ed affinchè questi punti siano reali le costanti a, c devono soddisfare alle diseguaglianze $1 < \dfrac{a}{c} < \sqrt{2}$. Allorchè si abbia $c > a$ la cassinoide si compone di due ovali coniugate ed eguali; detti A ed A' i punti di sezione dell'asse FF' con il perimetro dell'ovale situato a destra dell'origine O ed M, M' gli estremi dei raggi vettori corrispondenti alla stessa direzione ω, si deduce dall'equazione (1) che per $u = \pm m$ i raggi vettori toccano la curva e però la loro inclinazione θ sull' asse polare si determinerà per l' eguaglianza $c^4 \cos^2 2\theta = c^4 - a^4$, ovvero $\operatorname{sen} 2\theta = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2$. Posto $\omega' = o$, $\omega'' = \omega$, le surriferite formule (2) divengono:

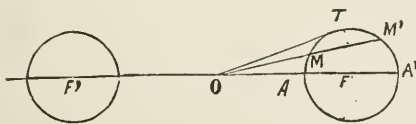



Fig. 26ª.

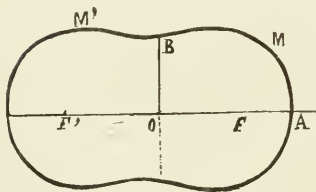
$$\widehat{A'M'} = s' = \frac{a^2}{c\sqrt{2}}\left[\int_o^{\omega} \frac{d\,\omega}{\sqrt{\cos 2\omega - \cos 2\theta}} + \int_o^{\omega} \frac{d\,\omega}{\sqrt{\cos 2\omega + \cos 2\theta}}\right]$$

$$\widehat{AM} = s = \frac{a^2}{c\sqrt{2}}\left[\int_o^{\omega} \frac{d\,\omega}{\sqrt{\cos 2\omega - \cos 2\theta}} - \int_o^{\omega} \frac{d\,\omega}{\sqrt{\cos 2\omega + \cos 2\theta}}\right].$$

I due integrali contenuti nei secondi membri delle precedenti si trasformano in ellittici di prima specie ponendo in luogo dei coseni degli angoli 2ω, 2θ i loro valori in funzione dei seni degli angoli ω, θ, indi per il primo la sostituzione $sen\,\omega = sen\,\theta\, sen\,\varphi$ ed invece per il secondo integrale $sen\,\omega = cos\,\theta\, sen\,\varphi'$, e facilmente aggiungendo e sottraendo i risultati si ricavano l'eguaglianze $s + s' = \frac{a^2}{c} F(sen\,\theta, \varphi)$, $s' - s = \frac{a^2}{c} F(cos\,\theta, \varphi')$; la prima di queste per $\varphi = \theta$ determina il semi-perimetro di ciascuna ovale. Nel caso di $a = c$ si avranno $m = o$, $sen\,2\theta = 1$ cioè $sen\,\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}$, il raggio vettore OM e l'arco $s = AM$ si annullano ed s' si riduce alla nota espressione dell'arco di lemniscata. Se infine sia c minore di a, la cassinoide si compone di una sola ovale, ad ogni valore di ω corrisponde un sol punto M della curva determinato dal raggio vettore:

$$r = \sqrt{c^2 cos\,2\omega + \sqrt{c^4 cos^2 2\omega + a^4 - c^4}}\,;$$

in cui facendo successivamente $\omega = o$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ si ottengono le distanze dei vertici A, B dal polo, cioè $OA = \sqrt{a^2 + c^2}$, $OB = \sqrt{a^2 - c^2}$, e l'arco AM compreso fra i raggi OA ed OM in virtù della relazione (3) ha per valore $\widehat{AM} = s = \frac{a^2}{c} \int_o^\omega d\omega \sqrt{\dfrac{cos\,2\omega + \sqrt{cos^2 2\omega + \frac{a^4}{c^4} - 1}}{cos^2 2\omega + \frac{a^4}{c^4} - 1}}$, e facendo $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = cosec\,2\theta$ si trova

Fig. 27a.

$$s = \frac{a^2}{c} \int_o^\omega d\omega \sqrt{\frac{cos\,2\omega + \sqrt{cos^2 2\omega + cot^2 2\theta}}{cos^2 2\omega + cot^2 2\theta}}.$$

L'arco $BM' = s'$ compreso fra i raggi vettori OB, OM' respettivamente normali ad OA, OM deducesi dal precedente integrale purchè ai limiti o ed ω si aggiunga $\frac{\pi}{2}$, o ciò che è lo stesso mutando ω in $\frac{\pi}{2} + \omega$ nell'espressione contenuta sotto il segno integrale si avrà $\widehat{BM'} = s' = \frac{a^2}{c} \int_o^\omega d\omega \sqrt{\dfrac{-cos\,2\omega + \sqrt{cos^2 2\omega + cot^2 2\theta}}{cos^2 2\omega + cot^2 2\theta}}$.

Applicando le identità algebriche $\sqrt{m + \sqrt{m^2 + n^2}} \pm \sqrt{-m + \sqrt{m^2 + n^2}} =$

$= \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{m^2+n^2} \pm n}$ ne conseguono le relazioni:

$$s \pm s' = \frac{a^2\sqrt{2}}{c}\int_0^\omega d\omega \sqrt{\frac{\pm\, cot\, 2\,\theta + \sqrt{cos^2 2\,\omega + cot^2 2\,\theta}}{cos^2 2\,\omega + cot^2 2\,\theta}}.$$

Ciascuno di questi integrali si può trasformare in ellittico di prima specie; infatti si ponga $cot^2 2\,\theta + cos^2 2\,\omega = v^2$, i differenziali racchiusi sotto il segno d'integrazione riduconsi a $\dfrac{d\,v}{2\sqrt{(v \pm cot\, 2\,\theta)\left(\dfrac{1}{sen^2 2\,\theta} - v^2\right)}}$ e questi per il valore $v = \dfrac{cos\, 2\,\psi}{sen\, 2\,\theta}$ divengono

$$\frac{d\,\psi}{\sqrt{tang\,\theta\left(1 - \dfrac{sen^2\psi}{sen^2\theta}\right)}},\quad \frac{d\,\psi}{\sqrt{cot\,\theta\left(1 - \dfrac{sen^2\psi}{cos^2\theta}\right)}}$$

i quali per le respettive sostituzioni $\dfrac{sen\,\psi}{sen\,\theta} = sen\,\varphi$, $\dfrac{sen\,\psi}{cos\,\theta} = sen\,\varphi'$ assumono le forme $\sqrt{\dfrac{sen\, 2\,\theta}{2}}\,\dfrac{d\,\varphi}{\sqrt{1 - sen^2\theta\, sen^2\varphi}}$, $\sqrt{\dfrac{sen\, 2\,\theta}{2}}\,\dfrac{d\,\varphi'}{\sqrt{1 - cos^2\theta\, sen^2\varphi'}}$ e così risultano l'eguaglianze $s + s' = a\,F(sen\,\theta, \varphi)$, $s - s' = a\,F(cos\,\theta, \varphi')$; dunque si conchiude il teorema del celebre Professor Alfredo Serret: *un integrale ellittico di prima specie si rappresenta con la somma algebrica di due archi della cassinoide, e reciprocamente un arco di questa linea si valuta con la somma di due integrali ellittici di prima specie (anno 1843).*

50. — Una curva *anallagmatica* è l'inviluppo di una circonferenza variabile il cui centro descrive una linea data ed è ortogonale con una circonferenza nota in grandezza e posizione. Se $f(x_1, y_1) = o$ è la curva descritta dal centro del cerchio variabile $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$, ortogonale col cerchio $x^2 + y^2 = R^2$, si avrà per la suddetta definizione l'eguaglianza $x_1^2 + y_1^2 = r^2 + R^2$, e per trovare l'inviluppo si dovranno eliminare i parametri x_1, y_1 fra l'equazioni $x^2 + y^2 - 2\,xx_1 - 2\,yy_1 + R^2 = o$, $f(x_1, y_1) = o$ e quella che si ottiene differenziando la prima rispetto agli stessi parametri cioè $x\,dx_1 + y\,dy_1 = o$, ovvero $y\,\dfrac{df}{dx_1} = x\,\dfrac{df}{dy_1}$; da questa si viene alla conclusione che i punti dell'anallagmatica giacciono sulle normali abbassate dal centro del cerchio fisso sulle tangenti alla curva descritta dal centro della circonferenza variabile. Sostituendo ad x, y i respettivi valori $\dfrac{R^2\,X}{X^2 + Y^2}$, $\dfrac{R^2\,Y}{X^2 + Y^2}$ tanto l'equazione della normale che quella del cerchio mobile conservano la stessa forma; dunque *le curve anallagmatiche si riproducono per inversione.* In particolare l'inviluppo delle circon-

ferenze aventi i centri sulla conica $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed ortogonali col cerchio R è la curva quartica $(x^2 + y^2 + R^2)^2 = 4(a^2 x^2 \pm b^2 y^2)$, ed in coordinate polari $r^4 - 2r^2(c^2 \cos 2\omega + a^2 \pm b^2 - R^2) + R^4 = o$; la quale nel caso che la conica sia un' iperbole, per il valore $R^2 = a^2 - b^2$ diviene $r^4 - 2r^2 c^2 \cos 2\omega + c^4 - 4a^2 b^2 = o$, cioè coincide con la cassinoide avente gli stessi fuochi dell' iperbole e $2ab$ per prodotto dei raggi vettori.

Il luogo geometrico dei vertici degli angoli di grandezza costante θ circoscritti ad una conica a centro è una quartica avente per equazione polare (1) $r^4 - 2r^2\left[(a^2 + b^2)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{c^2}{t^2}\cos 2\omega\right] + (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2 b^2}{t^2} = o$; dove t significa la tangente dell' angolo θ, il polo coincide col centro della curva e la direzione polare è quella dell' asse $2a$ della conica; nel caso dell' iperbole equilatera $b^2 = -a^2$ il luogo si riduce alla curva $r^4 + 4\frac{a^2 r^2}{t^2}\cos 2\omega - \frac{4a^4}{t^2} = o$, identica ad una cassinoide la cui semi-distanza focale è $\frac{a}{t}\sqrt{2}$, ed il rettangolo dei raggi vettori eguale a $\frac{2a^2}{t^2}\sqrt{1 + t^2}$.

Le curve surriferite si esprimono in coordinate omogenee con equazione simile alla quartica $(x^2 + y^2)^2 + A(x^2 + y^2)z^2 + Bx^2 z^2 + Cz^4 = o$ ove i due punti ciclici all' infinito sono punti doppi; affinchè la retta $x + y\sqrt{-1} = \delta$ risulti ad essa tangente si trova la quadrica $\delta^2(2x - \delta)^2 + A\delta(2x - \delta) + Bx^2 + C = o$, il cui discriminante nullo conduce alla biquadratica $\delta^4 - \frac{A}{B}\left(A + B - 4\frac{C}{A}\right)\delta^2 + C = o$; se le quattro radici di questa sieno reali, esisteranno quattro fuochi reali sull' asse Ox, altrimenti se due siano reali e le altre immaginarie della forma $\alpha\sqrt{-1}$, due fuochi giaceranno sull' asse Ox e due sull' asse Oy; nel caso di $C = o$ due fuochi cadono nell' origine. L' equazioni di queste curve si possono ridurre eziandio alla forma $mS^2 + nD^2 = 4a^2$, dove S e D rappresentano la somma e la differenza delle distanze di ciascun punto M da due punti fissi F, F' simmetrici rispetto al centro O, situati sull' asse Ox alla distanza $F'O = OF = a$; m, n significando numeri costanti; infatti posto $OM = r$, $MOF = \omega$ si ottiene $r^4 + r^2(A + B\cos^2\omega) + C = o$, essendo $A = a^2\left(\frac{m-1}{m} + \frac{n-1}{n}\right)$, $B = \frac{a^2}{mn}(m - n)^2$, $C = \frac{a^4}{mn}(m-1)(n-1)$.

Veggasi la memoria del signor Siebeck nel tomo 57° del Giornale di Crelle.

Le *linee spiriche*, o sezioni piane del toro sono curve di quarto grado che comprendono il luogo dei vertici degli angoli costanti circoscritti ad una conica, le pedali dei centri delle coniche sulle loro tangenti ec. Infatti si consideri la superficie $(\sqrt{x^2 + z^2} - d)^2 + y^2 - R^2 = o$ generata dalla rotazione del cerchio $(x - d)^2 + y^2 - R^2 = o$, $z = o$ attorno all' asse Oy; in-

tersecandola col piano $z = \alpha$ si ottiene la curva $(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)\times \times(\alpha^2+d^2-R^2)-4d^2(x^2+\alpha^2)+(\alpha^2+d^2-R^2)^2=0$, ovvero in coordinate polari $r^4-2r^2(R^2-\alpha^2-d^2\cos 2\omega)+(\alpha^2+d^2-R^2)^2-4d^2\alpha^2=0$ e identificando con la linea (1) si avranno le relazioni $d^2=\frac{c^2}{t^2}$, $R^2-\alpha^2= =(a^2+b^2)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$, $(R^2-\alpha^2-d^2)^2-4\alpha^2d^2=(a^2+b^2)^2+\frac{4a^2b^2}{t^2}$, dalle quali risultano i valori $d=c\cot\theta$, $\alpha=\pm\frac{b}{ct}\sqrt{1+t^2}=\pm\frac{b}{c\,sen\,\theta}$, $R=\frac{a}{c\,sen\,\theta}$.

Il Professor Barnaba Tortolini (nato in Roma il 19 novembre 1808 e morto in Ariccia il 24 agosto 1874) nel tomo VI degli Annali di matematica pura ed applicata si occupò di rettificare la linea quartica *luogo geometrico dei punti M aventi costante il rettangolo delle tangenti MT, MT' menate da ciascuno di essi a due cerchi eguali*, evidentemente ne è un caso particolare la cassinoide. Si notino con $2c$ la distanza dei centri F, F' dei due cerchi, r la comune lunghezza dei loro raggi, a^2 il prodotto delle tangenti; situando l'origine al punto medio O della retta FF' presa per asse polare, e posto $OM=\rho$, a motivo delle relazioni $TM^2-r^2=c^2+\rho^2+ +2c\rho\cos\omega-r^2$, $T'M^2-r^2=c^2+\rho^2-2c\rho\cos\omega-r^2$ si trova l'equazione $\rho^4-2\rho^2(r^2+c^2\cos 2\omega)+(c^2-r^2)^2-a^4=0$. Se il termine indipendente è positivo si avrà $c^2>\pm a^2+r^2$, la curva si compone di due ovali identiche e simmetricamente poste rispetto all'origine: indicato con θ il valore dell'angolo ω corrispondente alle radici eguali per ρ^2, che sono le tangenti condotte dal centro alle ovali si troverà $(r^2+c^2\cos 2\theta)^2= =(c^2-r^2)^2-a^4$, da cui $c^4 sen^2 2\theta=a^4+4c^2r^2\cos^2\theta$: onde nelle formule (2) del paragrafo 49 fatto $u=r^2+c^2\cos 2\omega$, $m=\sqrt{(c^2-r^2)^2-a^4}= =r^2+c^2\cos 2\theta$ si ottengono le relazioni

$$s_1+s_2=\frac{\sqrt{2}}{c}\int_0^\omega d\omega\sqrt{\frac{a^4+4r^2c^2\cos^2\omega}{\cos 2\omega-\cos 2\theta}},$$

$$s_1-s_2=\sqrt{2}\int_0^\omega d\omega\sqrt{\frac{a^4+4c^2r^2\cos^2\omega}{2r^2+c^2(\cos 2\omega+\cos 2\theta)}}.$$ Ciascuna di queste

espressioni si trasforma in un integrale ellittico di terza specie, poichè basta fare nella prima le successive sostituzioni $sen\,\omega=sen\,\alpha\,sen\,\theta$, $tang\,\alpha= =tang\,\varphi\sqrt{\frac{a^4+4c^2r^2}{a^4+4c^2r^2\cos^2\theta}}$, ed essa diverrà

$$s_1+s_2=\frac{1}{c}\int_0^\alpha d\alpha\sqrt{\frac{a^4+4c^2r^2-4c^2r^2 sen^2\theta\, sen^2\alpha}{1-sen^2\theta\, sen^2\alpha}}=\frac{1}{c}(a^4+4c^2r^2)(a^4+4c^2r^2\cos^2\theta)\times$$
$$\times\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(a^4+4c^2r^2\cos^2\theta+4c^2r^2 sen^2\theta\, sen^2\varphi)\sqrt{(a^4+4c^2r^2\cos^2\theta-a^4 sen^2\theta\, sen^2\varphi)}}$$

che si riduce alla forma normale di Legendre scrivendo $k^2 = \frac{a^4 sen^2\theta}{a^4 + 4c^2r^2\cos^2\theta} = \left(\frac{a^2}{2c^2\cos\theta}\right)^2$, $n = \frac{4c^2r^2 sen^2\theta}{a^4 + 4c^2r^2\cos^2\theta} = \left(\frac{r}{c.\cos\theta}\right)^2$, $s_1 + s_2 = \frac{(a^4 + 4c^2r^2)}{c\sqrt{a^4 + 4c^2r^2\cos^2\theta}}\,\Pi(n, k, \varphi)$.
In questa attribuendo ad ω il valore θ, gli angoli α e φ divengono eguali a $\frac{\pi}{2}$ e la somma $s_1 + s_2$ si riduce al quarto del perimetro di ciascuna ovale.

Per la differenza degli archi s_1, s_2 si faccia $2r^2 + c^2\cos 2\theta = c^2\cos 2\theta_1$, e con le successive sostituzioni:

$$sen\,\omega = \cos\theta_1\, sen\,\alpha',\ tang\,\alpha' = tang\,\varphi'\sqrt{\frac{a^4 + 4r^2c^2}{a^4 + 4r^2c^2 sen^2\theta_1}}$$

si giunge alla forma $s_1 - s_2 = \frac{a^4 + 4r^2c^2}{c\sqrt{a^4 + 4r^2c^2 sen^2\theta_1}}\,\Pi(n', k', \varphi')$; dove $k'^2 = \frac{a^4\cos^2\theta_1}{a^4 + 4r^2c^2 sen^2\theta_1}$, ed $n' = \frac{4r^2c^2\cos^2\theta_1}{a^4 + 4r^2c^2 sen^2\theta_1}$. Quando poi risulti $r^2 < c^2 < r^2 + a^2$, la curva si compone di una sola ovale, e per la sua rettificazione si prenderanno la somma e la differenza degli archi compresi fra i limiti o ed ω, ed i limiti $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \omega$ come si è fatto per la cassinoide (pag. 142).

È facile dimostrare che segando il toro $(\sqrt{x^2 + z^2} - d)^2 + y^2 - R^2 = o$ con un piano $z = \alpha$ parallelo alle circonferenze meridiane si avrà la quartica luogo dei punti aventi comune il rettangolo delle loro distanze ai cerchi eguali sezioni del piano medesimo con le sfere iscritte $(x \pm d)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = o$; infatti i quadrati delle tangenti t, t_1 menate a queste sfere da un punto M della superficie torica hanno per espressioni $t^2 = (x - d)^2 + y^2 + z^2 - R^2$, $t_1^2 = (x + d)^2 + y^2 + z^2 - R^2$, e quindi $t^2t_1^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^2 - 4d^2x^2$, inoltre dall'equazione del toro scritta sotto la forma $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 2d\sqrt{x^2 + z^2}$ si conchiude $t^2t_1^2 = 4d^2(x^2 + z^2) - 4d^2x^2$, ovvero $t\,t_1 = \pm 2dz$; se $\alpha = \pm R$ la curva è una cassinoide.

La tangente δ_i condotta da un punto x, y, z della superficie torica ad una qualunque delle sfere $(x - d\cos\alpha_i)^2 + (z - d\,sen\,\alpha_i)^2 + y^2 - R^2 = o$ iscritte nel toro si esprime semplicemente in funzione delle surriferite t, t_1 tangenti alle sfere opposte e dell'angolo α_i; infatti si ha $\delta_i^2 = (x - d\cos\alpha_i)^2 + (z - d\,sen\,\alpha_i)^2 + y^2 - R^2 = t^2 + 2dx - 2dx\cos\alpha_i - 2dz\,sen\,\alpha_i$, e questa a motivo delle relazioni $t_1^2 - t^2 = 4dx$, $t\,t_1 = 2dz$ diviene $\pm\delta_i = t\cos\frac{\alpha_i}{2} - t_1 sen\frac{\alpha_i}{2}$. Considerando le tangenti δ_1, δ_2, δ_3 menate da un punto della superficie del toro a tre sfere qualunque iscritte, in virtù delle identità goniometriche $sen(\alpha_1 - \alpha_2)\cos\alpha_3 + sen(\alpha_2 - \alpha_3)\cos\alpha_1 + sen(\alpha_3 - \alpha_1)\cos\alpha_2 = o$, $sen(\alpha_1 - \alpha_2)\,sen\,\alpha_3 + sen(\alpha_2 - \alpha_3)\,sen\,\alpha_1 +$

$+ sen\,(\alpha_3 - \alpha_1)\, sen\,\alpha_2 = o$ si deduce l'eguaglianza $\delta_1\, sen\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\right) \pm$
$\pm\, \delta_2\, sen\left(\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\right) \pm \delta_3\, sen\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = o$, moltiplicandola per $2\,d$ e chiamati a_1, a_2, a_3 i lati del triangolo formato dai centri delle sfere risulta il teorema di Darboux $a_1\,\delta_1 \pm a_2\,\delta_2 \pm a_3\,\delta_3 = o$. Un piano P secante il toro determinerà sulle sfere iscritte tre circonferenze doppiamente tangenti alla curva di intersezione e dette b_1, b_2, b_3 le congiungenti a due a due i centri dei cerchi, c_1, c_2, c_3 le distanze di questi punti dai centri delle sfere, r_1, r_2, r_3 le tangenti condotte da un punto della superficie torica alle circonferenze, dal teorema dimostrato consegue la relazione

$$r_1 = r_2 \sqrt{\frac{b_2^{\,2} + (c_3 - c_1)^2}{b_1^{\,2} + (c_3 - c_2)^2}} \pm r_3 \sqrt{\frac{b_3^{\,2} + (c_2 - c_1)^2}{b_1^{\,2} + (c_3 - c_2)^2}};$$

per ciascun piano P tangente due sfere iscritte da una parte e la terza dall'altra si farà $c_2 = c_3 = R$, $c_1 = -R$, i cerchi riduconsi a tre punti di contatto A, B, C fuochi della sezione e si avrà $MC = \alpha\,.\,MA + \beta\,.\,MB$, dove $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{b_2^{\,2} - b_3^{\,2}}{b_1^{\,2}}$; così l'equazione della cassinoide in coordinate cartesiane si può scrivere sotto la forma

$$\sqrt{y^2 + (x+h)^2} = sen\,\varphi \sqrt{y^2 + (x-c)^2} - cos\,\varphi \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$

insieme con $h = \pm\, c\,.\,cos\,2\,\varphi$, $sen\,2\,\varphi = \frac{a^2}{c^2}$; quindi esistono altri due fuochi sulla congiungente i due primi quando a è minore di c, equidistanti dal centro del segmento $h = \frac{1}{c}\sqrt{c^4 - a^4}$. Trasformando col metodo dell'inversione le sezioni piane del toro e preso il polo in uno dei fuochi, la relazione $CM = \alpha\, AM + \beta\, BM$ diviene $\frac{1}{CC'.CM'} = \frac{\alpha' A' M'}{CA'\,.\,CM'} +$
$+ \frac{\beta' B' M'}{CB'\,.\,CM'}$, cioè $\lambda\, A' M' + \mu\, B' M' = 1$, λ, μ numeri costanti, ed evidentemente il luogo di M' è un'ovale cartesiana avente i fuochi nei punti inversi degli altri due fuochi della curva diretta. Dunque *le curve inverse delle sezioni piane del toro, ed in particolare dell'ellissi di Cassini, sono ovali di Cartesio.*

51. — Siano r, r' le distanze variabili di ciascun punto M dell'ovale cartesiana dai due fuochi F, F', λ un numero costante diverso da uno ed l un dato segmento rettilineo, si rappresenterà la detta curva con l'equazione bipolare $r' + \lambda\, r = l$; indicato con ω uno degli angoli del raggio vettore $FM = r$ con la retta focale $FF' = d$ trovasi $r'^2 = r^2 +$
$+ 2\,dr\,cos\,\omega + d^2 = (l - \lambda r)^2$ e quindi (1) $r^2(1 - \lambda^2) + 2\,r\,(d\,cos\,\omega + \lambda\,l) +$
$+ d^2 - l^2 = o$. Ai valori $\omega = o, = \pi$ corrispondono le distanze del fuoco

F dai punti d'intersezione A_1, A_2, A_3, A_4 dei rami della curva con l'asse, $FA_1 = \frac{l-d}{1+\lambda}$, $FA_2 = -\frac{d+l}{1-\lambda}$, $FA_3 = \frac{l+d}{1+\lambda}$, $FA_4 = -\frac{(l-d)}{1-\lambda}$ ed applicando la nota formula $A_i A_h = FA_h - FA_i$ si avranno i segmenti determinati dalla curva sull'asse medesimo. Se $\lambda = \pm 1$ l'ovale si riduce alle coniche a centro; invece per λ^2 diverso dall'unità, la curva è una quartica e con l'equazione polare si dimostra non esservi limite per $\cos\omega$ quando si faccia $r = \infty$, onde *le ovali cartesiane non hanno asintoto.* Sulla congiungente i due fuochi F, F' esiste un terzo fuoco F'' che si può associare a ciascuno dei primi in modo che due dei tre raggi vettori corrispondenti r, r', r'' saranno sempre collegati da una relazione lineare; infatti sia x la distanza di un punto dell'asse dal fuoco F e si elimini ω fra la (1) e l'eguaglianza $r''^2 = r^2 + x^2 + 2\,r\,x\cos\omega$, ne risulterà:

$$r''^2 = r^2\left[1 + x\frac{(\lambda^2-1)}{d}\right] - 2\frac{l\lambda r}{d}x + x^2 + x\frac{(l^2-d^2)}{d},$$

ed affinchè questo secondo membro riducasi al quadrato di un binomio lineare rispetto ad r, dovrà sussistere la condizione $l^2\lambda^2x^2 = \left(d + x(\lambda^2-1)\right)\times\left[d\,x^2 + x(l^2-d^2)\right]$; da cui oltre le due radici o, d si ottiene $d'' = \frac{d^2-l^2}{d(1-\lambda^2)}$, onde la relazione fra i raggi r'', r diverrà $r'' + \frac{l}{d}r = \lambda\,d''$. Simboleggino ω', ω'' gli angoli formati dai respettivi raggi r', r'' con l'asse $FF'F''$ dalla stessa parte dell'angolo ω, a motivo dei triangoli $F'FM$, $FF''M$ si hanno le serie di ragioni eguali $\frac{r}{sen\,\omega'} = \frac{r'}{sen\,\omega} = \frac{d}{sen\,(\omega'-\omega)}$, $\frac{r}{sen\,\omega''} = \frac{r''}{sen\,\omega} = \frac{d''}{sen\,(\omega''-\omega)}$ ed eliminando i raggi vettori mediante l'equazioni bipolari risultano $l\,sen\,(\omega'-\omega) = d\,(sen\,\omega + \lambda\,sen\,\omega')$, $\lambda\,sen\,(\omega''-\omega) = sen\,\omega + \frac{l}{d}sen\,\omega''$. Nel caso di $l = d$ l'ovale di Cartesio si riduce ad una concoide circolare o lumaca di Pascal. Scrivendo per brevità $a = \frac{d}{1-\lambda^2}$, $b = \frac{l\lambda}{1-\lambda^2}$, $c = \frac{l^2-d^2}{1-\lambda^2}$ l'equazione polare dell'ovale prende la forma $r^2 + 2\,r\,(a\cos\omega + b) - c = o$, le due costanti a, b si posson supporre dello stesso segno, altrimenti si ridurrebbero col sostituire $\pi - \omega$ in luogo di ω. Un'ovale cartesiana è il luogo geometrico dei punti M aventi le loro distanze a due circonferenze date A, B di sito e grandezza in una data ragione; le congiungenti il punto M coi centri A, B seghino le circonferenze nei punti D, C, la retta DC passerà per un punto fisso O della retta AB; poichè dal teorema di Menelao risulta $\frac{MD}{AD}\cdot\frac{AO}{BO}\cdot\frac{BC}{MC} = 1$, ed essendo per ipotesi costante il rapporto $MD : MC$ si conchiude pur

tale il rapporto $\frac{AO}{BO}$. Parimente se un quadrangolo $ABCD$ ha i lati eguali due a due $AB = BC = a$, $CD = DA = b$, i vertici A, B fissi mentre gli altri due C, D ruotano intorno ai primi, il punto d'incontro M dai lati opposti BC, AD descriverà un'ovale cartesiana; infatti nel triangolo ABM la BD bisettrice dell'angolo ABC determina sul lato $AM = r$ i due segmenti AD, DM proporzionali ai lati adiacenti AB, $BM = r'$ ovvero $\frac{r-b}{b} = \frac{r'}{a}$, da cui $\frac{r}{b} - \frac{r'}{a} = 1$.

Gli archi delle ovali di Cartesio furono rettificati dal geometra W. Roberts mediante integrali iperellittici (contenenti cioè radicali quadrici di polinomi interi rispetto alla variabile e di grado superiore al quarto) e lo stesso Roberts provò che la differenza fra due archi suddetti poteva esprimersi con archi di ellisse. Il Professor Angelo Genocchi sino dall'anno 1855 enunciò nel giornale letterario di Torino *Il Cimento*, vol. 6°, fascicolo 7°, il bel teorema che ogni arco di ovale cartesiana è la somma algebrica di tre archi ellittici; espose dopo la dimostrazione in una sua memoria inserita negli Annali di matematica pura ed applicata, dell'anno 1864 col titolo: *Intorno alla rettificazione ed alle proprietà delle caustiche secondarie*, si fonda sulla seguente proposizione analitica.

L'integrale ultra ellittico $v = \int 2dz(p+qz^2)\sqrt{\frac{m+z^2}{(1+mz^2)^3(1+2nz^2+z^4)}}$ *si riduce alla somma d'integrali ellittici di prima e seconda specie.* Infatti ponendo (1) $z^2 + \frac{1}{z^2} = x$, indi $mx + m^2 + 1 = X$, $2n + x = X_1$ si hanno le identità (2) $(1+mz^2)(m+z^2) = z^2 X$, $1 + 2nz^2 + z^4 = z^2 X_1$ e l'elemento infinitesimale di v assume la forma $\frac{2(p+qz^2)(m+z^2)^2 dz}{z^4 X \sqrt{XX_1}}$: per esprimerlo tutto in funzione della nuova variabile x, si sviluppi il numeratore ordinato secondo le potenze crescenti di z^2 e poi diviso per $z^2 X$ si elimini tanto il primo che l'ultimo termine servendosi delle eguaglianze $\frac{pm^2}{z^2 X} = pm - \frac{pm^2 z^2}{X} - \frac{pm(m^2+1)}{X}$, $\frac{qz^4}{X} = \frac{qz^2}{m} - \frac{qz^2}{mX} - \frac{qmz^2}{X} - \frac{q}{X}$ ricavate dalla (2); si otterrà primieramente

$$(3)\ dv = \left[pm + \frac{q}{m}z^2 + \frac{(1-m^2)(pm-q)}{m}\frac{z^2}{X} + \frac{(1-m^2)(pm-q)}{X}\right]\frac{2\,dz}{z^2\sqrt{XX_1}};$$

e poichè la (1) equivale all'equazione $\left(z \pm \frac{1}{z}\right)^2 = x \pm 2$, per i valori di z minori di uno si deducono l'eguaglianze $2z = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$; $\frac{2}{z} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ e da queste i differenziali $4\,dz = \frac{dx}{\sqrt{x+2}} -$

$-\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$, $-\frac{4\,dz}{z^2}=\frac{dx}{\sqrt{x-2}}+\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ onde la (3) diviene

$$(4)\quad dv=\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x+2}}\left(\frac{q-pm^2}{m\sqrt{XX_1}}-\frac{(1+m)(m-1)^2(q-pm)}{m\sqrt{X^3X_1}}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}\left[\frac{q+pm^2}{m\sqrt{XX_1}}-\frac{(m-1)(1+m)^2(q-pm)}{m\sqrt{X^3X_1}}\right]$$

e per i valori di $z>1$, si muta il segno di $\sqrt{x-2}$. Le due parti di dv si riducono alle forme normali di Legendre, facendo prima $\sqrt{x-2}=\frac{m+1}{\sqrt{m}}\cot\varphi'$ e ne conseguono l'espressioni

$$\frac{dx}{2\sqrt{x-2}}=-\frac{(m+1)}{\sqrt{m}}\frac{d\varphi'}{sen^2\varphi'},\quad \sqrt{X}=\frac{m+1}{sen\,\varphi'},$$

$$\sqrt{X_1}=\frac{m+1}{sen\,\varphi'}\sqrt{\frac{1-h'^2\,sen^2\varphi'}{m}},\ \text{con}\ h'^2=\frac{1+m^2-2mn}{(1+m)^2},$$

e gl'integrali ellittici

$$\int\frac{dx}{2\sqrt{(x-2)XX_1}}=-\frac{1}{m+1}F(h',\varphi'),\ \int\frac{dx}{2\sqrt{(x-2)X^3X_1}}=\frac{E(h',\varphi')-F(h',\varphi')}{(m+1)^3h'^2};$$

in secondo luogo scrivendo $\sqrt{x+2}=\frac{m-1}{\sqrt{m}}\cot\varphi''$, ne discendono le formule simili $\frac{dx}{2\sqrt{x+2}}=-\frac{m-1}{\sqrt{m}}\frac{d\varphi''}{sen^2\varphi''}$, $\sqrt{X}=\frac{m-1}{sen\,\varphi''}$, $\sqrt{X_1}=$ $=\frac{m-1}{sen\,\varphi''}\sqrt{\frac{1-h''^2\,sen^2\varphi''}{m}}$, dove $h''^2=\frac{1+m^2-2mn}{(m-1)^2}=h'^2\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2$, e si conchiudono gl'integrali $\int\frac{dx}{2\sqrt{(x+2)XX_1}}=-\frac{1}{m-1}F(h'',\varphi'')$, $\int\frac{dx}{2\sqrt{(x+2)X^3X_1}}=\frac{E(h'',\varphi'')-F(h'',\varphi'')}{(m-1)^3h''^2}$; dunque l'integrale della (4) sarà (5) $v=\frac{pm^2-q}{m(m-1)}F(h'',\varphi'')+\frac{(1+m)(pm-q)}{m(m-1)h''^2}[E(h'',\varphi'')-F(h'',\varphi'')]+$ $+\frac{q+pm^2}{m(m+1)}F(h',\varphi')+\frac{(m-1)(pm-q)}{m(m+1)h'^2}[E(h',\varphi')-F(h',\varphi')]$. Eguagliati i due valori di x si ottiene $(m+1)^2-(m-1)^2=(m-1)^2\cot^2\varphi''-$ $-(m+1)^2\cot^2\varphi'$, ovvero $h''\,sen\,\varphi''=h'\,sen\,\varphi'$.

Risoluta l'equazione dell'ovale cartesiana rispetto al raggio vettore $r=\sqrt{c+(a\cos\omega+b)^2}-(a\cos\omega+b)$, si ha per sua derivata

$$\frac{dr}{d\omega}=\frac{ar\,sen\,\omega}{\sqrt{c+(a\cos\omega+b)^2}}\ .$$

ed in virtù della formula $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\omega^2$ facilmente risulta

$$\frac{ds}{d\omega} = r\sqrt{\frac{a^2+b^2+2\,ab\cos\omega+c}{c+(a\cos\omega+b)^2}} = \sqrt{a^2+b^2+2\,ab\cos\omega+c}\, -$$

$$-\,(a\cos\omega+b)\sqrt{\frac{a^2+b^2+2\,ab\cos\omega+c}{c+(a\cos\omega+b)^2}},$$ cioè l'arco infinitesimo dell' ovale si decompone nei due differenziali $du = d\omega\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\omega+c}$, $dv = d\omega\,(a\cos\omega+b)\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+2\,ab\cos\omega+c}{c+(a\cos\omega+b)^2}}$. Il primo diviene ellittico di seconda specie mediante la sostituzione $\omega = 2\theta$, ed ha per integrale $u = \dfrac{4\sqrt{ab}}{k}E(k,\theta)$ dove $k^2 = \dfrac{4\,ab}{c+(a+b)^2}$; l'altro dv assumerà la stessa forma iperellittica della precedente proposizione facendo

$$\cos\omega = \frac{1-mz^2}{1+mz^2} \text{ e quindi } a\cos\omega + b = \frac{a+b-m\,(a-b)\,z^2}{1+mz^2},$$

$$d\omega = \frac{2\,dz\sqrt{m}}{1+mz^2},\ a+b=p,\ m\,(b-a)=q,\ \frac{c+(a+b)^2}{c+(a-b)^2}=m^2,\ \frac{c+b^2-a^2}{c+(a-b)^2} =$$

$= mn$; onde ne conseguono le relazioni $mp - q = 2\,am$, $\dfrac{q \pm pm^2}{m} =$ $= b - a \pm m\,(a+b)$, $h'^2 = \left(\dfrac{m-1}{m+1}\right)\dfrac{a}{b}$, $h''^2 = \left(\dfrac{m+1}{m-1}\right)\dfrac{a}{b}$, e per la (5) si avrà

$v = 2\,b\,E(h',\varphi') + 2\,b\,E(h'',\varphi'') - b\,(1-h'^2)\,F(h',\varphi') - b\,(1-h''^2)\,F(h'',\varphi'')$.
La quale espressione si ridurrà alla somma algebrica di integrali ellittici di seconda specie applicando il teorema di Landen pag. 31 cioè: $2\,E(h',\varphi') - (1-h'^2)\,F(h',\varphi') = 2\,(1+h')\,E(k',\theta') - 2\,h'\operatorname{sen}\varphi'$, $2\,E(h'',\varphi'') - (1-h''^2)\,F(h'',\varphi'') = 2\,(1+h'')\,E(k'',\theta'') - 2\,h''\operatorname{sen}\varphi''$ sussistendo l'eguaglianze $\operatorname{sen}(2\,\theta' - \varphi') = h'\operatorname{sen}'\varphi'$, $\operatorname{sen}(2\,\theta''-\varphi'') = h''\operatorname{sen}\varphi''$, e le relazioni $k' = \dfrac{2\sqrt{h'}}{1+h'}$, $k'' = \dfrac{2\sqrt{h''}}{1+h''}$ fra i moduli; perlochè l'arco dell' ovale essendo $u - v$ si esprimerà con la formula $s = \dfrac{4\sqrt{ab}}{k}E(k,\theta) - 2\,b\,(1+h')\,E(k',\theta') - 2\,b\,(1+h'')\,E(k'',\theta'') + 4\,b\,h'\operatorname{sen}\varphi'$; dunque *ogni arco di ovale cartesiana è la somma algebrica di un segmento rettilineo e di tre archi ellittici.* Inoltre dalle surriferite relazioni si ottiene $c = \dfrac{(a+b)^2 - m^2\,(a-b)^2}{m^2-1} =$ $= \left(a\left(\dfrac{m+1}{m-1}\right) - b\right)\left(b - a\left(\dfrac{m-1}{m+1}\right)\right)$; eliminando poi d ed l fra i valori di a, b, c espressi in funzione di λ, d, l risulta $c = (a^2\lambda^2 - b^2)\left(1 - \dfrac{1}{\lambda^2}\right)$,

paragonando questa alla precedente si deduce $\frac{m+1}{m-1}=\frac{a\lambda^2}{b}=\frac{\lambda d}{l}$, quindi posto $k=\frac{2\sqrt{h}}{1+h}$, ne conseguono $h=\frac{\lambda d}{l}$, $h'=\frac{1}{\lambda}$ ed $h''=\frac{a}{b}\lambda=\frac{d}{l}$. I semi-assi maggiori delle tre ellissi rettificatrici diverranno $\frac{4\sqrt{ab}}{k}=\frac{2b}{\lambda}(1+h)=2\left(\frac{l+\lambda d}{1-\lambda^2}\right)$, $2b(1+h')=\frac{2l}{1-\lambda}$, $2b(1+h'')=$ $=\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}(d+l)$; che sono i respettivi segmenti A_2A_1, $FA_1-FA_2=$ $=A_2F+A_4F$, A_2F+A_3F determinati dalla curva sull'asse focale. Per ottenere le relazioni fra gli angoli ω, φ, θ basterà ricavare z dall'equazione $\cos\omega=\frac{1-mz^2}{1+mz^2}$, e sostituirlo nelle due $\frac{1}{z}-z=\frac{m+1}{\sqrt{m}}\cot\varphi'$, $\frac{1}{z}+z=$ $=\frac{m-1}{\sqrt{m}}\cot\varphi''$; queste facilmente si ridurranno a

$$\cos\varphi'\,\mathrm{sen}\,\omega=\mathrm{sen}\,\varphi'\left(\cos\omega+\frac{l}{d\lambda}\right),\ \cos\varphi''\,\mathrm{sen}\,\omega=\mathrm{sen}\,\varphi''\left(\cos\omega+\frac{d\lambda}{l}\right);$$

eliminando gli angoli φ', φ'' fra le precedenti e le altre due della sostituzione di Landen, cioè

$$\mathrm{sen}\,\varphi'\left(\cos 2\theta'+\frac{1}{\lambda}\right)=\mathrm{sen}\,2\theta'\cos\varphi',\ \mathrm{sen}\,\varphi''\left(\cos 2\theta''+\frac{d}{l}\right)=\cos\varphi''\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

si giunge all'eguaglianze $\mathrm{sen}\,(2\theta'-\omega)=\frac{l}{d\lambda}\,\mathrm{sen}\,2\theta'+\mathrm{sen}\,\omega$, $\mathrm{sen}(2\theta''-\omega)=$ $=\frac{d}{l}(\mathrm{sen}\,\omega-\lambda\,\mathrm{sen}\,2\theta'')$, dalle quali si conchiude che *le ampiezze* θ, θ', θ'' *sono identiche alle metà degli angoli respettivi* ω, ω'', ω' *formati dai tre raggi vettori con l'asse focale.*

52. — Il professor Alfredo Serret dell'Università di Parigi, l'anno 1845 scoprì un'infinità di curve algebriche rettificabili per integrali ellittici di prima specie, ed il suo mirabile scritto *sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques* è stampato nell'undicesimo volume delle *Mémoires présentées par divers Savants à l'Académie des Sciences.* Volendo giungere con metodo elementare alla prima classe di curve del Serret si assuma per variabile indipendente r il raggio vettore diviso per il segmento unitario, e l'arco sia espresso dall'integrale $s=\sqrt{m^2-h^2}\int\frac{dr}{R}$, dove $R^2=-r^4+2mr^2-h^2$ ed i numeri m, h significano costanti; a motivo della nota relazione $ds^2=dr^2+r^2d\omega^2$ ne consegue $r^2\frac{d\omega^2}{dr^2}=\frac{1}{R^2}(r^2-m)^2$;

da cui $d\omega = \frac{(r^2 - m)\,dr}{rR} = \frac{(h-m)(r^2+h)\,dr + (h+m)(r^2-h)\,dr}{2hrR}$. Si separino i due differenziali contenuti nel secondo membro scrivendoli

$$d\beta = -\frac{(r^2+h)\,dr}{r\sqrt{2(m-h)r^2 - (r^2-h)^2}}, \quad d\gamma = \frac{-(r^2-h)\,dr}{r\sqrt{2(m+h)r^2 - (r^2+h)^2}},$$

e mediante l'integrazione delle tre precedenti risulteranno l'eguaglianze (4)

$$\cos\beta = \frac{r^2-h}{r\sqrt{2(m-h)}}, \cos\gamma = \frac{r^2+h}{r\sqrt{2(m+h)}}, \ (5)\ \omega = \frac{(m-h)\beta-(m+h)\gamma}{2h}.$$

Eliminando β e γ fra queste si avrà l'equazione polare della curva evidentemente algebrica, se i numeri m ed h siano commensurabili. Dalle (4) discendono le relazioni (6) $\frac{R}{r} = \sqrt{2(m-h)}\,sen\,\beta = \sqrt{2(m+h)}\,sen\,\gamma$,

onde il differenziale dell'arco riducesi alle semplici forme

$$ds = \sqrt{m^2-h^2}\,\frac{r\,d\beta}{r^2+h} = \sqrt{\frac{m-h}{2}}\,\frac{d\beta}{\cos\gamma} = \sqrt{\frac{m-h}{2}}\,\frac{d\beta}{\sqrt{1-\left(\frac{m-h}{m+h}\right)sen^2\beta}}.$$

Simboleggi α l'angolo che la tangente al punto M della curva fa col raggio vettore e p la normale abbassata dal polo sulla tangente, in virtù della (2) si hanno le relazioni

$$(7)\ tang\,\alpha = \frac{r\,d\omega}{dr} = \pm\frac{(r^2-m)}{R},\ (8)\ p = r\,sen\,\alpha = \pm\frac{r(r^2-m)}{\sqrt{m^2-h^2}}$$

ed il raggio di curvatura (9) $\rho = \frac{r\,dr}{dp} = \frac{\pm r\sqrt{m^2-h^2}}{3r^2-m}$; i valori di p, ρ devono prendersi positivi. Le dette curve sono esattamente quadrabili; infatti dalla (2) si trova il differenziale dell'arco

$$dA = \frac{r^2\,d\omega}{2} = \frac{(r^2-m)\,d(r^2)}{4\sqrt{-r^4+2mr^2-h^2}},$$

e preso r^2 per variabile indipendente (10) $A = C - \frac{1}{4}\sqrt{-r^4+2mr^2-h^2}$.(*)

Di queste curve Serret espose una genesi geometrica, che trovasi pure al paragrafo 569 del suo bel trattato di calcolo integrale. Facendo

(*) Nell'ipotesi di $h = o$ le precedenti relazioni si riducono a $ds = \frac{m\,dr}{r\sqrt{2m-r^2}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{d\beta}{\cos\beta}$, dove $\cos\beta = \frac{r}{\sqrt{2m}}$, $d\omega = \frac{(r^2-m)\,dr}{r^2\sqrt{2m-r^2}}$, il cui integrale è la linea trascendente $\omega = -\,arc\,\cos\frac{r}{\sqrt{2m}} + \frac{1}{2r}\sqrt{2m-r^2}$.

$m = 2n + 1, h = 1$ le formule divengono $R^2 = -r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1$, $s = \sqrt{n}\,F\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}, \beta\right)$; $\cos\beta = \frac{r^2-1}{2r\sqrt{n}}$, $\cos\gamma = \frac{r^2+1}{2r\sqrt{n+1}}$, $\omega = n\beta - (n+1)\gamma$; per eliminare gli angoli β, γ si consideri l'equazione $e^{i\omega} = (e^{i\beta})^n (e^{i\gamma})^{-(n+1)}$ dove $i = \sqrt{-1}$ ed applicando il teorema di Euler si otterrà $\cos\omega + i\,sen\,\omega = (\cos\beta + i\,sen\,\beta)^n (\cos\gamma - i\,sen\,\gamma)^{n+1}$, che per la sostituzione dei precedenti valori di $\cos\beta$, $\cos\gamma$ e di $sen\,\beta = \frac{R}{2r\sqrt{n}}$, $sen\,\gamma = \frac{R}{2r\sqrt{n+1}}$ si trasformerà in

$$(11) \qquad \cos\omega + i\,sen\,\omega = \frac{(1 + r^2 - iR)(-1 + (2n+1)r^2 + iR)^n}{2^{n+1}\, r^{2n+1} \sqrt{n^n\,(n+1)^{n+1}}}.$$

Attribuendo ad n un valore intero positivo e sviluppando il secondo membro col binomio di Newton si ricavano le formule $x = r\cos\omega = \frac{F(r^2)}{r^{2n}}$, $y = r\,sen\,\omega = \frac{f(r^2)}{r^{2n}} R$; sendo le funzioni $F(r^2), f(r^2)$ razionali ed intere rispetto ad r^2 e dei respettivi gradi $n+1, n$. Se il numero n sia la frazione irreducibile $\frac{a}{b}$, innalzando i due membri della (11) alla potenza b e poi identificando le parti reali ed i coefficienti di i, si troveranno l'equazioni polari (12) $\cos b\,\omega = \frac{F(r^2)}{r^{2a+b}}$, $sen\,b\,\omega = \frac{f(r^2)}{r^{2a+b}} R$, dove i gradi delle due funzioni intere $F(r^2), f(r^2)$ sono respettivamente $a+b$, $a+b-1$. La prima delle eguaglianze (12) in virtù del noto sviluppo di $\cos b\,\omega$ in funzione di $\cos\omega$ si esprime in coordinate cartesiane ortogonali (13) $(x^2+y^2)^a \times [x^b - b_2 x^{b-2} y^2 + b_4 x^{b-4} y^4 - \ldots] = F(x^2+y^2)$, sendo b_r il coefficiente binomiale $(r+1)^{simo}$ rispetto all'esponente b, onde la curva è del grado $2(a+b)$ ed il suo arco rappresenta l'integrale ellittico di prima specie con il modulo $\sqrt{\frac{a}{a+b}}$; è chiaro che per $n = \frac{b}{a}$ con lo stesso ragionamento si perviene ad una curva dello stesso grado, ed il cui arco rappresenta l'integrale ellittico di prima specie col modulo complementare $\sqrt{\frac{b}{a+b}}$.

Nel caso di $n = 1$ si trova la curva $r^2(r^2 - 4r\cos\omega + 4) = 1$ che è la lemniscata di Bernoulli, avente l'unità di misura per semi-distanza focale.

Per il valore particolare $n = \frac{1}{2}$ la (11) innalzata a quadrato diviene

$$\cos 2\omega + i\,sen\,2\omega = \frac{1}{r^4\sqrt{27}}(r^4 - r^2 + 1 - i(1+r^2)R)(-1 + 2r^2 + iR);$$

ne consegue la curva sestica $\cos 2\omega = \frac{r^6 + 6r^2 - 2}{3r^4\sqrt{3}}$ rettificabile con

integrale ellittico di prima specie e di modulo $\sqrt{\frac{1}{3}}$; si ponga $r^2 = x + \sqrt{3}\, cos\, 2\omega$, la precedente si abbasserà alla cubica $x^3 + 3p'x + 2q' = o$, sendo $p' = -1 + 3\, sen^2 2\omega$, $q' = 3\sqrt{3}\, cos\, 2\omega\, sen^2 2\omega - 1$ ed il discriminante $q'^2 + p'^3 = 6\sqrt{3}\,.\, sen^2 2\omega \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - cos\, 2\omega\right)$. L'equazione polare dimostra che la curva è simmetrica rispetto a ciascuno degli assi $\omega = o$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, onde basterà solo discuterla nel primo quadrante xOy; variando l'angolo ω da o a $\frac{\pi}{12}$, la cubica ha tre radici reali positive x_1, x_2, x_3, e ai detti limiti due sono eguali così per $\omega = o$ si ottiene $x_1 = 2, x_2 = x_3 = -1$ corrispondenti al vertice A ed al punto doppio B, onde risultano $OA = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $OB = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$; per $\omega = \frac{\pi}{12}$ le radici della cubica sono $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ ed il raggio vettore $OC = \sqrt{2}$ tocca la curva nel punto C e la sega in I punto medio di OC; infine variando ω da $\frac{\pi}{12}$ a $\frac{\pi}{2}$ il discriminante è positivo, la cubica ha una sola radice reale positiva e per $\omega = \frac{\pi}{2}$ si trova la radice semplice $x_1 = 2$ ed il segmento $OD = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Tanto la variabile r che x sono funzioni continue di ω, l'angolo α della tangente col raggio vettore si determina per la formula (7); così nel punto doppio le due tangenti sono inclinate sull' asse polare secondo angoli eguali, il cui seno è $\sqrt{3 - 1}$.

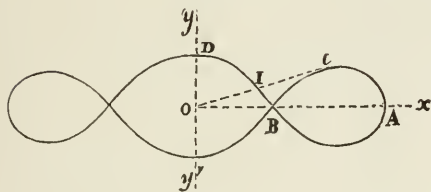



Fig. 28ª.

Il raggio di curvatura ha per espressione $\rho = \frac{\pm r\sqrt{3}}{3r^2 - 2}$ e siccome al valore $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ corrisponde $cos\, 2\omega = \frac{31}{54}\sqrt{3}$ ed $\omega = \pm 3^\circ\, 3'12'', 2$, vi saranno due punti d'inflessione l'uno situato sull' arco BI e l'altro simmetrico del primo rispetto ad Ox.

L'equazione (11) per $n = 2$ dà la curva sestica $\frac{4r^6 + 27r^4 - 12r^2 + 1}{12r^5\sqrt{3}} = cos\, \omega$; che si costruisce determinando prima i punti di sezione con l'asse polare Ox; ora fatto $\omega = o$ la precedente diviene $(2r^2 - r\sqrt{3} - 1)^2 \times (r^2 - 2r\sqrt{3} + 1) = o$, che ha le due radici dop-

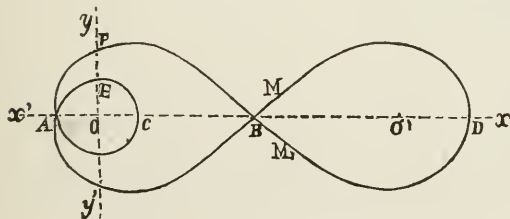



Fig. 29ª.

pie $OA = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}$, $OB = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$ e le radici semplici $OC = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $OD = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, A e B sono punti doppi, ciò si verifica applicando la formula $tang\, \alpha = \frac{r\, d\omega}{dr} = \frac{-2r^4 + 5r^3\sqrt{3}\cos\omega - 9r^2 + 2}{r^3\sqrt{3}\, sen\, \omega}$, i due termini si annullano per la sostituzione delle coordinate di A e B. Come pure i punti comuni alla curva ed all' asse Oy si trovano per $\omega = \frac{\pi}{2}$, cioè risolvendo l' equazione $4r^6 + 27r^4 - 12r^2 + 1 = o$; posto $r^2 = z - \frac{9}{4}$ ne discende la cubica $z^3 - 3 \cdot \frac{97}{16} z + \frac{953}{32} = o$ avente le due radici positive $z' = 2{,}561030$, $z'' = 2{,}362058$, alle quali corrispondono i raggi vettori $OF = 0{,}55771$, $OE = 0{,}334751$. Gli altri punti della curva si costruiscono mediante le coordinate bipolari, infatti scrivendo l' equazione sotto la forma $r^2 - 3\sqrt{3}\cos\omega + \frac{27}{4} = \frac{3}{r^2} - \frac{1}{4r^4}$ si vedrà che il primo membro indica il quadrato della distanza r_1 di ciascun punto della curva da un punto O' situato sull' asse Ox, essendo $OO' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e si dedurrà la semplice relazione $r_1 = \frac{1}{2r^2}\sqrt{12r^2 - 1}$; la linea è evidentemente simmetrica rispetto all' asse polare OO' e non ha alcun punto dentro il circolo descritto dall'origine O col raggio $\sqrt{\frac{1}{12}}$. Dal raggio di curvatura $\rho = \frac{2r\sqrt{6}}{3r^2 - 5}$ si conchiude che vi sono due punti d' inflessione M, M' situati alla distanza $OM = \sqrt{\frac{5}{3}}$. I punti vicini all' asse polare si descrivono con intersezioni delle circonferenze concentriche r e le parallele all' asse Oy condotte alle respettive distanze $x = \frac{\sqrt{3}}{36}\left(27 + 4r^2 + \frac{1 - 12r^2}{r^4}\right)$.

53. — Se il differenziale dell' arco in funzione del raggio vettore r avesse per denominatore la radice quadrata del trinomio $R^2 = -r^2 + 2mr - h^2$, si troverebbe

$$ds = \frac{dr\sqrt{m^2 - h^2}}{\sqrt{m^2 - h^2 - (r-m)^2}} \text{ e quindi } \frac{s}{\sqrt{m^2 - h^2}} = arcsen\left(\frac{r-m}{\sqrt{m^2 - h^2}}\right);$$

onde la curva rettificasi per archi circolari. Si otterrà l' equazione polare osservando che la nota formula $ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2$, a motivo del prece-

dente valore dell'arco ds conduce alla relazione $d\omega = \frac{dr}{R} - \frac{mdr}{rR}$, e per conseguenza scrivendo $d\alpha = -\frac{dr}{R}$, $d\beta = \frac{-hdr}{rR}$ si avranno gl'integrali $cos\,\alpha = \frac{r-m}{\sqrt{m^2-h^2}}$, $cos\,\beta = \frac{mr-h^2}{r\sqrt{m^2-h^2}}$, $\omega = -\alpha + \frac{m}{h}\beta$ ed in virtù dell'eguaglianza $e^{i\omega} = e^{-i\alpha} \cdot e^{i\frac{m}{h}\beta}$ si conchiude $cos\,\omega + i\,sen\,\omega = (cos\,\alpha - i\,sen\,\alpha) \times$

$$\times (cos\,\beta + i\,sen\,\beta)^{\frac{m}{h}} = \left(\frac{r-m-iR}{\sqrt{m^2-h^2}}\right)\left(\frac{mr-h^2+ihR}{r\sqrt{m^2-h^2}}\right)^{\frac{m}{h}}.$$

Facendo $h = \frac{m}{n+1}$ si ottengono le curve algebriche di Euler $cos\,\omega + i\,sen\,\omega =$

$$= \frac{n+1}{m(\sqrt{n(n+2)})^{n+2}}(r-m+iR)\left[(n+1)r - \frac{m}{n+1} + iR\right]^{n+1},$$ rettificabili con archi circolari per l'eguaglianza $s = \frac{m\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\,arc\,sen\frac{(r-m)(n+1)}{m\sqrt{n(n+2)}}$.

Inoltre per $m=2$, si avranno le semplici formule $R = \left(-r^2+4r-\frac{4}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$tang\,\alpha = \frac{r\,d\omega}{dr} = \frac{r-2}{R}$, $ds = \frac{2\,dr}{(n+1)R}\sqrt{n(n+2)}$, $p = \frac{r^2\,d\omega}{ds} = \pm$

$\pm \frac{(n+1)r(r-2)}{2\sqrt{n(n+2)}}$ e del circolo osculatore il raggio $\rho = \frac{r\sqrt{n(n+2)}}{2(n+1)(r-1)}$. (*)

Per il valore $n=1$ risulta la curva di sesto grado $r^3 - 3r^2\sqrt{3}\,cos\,\omega + 6r - 2 = o$ simmetrica rispetto all'asse polare Ox; posto $r = x + \sqrt{3}\,cos\,\omega$ si ha l'equazione $x^3 + 3x(2 - 3\,cos^2\omega) + 6\sqrt{3}\,cos\,\omega\,sen^2\omega - 2 = o$, il cui discriminante è $6\sqrt{3}\,sen^2\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - cos\,\omega\right)$, onde variando ω da o a $\frac{\pi}{6}$ vi corrisponderanno tre radici reali della cubica ed una sola radice reale, allorchè ω varia da $\frac{\pi}{6}$ a π. I segmenti dell'asse Ox compresi fra il polo e la curva sono respettivamente

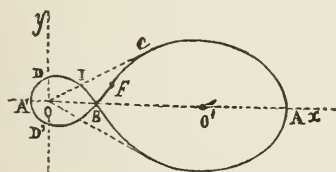



Fig. 30ª.

$OA = 2 + \sqrt{3}$, $OB = \sqrt{3} - 1$, $A_1O = 2 - \sqrt{3}$, all'angolo $\omega = \frac{\pi}{6}$ corrisponde il punto C situato sulla tangente condotta per il polo alla

(*) *De curvis algebraicis quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat.* Tomo XI, della V Serie delle *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.*

distanza $OC = 2$; la retta Oy normale all' asse polare sega la curva nei due punti D, D' (che non sono vertici) situati alle distanze $D'O = OD = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Il punto B è doppio, poichè i due termini della frazione $\frac{r^2 - 2r\sqrt{3}\cos\omega + 2}{-r\sqrt{3}\,sen\,\omega} = tang\,\alpha$ si annullano per le coordinate $\omega = o$, $r = \sqrt{3} - 1$, le due tangenti in B fanno con Ox l'angolo $\alpha = arc\,sen\left(\sqrt{3} - 1\right)$. Il punto di flesso F ha per coordinate $r{=}1$, $\omega = arctang\frac{\sqrt{2}}{5} = 15^\circ\ 47'\ 35'',4$; siccome l' equazione della curva si può scrivere $r^2 - 2\frac{3\sqrt{3}}{2}r\cos\omega + \frac{27}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{r}$, si deduce il secondo polo O' sull' asse Ox alla distanza $OO' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, quindi $r_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{r}$, relazione utile a descrivere la curva mediante le coordinate bipolari. Mutando ω in 2ω ed r in r^2 la linea si trasforma in quella discussa nell' esercizio precedente; in generale siano r, ω le coordinate polari dei punti M di una curva, nella formula $ds^2 = r^2 d\omega^2 + dr^2$ ponendo $r = r_1^n$, $\omega = n\omega_1$ si deduce $ds = nr_1^{n-1}ds_1$, ovvero $ds_1 = \frac{ds}{n\sqrt[n]{r^{n-1}}}$; dunque *se la curva s è rettificabile per archi circolari e nella sua equazione polare* $f(r_1, \omega) = o$ *si sostituiscono* r_1^2 *ad* r, *e* $2\omega_1$ *ad* ω, *la nuova curva* s_1 *sarà rettificabile per archi ellittici.* Invece scrivendo $\sqrt{r}$ ed $\frac{\omega}{2}$ in luogo di r ed ω la curva trasformata avrà il suo arco $s_1 = 2\int r\,ds$, della stessa specie della prima linea. Gli angoli che le tangenti alle due curve s, s_1 fanno con i respettivi raggi vettori nei punti omologhi sono eguali, poichè si trova $tang\,\alpha = \frac{r\,d\omega}{dr} = \frac{r_1\,d\omega_1}{dr_1} = tang\,\alpha_1$. Il geometra Nicola Fuss diè il teorema, *le curve rappresentate dall' equazione differenziale* $p{=}br{-}ar^2$, *dove* a, b *sono costanti positive, si rettificano con archi circolari;* infatti essendo $p = \frac{r^2\,d\omega}{ds}$, successivamente si ricavano $ds = \frac{r\,d\omega}{b - ar} = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\omega^2}$,

$$d\omega = \frac{(b - ar)\,dr}{r\sqrt{1 - (b - ar)^2}} = \frac{b\,dr}{r\sqrt{1 - (b - ar)^2}} - \frac{a\,dr}{\sqrt{1 - (b - ar)^2}};$$ ovvero

integrando $\omega + as = b\int\frac{dr}{r\sqrt{1 - (b - ar)^2}}$ e posto $1{-}b{+}ar{=}(1{+}b{-}ar)t^2$,

l'integrale diviene $2\int\frac{dt}{(1+b)^2+(b-1)}$, e quindi

$$(1)\qquad \omega+as=\frac{2\,b}{\sqrt{b^2-1}}\ arc\ tang\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}\ ;$$

inoltre dalla relazione $ds=\frac{dr}{\sqrt{1-(b-ar)^2}}$ si ricava $as=arc\cos(b-ar)$;

da cui (2) $r=\frac{b-\cos as}{a}$; dunque se $\frac{2\,b}{\sqrt{b^2-1}}=n$ è un numero razionale, le curve sono algebriche.

Il professor Serret osservò che le curve scoperte da Euler sono un caso particolare di quella avente le coordinate cartesiane x, y funzioni razionali della tangente trigonometrica dell'arco z di cerchio che la rettifica ed in una sua memoria, inserita nel *Journal de l'École Polytechnique* anno 1853, diè le soluzioni dell'equazione indeterminata $dx^2+dy^2=A^2\frac{dz^2}{(1+z^2)^2}$, dove A è una costante.

54. — Il differenziale $ds=\frac{A\,dr}{\sqrt{ar^6+br^4+cr^2+1}}$ si riduce ellittico per la sostituzione $r^2=\frac{1}{u}$, poichè diviene $ds=\frac{-A\,du}{2\sqrt{a+bu+cu^2+u^3}}$; così nel caso di $A=1$, $a=-1$, $b=c=o$ dalla formula $ds=\sqrt{r^2\,d\omega^2+dr^2}$ ne consegue $\frac{d\omega}{du}=\frac{1}{2u\sqrt{u^3-1}}$, il cui integrale è $\cos 3\,\omega=\frac{1}{\sqrt{u^3}}=r^3$; linea chiusa composta di tre foglie eguali e simmetricamente situate rispetto all'origine, che è un punto triplo avente per tangenti la normale Ox all'asse polare e le due rette $\omega=\pm\frac{\pi}{6}$. Il suo arco infinitesimo $ds=\frac{dr}{\sqrt{1-r^6}}=-\frac{du}{2\sqrt{u^3-1}}$ per la sostituzione $\frac{1}{r^2}=u=1+\sqrt{3}\ tang^2\frac{\varphi}{2}$ si trasforma in

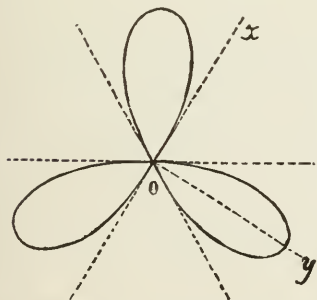



Fig. 31ª.

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\ \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)sen^2\varphi}}$$

differenziale ellittico di prima specie col modulo eguale a $sen\frac{\pi}{12}$. *Questa*

curva è il luogo geometrico del punto M avente il prodotto delle tre distanze ai vertici di un triangolo equilatero pari al cubo del raggio del cerchio circoscrittovi, infatti prendansi gli assi ortogonali Ox, Oy, il primo parallelo al lato AB di un triangolo ABC e l'origine O nel centro del cerchio circoscritto, significando con $(a_1, -b_1)$, $(-a_1, -b_1)$ le coordinate dei vertici A, B e con (a, b) quello del terzo vertice C, scrivendo $OA = OB = OC = c$, $MA . MB . MC = m^3$ trovasi l'equazione $(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2)(x^2 + y^2 - 2a_1 x + 2b_1 y + c^2)(x^2 + y^2 + 2a_1 x + 2b_1 y + c^2) = m^6$, curva di sesto grado, che nel caso di $AB = BC = CA$ per i valori $a = o, 2b_1 = c$, $a_1 = \frac{c}{2}\sqrt{3}$ si riduce alla forma $(x^2 + y^2)^3 + 2c^3 y(3x^2 - y^2) + c^6 - m^6 = o$; indi per $m = c$, preso l'asse Oy per asse polare diviene $r^3 = c^3 \cos 3\omega$, la cui equazione differenziale è $r^4 = pc^3$ ed il raggio di curvatura $R = \frac{c^3}{4r^2}$. La stessa curva è la prima pedale della linea $r^2 p = c^3$ coincidente con la inversa $r^3 = \frac{c^3}{\cos 3\omega}$, ed in coordinate ortogonali $y^2 = \frac{x^3 - a^3}{3x}$; che si compone di rami eguali e di forma iperbolica con tre punti all'infinito situati sugli asintoti $x = o, y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$, ed è *il luogo geometrico del punto avente il prodotto delle tre distanze ai vertici di un triangolo equilatero pari al cubo della distanza dello stesso punto dal centro del triangolo.* Il suo arco si rettifica per integrali ellittici di prima specie, ed invero ponendo $r^2 = cu$ ne risulta $ds = \frac{r^3\, dr}{\sqrt{r^6 - c^6}} = \frac{cu\, du}{2\sqrt{u^3 - 1}}$, come pure $ds - dt = \frac{p^2\, dp}{\sqrt{p(c^3 - p^3)}}$ ec.

55. — Le coordinate cartesiane di un punto M dello spazio si traducono in polari mediante le note formule (1) $x = r \operatorname{sen} \rho \cos \omega$, $y = r \operatorname{sen} \rho \operatorname{sen} \omega$, $z = r \cos \rho$; dove r significa il raggio vettore, ρ l'angolo di questo con l'asse Oz ed ω l'angolo di Ox con la proiezione del detto raggio sul piano $x\,Oy$. Il quadrato dell'elemento infinitesimale ds di una linea a doppia curvatura, a motivo delle (1) si esprime con (2) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \rho\, d\omega^2$ e facendo le due ipotesi (3) $ds^2 = \frac{A\, dr^2}{(a - r^2)(r^2 - b)}$, $r = m \cos \rho$ con A, a, b, m grandezze costanti si dedurrà

$$\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 = \frac{m^4 r^4 - m^2(m^2 a + m^2 b + A) r^2 + m^4(ab + A)}{r^2(m^2 - r^2)^2 (a - r^2)(r^2 - b)};$$

la quale per i valori $A = -ab$, $m^2 = \frac{ab}{a+b}$ si riduce alla derivata $\frac{d\omega}{dr} =$

$= \frac{m^2 r}{(m^2 - r^2)\sqrt{(a-r^2)(r^2-b)}}$ avente per integrale $cos^2\omega = \frac{b^2}{a^2-b^2}\left(\frac{a-r^2}{r^2-m^2}\right)$;

onde fatto $b = -ah$, le coordinate di ciascun punto della linea saranno

(4) $x^2 = \frac{h\,r^2}{a(1+h)}(a - r^2)$, $y^2 = \frac{r^2(r^2+ah)}{ah(1+h)}$, $z^2 = \frac{r^4}{ah}(h-1)$ e la (3)

per la sostituzione $r^2 = a\cos^2\varphi$ si trasforma in

$$(5) \qquad ds = \sqrt{\frac{ah}{1+h}}\;\frac{d\varphi}{1-\left(\frac{1}{1+h}\right)sen^2\varphi}.$$

Affinchè z sia reale il parametro h deve esser superiore ad uno; altrimenti mutato h nelle (4), (5) in $\frac{1}{h}$, si potranno nelle formule risultanti attribuire ad h valori positivi minori di uno; dunque gli archi della curva (4) possono rappresentare qualunque integrale ellittico di prima specie. L'ultima delle (4) esprime la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = \pm z\sqrt{\frac{ah}{h-1}}$, il cui diametro $d = \sqrt{\frac{ah}{h-1}}$, e le altre due per la sostituzione di $r^2 = dz$ tratto dalla terza divengono $x^2 = \frac{h\,dz}{1+h} - \frac{h^2}{h^2-1}z^2$, $y^2 = \frac{dz}{1+h} + \frac{z^2}{h^2-1}$ e rappresentano due cilindri quadrici, l'uno ellittico e l'altro iperbolico tangenti alla sfera e con gli assi rispettivamente paralleli ad Ox ed Oy; la linea s è pure situata sul cono $y^2 = \frac{x^2}{h} + \frac{z^2}{1+h}$. Nel caso particolare di $h = 1$, il diametro $d = \infty$, la superficie sferica diviene il piano xOy e la curva si riduce alla lemniscata di Bernoulli.

Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate dei punti della linea inversa s_1 di s, allorchè l'origine sia centro d'inversione e λ^2 la potenza: dalla serie di ragioni eguali $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{\lambda^2}{r_1^2}$ si ricavano i valori delle x, y, z in funzione delle coordinate del punto inverso e sostituendoli nelle precedenti (4) risulteranno le formule

$$x_1^2 = \frac{h}{1+h}\left(r_1^2 - \frac{\lambda^4}{a}\right), \; y_1^2 = \frac{1}{1+h}\left(r_1^2 + \frac{\lambda^4}{ah}\right), \; z_1 = \lambda^2\sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{h}\right)} = \frac{\lambda^2}{d};$$

dalle quali si conchiude che la linea inversa è l'iperbole piana $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = -1$

di semi-assi $\alpha = \frac{\lambda^2}{\sqrt{a}}$, $\beta = \frac{\lambda^2}{\sqrt{ah}}$ e distante dall'origine di $z_1 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Volendo l'equazione polare della surriferita curva sferica, si fissi il polo sull'origine O ed il raggio vettore si misuri con un arco di cerchio massimo, perlochè basterà sostituire le (1) nelle (4) cambiando prima ρ in $\frac{\pi - \rho}{2}$ e facilmente si otterrà (6) $\cos^2\frac{\rho}{2} = \frac{h}{1 + (h^2 - 1)\,sen^2\,\omega}$; oppure $tang^2\frac{\rho}{2} = \left(\frac{1}{h} - 1\right)\cos^2\omega - (1 - h)\,sen^2\,\omega$ identica a quella del n.° 41; la curva appartiene al genere delle lemniscate ed è un caso particolare del *luogo geometrico dei punti della superficie sferica aventi il rettangolo delle loro distanze a due punti fissi della stessa superficie, eguale ad un quadrato;* infatti siano questi due punti F, F' equidistanti dal polo O dell'arco $\widehat{FO} = \widehat{OF'} = \varepsilon$ e situati sulla circonferenza massima $\omega = \frac{\pi}{2}$; detti u, v i due archi geodetici $\widehat{MF}$, $\widehat{MF'}$, ρ il raggio vettore $\widehat{OM}$, k la ragione del rettangolo $MF \times MF'$ al quadrato del diametro della sfera, si ha l'eguaglianza $sen\,\frac{u}{2}\,sen\,\frac{v}{2} = k$, e per i triangoli sferici MOF, MOF' si ricavano $\cos u = \cos\varepsilon\cos\rho + sen\,\varepsilon\,sen\,\rho\,sen\,\omega$, $\cos v = \cos\varepsilon\cos\rho - sen\,\varepsilon\,sen\,\rho\,sen\,\omega$; quindi trovasi l'equazione polare del luogo

$$(1 - \cos\varepsilon\cos\rho)^2 - sen^2\,\varepsilon\,sen^2\,\rho\,sen^2\,\omega = 4\,k^2 \text{ ovvero}$$

$$\cos\rho = \frac{\cos\varepsilon \pm \sqrt{sen^4\,\varepsilon\,sen^4\,\omega - sen^2\,\varepsilon\,(sen^2\,\varepsilon - 4\,k^2)\,sen^2\,\omega + 4\,k^2\cos^2\varepsilon}}{\cos^2\varepsilon + sen^2\,\varepsilon\,sen^2\,\omega}.$$

Affinchè la quantità sotto radicale risulti un quadrato perfetto dovrà essere $4\,k^2 \pm 4\,k\cos\varepsilon - sen^2\,\varepsilon = o$, di cui una radice è $2\,k = 1 - \cos\varepsilon$, il valore di ρ corrispondente al valore negativo del radicale sarà dato da

$$\cos\rho = \frac{\cos\varepsilon - (sen^2\,\varepsilon\,sen^2\,\omega - \cos\varepsilon + \cos^2\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon + sen^2\,\varepsilon\,sen^2\,\omega}, \text{ oppure } \cos^2\frac{\rho}{2} = \frac{\sec\varepsilon}{1 + tang^2\,\varepsilon\,sen^2\,\omega}$$

identica alla (6) per $h = \sec\varepsilon$.

56. — Il Dottor Lodovico Kiepert giunse alla detta curva supponendo le coordinate cartesiane espresse per la serie di ragioni eguali

(1) $\frac{x}{(au + a_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{(bu + b_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{z}{(cu + c_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{u}$, essendo a, b, c, a_1, b_1, c_1 quantità costanti, ed u significando il valore inverso del quadrato del raggio vettore, cioè (2) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{u}$; in virtù di questa eguaglianza dovranno sussistere le due condizioni (3) $a + b + c = 1$, $a_1 + b_1 + c_1 = o$.

Differenziando la (1) si trova $4u^4\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = au + 3a_1 + \frac{a_1^2}{au + a_1}$, ed aggiungendola con le simili, che da essa si deducono col mutar x in y, z e le costanti a, a_1 nelle respettive b, b_1, c, c_1 si otterrà

$$(4)\quad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{abcu^2 + (a_1bc + b_1ca + c_1ab)u + a^2b_1c_1 + b^2c_1a_1 + c^2a_1b_1}{4u^2(au + a_1)(bu + b_1)(cu + c_1)};$$

affinchè l' arco s possa esprimersi con un integrale ellittico di prima specie sono necessarie e sufficienti le condizioni (5) $a^2b_1c_1 + b^2c_1a_1 + c^2a_1b_1 = o$, $abc = o$; ovvero (6) $\frac{a^2}{a_1} + \frac{b^2}{b_1} + \frac{c^2}{c_1} = o$, $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = o$. Il sistema (3), (5) avendo notato con λ una costante positiva, è soddisfatto col porre $c = o$; $a = \frac{1+\lambda}{2}$, $b = \frac{1-\lambda}{2}$, $c_1 = m^2$, $a_1 = -(1+\lambda)^2\frac{m^2}{4\lambda}$, $b_1 = (1-\lambda)^2\frac{m^2}{4\lambda}$ che sostituiti nelle (1) conducono alla curva sferica di Roberts. (*) Invece risolvendo il sistema (3), (6) si trovano i valori $a_1 = a(b-c)\lambda$, $b_1 = b(c-a)\lambda$, $c_1 = c(a-b)\lambda$ e per la prima delle (6) la condizione

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = o,$$

la quale mediante la (3) diviene $4ac(a+c) + 4bc(b+c) + 4ab(a+b) + 3abc = 1$, ovvero $4(ab + ac + bc) = 9abc + 1$. Rappresentato il prodotto abc con l' indeterminata t, le costanti a, b, c saranno le radici della cubica (7) $v^3 - v^2 + \frac{v}{4}(9t + 1) - t = o$; a motivo delle (1) ciascun punto della linea ha per coordinate $x^2 = \frac{a}{u} + \frac{a}{u^2}(b-c)\lambda$, $y^2 = \frac{b}{u} + \frac{b}{u^2}(c-a)\lambda$, $z^2 = \frac{c}{u} + \frac{c}{u^2}(a-b)\lambda$; dunque la *curva di Kiepert è prodotta dal segare il cono quadrico* $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ *con la superficie quartica*

(*) Il Professor Kiepert ha indicato una linea piana trascendente, il cui arco s rappresenta qualunque integrale ellittico di prima specie; poichè dalla relazione $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\Delta x}$ dove $k^2 = \frac{1}{1+a^2}$, si ricava $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\,x}{\sqrt{a^2 + cos^2 x}}$, ed integrando risulta la curva

$$y = log\left(\frac{cos\,x + \sqrt{a^2 + cos^2 x}}{a}\right),$$

ovvero $cos\,x = \frac{a}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) = a\,cos\,hy$; nel caso di $a = o$ viene $dy = dx\,tang\,x$, e quindi $e^y\,cos\,x = 1$, linea rettificabile con integrali parabolici.

$\frac{x^2}{b-c}+\frac{y^2}{c-a}+\frac{z^2}{a-b}=\lambda\,(x^2+y^2+z^2)^2$, *e si rettifica mediante l' integrale ellittico di prima specie* $s=\int\frac{du}{(4\,u^3+pu+q)^{\frac{1}{2}}}$, *dove si hanno*

$$p=4\,\lambda^2\,[(a-b)\,(b-c)+(b-c)\,(c-a)+c-a)\,(a-b)]$$
$$q=4\,\lambda^3\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a).$$

57. — Il geometra Booth rettificò per integrali ellittici le curve quartiche risultanti dal segare la superficie del paraboloide di rivoluzione $x^2+y^2=2\,rz$ col cilindro ellittico (od iperbolico) $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$; e le distinse coi nomi di *ellisse (od iperbole) logaritmica;* in quantochè la differenza di due archi associati sia riducibile ad un integrale logaritmico. (*) Si esprimano le coordinate dei punti comuni alle due superficie in funzione di una sola variabile φ scrivendo per il cilindro ellittico $x=a\cos\varphi$, $y=b\,sen\,\varphi$, $a^2-b^2=c^2$, e quindi $z=\frac{a^2-c^2\,sen^2\,\varphi}{2\,r}$. Aggiungendo i quadrati dei loro differenziali con brevi riduzioni si ottiene

$$(1)\qquad s=\frac{1}{r}\int_0^{\varphi}d\varphi\,\sqrt{b^2\,r^2+c^2\,(r^2+c^2)\,sen^2\,\varphi-c^4\,sen^4\,\varphi}$$

notando con $x_1=\frac{1}{m}$, $-x_2=1-\frac{1}{n}$ le radici del trinomio sotto radicale, si potrà sostituirvi il prodotto $c^4\,(x_1-sen^2\,\varphi)\,(x_2+sen^2\,\varphi)$ e posto $tang\,\varphi=\sqrt{1-n}\,tang\,\omega$, $k^2=m+n-mn$, a motivo delle relazioni $sen^2\,\varphi=\frac{(1-n)\,sen^2\omega}{1-n\,sen^2\,\omega}$, $d\varphi=\frac{1}{n}\sqrt{1-n}\,\frac{d\,\omega}{1-n\,sen^2\,\omega}$, $x_1-x_2=1+\frac{r^2}{c^2}$, $x_1\,x_2=\frac{b^2\,r^2}{c^4}$ che ne conseguono, si troverà

$$(2)\ s=\frac{c^2\,(1-n)}{r\,\sqrt{mn}}\int_0^{\omega}\frac{d\,\omega\,\Delta\,\omega}{(1-n\,sen^2\,\omega)^2}=r\,\frac{(1-n)\,\sqrt{mn}}{n-m}\int_0^{\omega}\frac{d\,\omega\,\Delta\,\omega}{(1-n\,sen^2\,\omega)^2}.$$

Quest'integrale è decomponibile nella somma d'integrali ellittici di prima, seconda e terza specie e di un termine algebrico; infatti differenziando l'espressione $\Delta\omega=\sqrt{1-k^2\,sen^2\,\omega}$ e poi moltiplicati i due membri per $\frac{sen\,\omega\,cos\,\omega}{1+n\,sen^2\,\omega}$

(*) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1852.* Parte II, pag. 311.

mediante l'integrazione per parti si trova

$$\frac{sen\,\omega\cos\omega\,\Delta\omega}{1+n\,sen^2\omega}-\int\Delta\omega\frac{(1-(n+2)\,sen^2\omega)}{(1+n\,sen^2\omega)^2}d\omega=\int k^2\left(\frac{sen^4\omega-sen^2\omega}{1+n\,sen^2\omega}\right)\frac{d\omega}{\Delta\omega}.$$

In luogo del binomio $1-(n+2)\,sen^2\omega$ si scriva $\frac{2(n+1)-(n+2)\,(1+n\,sen^2\omega)}{n}$

e nel secondo membro all'espressione frazionaria contenuta in parentesi

si sostituisca il quoziente $\frac{1}{n}\,sen^2\omega-\left(\frac{n+1}{n^2}\right)+\frac{n+1}{n^2(1+n\,sen^2\omega)}$, onde la

predetta eguaglianza diverrà $\frac{sen\,\omega\cos\omega\,\Delta\omega}{1+n\,sen^2\omega}-\frac{2\,(n+1)}{n}\int\frac{d\omega\,\Delta\omega}{(1+n\,sen^2\omega)^2}+$

$$+\frac{(n+2)}{n}\int\frac{d\omega\,\Delta\omega}{1+n\,sen^2\omega}=\frac{k^2}{n}\int\frac{sen^2\omega\,d\omega}{\Delta\omega}-\frac{k^2}{n^2}\,(n+1)\int\frac{d\omega}{\Delta\omega}+$$

$$+\frac{k^2}{n^2}(n+1)\int\frac{d\omega}{(1+n\,sen^2\omega)\,\Delta\omega};$$

la quale in virtù delle relazioni

$$\int\frac{d\omega\,\Delta\omega}{1+n\,sen^2\omega}=-\frac{k^2}{n}F\omega+\left(\frac{n+k^2}{n}\right)\Pi\,\omega,\quad k^2\int\frac{sen^2\omega\,d\omega}{\Delta\omega}=F\omega-E\omega$$

conduce al richiesto integrale (3) $\quad 2\,(1+n)\int\frac{d\omega\,\Delta\omega}{(1+n\,sen^2\omega)^2}=$

$$=\frac{n\,sen\,\omega\cos\omega}{1+n\,sen^2\omega}\Delta\omega+E\omega-\left(\frac{k^2}{n}+1\right)F\omega+\left(\frac{k^2}{n}+n+2\right)\Pi\,\omega;$$

onde mutato n in $-n$ si conchiude l'arco di ellisse logaritmica sotto la

forma (4) $s=\frac{r\sqrt{mn}}{2\,(n-m)}\left[-\frac{n\,sen\,\omega\cos\omega\,\Delta\omega}{1-n\,sen^2\omega}+E\omega+\frac{m}{n}\left(1-n\right)F\omega+\right.$

$\left.+\left(\frac{1-n}{n}\right)(n-m)\,\Pi\,(-n\,,\,k\,,\omega)\right]$; e per $\omega=\frac{\pi}{2}$ si avrà il quadrante

della curva esprimibile con integrali ellittici completi di prima e seconda specie, in virtù del teorema dimostrato alla pag. 132.

La tangente al punto M dell' ellisse logaritmica s fa col piano xOy lo stesso angolo θ che l'arco infinitesimo ds fa con la sua proiezione ortogonale $ds_1=\sqrt{dx^2+dy^2}$, ovvero $tang\,\theta=\frac{dz}{ds_1}=-\frac{(a^2-b^2)\,sen\,\varphi\cos\varphi}{r\sqrt{a^2sen^2\varphi+b^2cos^2\varphi}}$;

e siccome nell' ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ la normale abbassata dal centro sulla

tangente ha per lunghezza $p=\sqrt{a^2\cos^2\lambda+b^2sen^2\lambda}$ e per equazione

$y = \frac{a}{b} tang\,\varphi . x$, simboleggiando l'angolo λ della normale con l'asse maggiore, si deducono $tang\,\lambda = \frac{a}{b} tang\,\varphi$, $tang\,\theta = \frac{-(a^2-b^2) sen\lambda\, cos\lambda}{r\sqrt{a^2cos^2\lambda + b^2sen^2\lambda}}$. Ora $ds_1 = pd\lambda + \frac{d^2p}{d\lambda^2} d\lambda$, formula dimostrata alla pag. 109, ed essendo

$$\frac{dp}{d\lambda} = -\frac{(a^2-b^2)\, sen\,\lambda\, cos\,\lambda}{\sqrt{a^2\, cos^2\,\lambda + b^2\, sen^2\,\lambda}} = r\, tang\,\theta,$$

$$\frac{d^2p}{d\lambda^2} d\lambda = -(a^2-b^2)\frac{(a^2\,cos^4\,\lambda - b^2\,sen^4\,\lambda)\, d\lambda}{(a^2\,cos^2\,\lambda + b^2\,sen^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r\, d\theta}{cos^2\,\theta}$$

si avrà $ds = \frac{ds_1}{cos\,\theta} = \frac{pd\lambda}{cos\,\theta} + \frac{rd\theta}{cos^3\,\theta}$. Sostituendo il valore di $\frac{p}{cos\,\theta}$ in funzione di λ, e poi integrando si conchiude

$$(5)\quad s = \frac{1}{r}\int_o^{\lambda} d\lambda \sqrt{b^2 r^2 + c^2 (r^2 + c^2)\, cos^2\,\lambda - c^4\, cos^4\,\lambda} + r\int_o^{\theta} \frac{d\theta}{cos^3\,\theta}.$$

È evidente che posto $\lambda = \frac{\pi}{2} - \varphi$ il primo integrale contenuto nel secondo membro a differenza del segno coinciderà con l'integrale (1) preso fra i limiti $\frac{\pi}{2} - \varphi$ e $\frac{\pi}{2}$; perlochè significati con A e B i vertici del quadrante della curva corrispondenti ai valori o e $\frac{\pi}{2}$ attribuiti a φ, ne risulta la relazione

$$\widehat{AM} - \widehat{MB} = r\int_o^{\theta} \frac{d\theta}{cos^3\,\theta};$$

dunque la differenza degli archi AM, BM eguaglia un arco di parabola conica, il cui parametro principale è $2\,r$. Osservando che il differenziale $d\lambda \sqrt{(x_1 - cos^2\lambda)\;(x_2 + cos^2\,\lambda)}$ per la sostituzione $tang\,\lambda = tang\,\omega \sqrt{1-m}$, si trasforma in $\frac{(1-m)}{\sqrt{mn}} \frac{d\omega\,\Delta\,\omega}{(1-m\,sen^2\,\omega)^2}$, si deduce potersi ottenere il primo integrale della (5) dalle formule (3) scambiando fra loro le due lettere m, n, e quindi (6) $s = \frac{r}{2}\frac{\sqrt{mn}}{(m-n)}\Big[-\frac{m\,sen\omega\,cos\omega\,\Delta\omega}{1-m\,sen^2\omega} + E\omega + \frac{n}{m}(1-m)F\omega -$ $-\frac{(1-m)\,(n-m)}{m}\,\Pi\,(-m, k, \omega)\Big] - r\int_o^{\theta}\frac{d\theta}{cos^3\,\theta}$. Coll'eguagliare i secondi membri delle (4), (6) si trova un teorema di Legendre relativo alla permutazione dei parametri negl'integrali ellittici di terza specie.

L'iperbole logaritmica si può rettificare con integrali iperbolici; ciascun suo punto si determini per le coordinate $x = a \cos hu$, $y = b \operatorname{sen} hu$, $z = \frac{c^2 \cos^2 hu - b^2}{2r}$ e quindi la derivata dell'arco σ rispetto alla variabile u sarà $\frac{d\sigma}{du} = \frac{c^2}{r} \sqrt{(\cos^2 hu - x_1)(\cos^2 hu + x_2)}$ sussistendo le relazioni

$$x_1 - x_2 = 1 - \frac{r^2}{c^2}, \quad x_1 x_2 = \left(\frac{ar}{c^2}\right)^2,$$

e come sopra posto $x_1 = \frac{1}{m}$, $x_2 = \frac{1}{n} - 1$, $k^2 = m + n - mn$ mediante la sostituzione $\operatorname{tang} hu = \frac{1}{\sqrt{1-n}} \operatorname{tang} hv$, $\Delta hv = \sqrt{k^2 \cos^2 hv - 1}$ si trova

$$\frac{\sigma}{r} = \frac{(1-n)\sqrt{mn}}{m-n} \int_0^v \frac{dv \,.\, \Delta hv}{(1 - n \cos^2 hv)^2}$$

che riducesi alla somma d'integrali iperbolici di prima, seconda e terza specie con l'identità (3') $2(1+n) \int \frac{du \, \Delta hu}{(1 + n \cos^2 hu)^2} = - \frac{n \operatorname{sen} hu \cos hu \, \Delta hu}{1 + n \cos^2 hu} +$
$+ \left(1 + \frac{k^2}{n}\right) Lu + Iu - \left(2 + n + \frac{k^2}{n}\right) Pu$, dove si hanno le notazioni

$$Lu = \int_0^u \frac{du}{\Delta hu}, \quad Iu = \int_0^u du \, \Delta hu, \quad Pu = \int_0^u \frac{du}{(1 + n \cos^2 hu)\, \Delta hu}.$$

Pertanto il geometra Booth misurò la suddetta linea per integrali ellittici, con metodo simile a quello tenuto per l'ellisse logaritmica; infatti la normale p condotta dall'origine sulla tangente al punto x, y dell'iperbole direttrice della superficie cilindrica, fa con l'asse trasverso un angolo λ dato per l'eguaglianza $\operatorname{tang} \lambda = - \frac{a^2 y}{b^2 x}$; onde le coordinate x, y, z dell'iperbole logaritmica si ricavano in funzione di λ dalle proporzioni

$$\frac{x^2}{a^4 \cos^2 \lambda} = \frac{y^2}{b^4 \operatorname{sen}^2 \lambda} = \frac{2rz}{a^4 \cos^2 \lambda + b^4 \operatorname{sen}^2 \lambda} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \lambda - b^2 \operatorname{sen}^2 \lambda}$$

e calcolati i loro differenziali si dedurrà

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{a^2 b^2 \left[a^2 r^2 - c^2 (r^2 - c^2) \operatorname{sen}^2 \lambda - c^4 \operatorname{sen}^4 \lambda\right]^{\frac{1}{2}}}{r (a^2 \cos^2 \lambda - b^2 \operatorname{sen} \lambda)^2} =$$
$$= \frac{a^2 b^2 c^2}{r (a^2 \cos^2 \lambda - b^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)^2} \sqrt{(x_1 - \operatorname{sen}^2 \lambda)(x_2 + \operatorname{sen}^2 \lambda)};$$

dove $x_1 - x_2 = 1 - \frac{r^2}{c^2}$, $x_1 x_2 = \left(\frac{ar}{c^2}\right)^2$. Si trasformi la derivata precedente con la sostituzione

$\operatorname{sen}^2 \lambda = \frac{x_1 x_2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{x_2 + x_1 \cos^2 \varphi}$, e posto $\frac{x_1 (1 + x_2)}{x_1 + x_2} = k^2$, $\frac{a^2 x_1 + c^2 x_1 x_2}{a^2 (x_1 + x_2)} = \frac{1 + x_2}{x_1 + x_2} = l$

si otterranno le formule

$$d\lambda = \frac{\sqrt{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} \cos\varphi \, d\varphi}{(x_2 + x_1 \cos^2\varphi)\, \Delta\varphi}, \quad \frac{d\tau}{r} = \frac{b^2 \cos^2\varphi \, d\varphi}{c^2 \sqrt{x_1 + x_2} (1 - l \, sen^2\varphi)^2 \Delta\varphi}.$$

Introdotti i simboli $n = x_1$, $\frac{1}{m} - 1 = \frac{x_2}{x_1}$, ne conseguono le relazioni simmetriche $k^2 = m + n - mn$, $l = \frac{k^2}{n}$, $\frac{r^2}{c^2} = \frac{k^2 - mn}{m}$, $\frac{a^2}{c^2} = \frac{n^2(1-m)}{k^2 - mn}$, $\frac{b^2}{c^2} = \frac{(1-n)k^2}{k^2 - mn}$, (7) $\frac{\tau}{r} = \frac{n(1-n)(m+n-mn)}{(m+n-2mn)\sqrt{mn}} \int \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(1 - l \, sen^2\varphi)^2 \Delta\varphi}$. E quest' ultimo integrale si ottiene con l' identità

$$(8) \quad \int \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(1 + n \, sen^2\varphi)^2 \Delta\varphi} = \left(\frac{k^2 - 1}{n + k^2}\right) \Pi(n, k, \varphi) + \frac{n+1}{n+k^2} \int \frac{d\varphi \, \Delta\varphi}{(1 + n \, sen^2\varphi)^2}$$

e la relazione (3).

Chiamando θ l' angolo formato dalla tangente alla curva col piano xOy, si troveranno con lo stesso ragionamento tenuto per l' ellisse logaritmica le relazioni $tang\,\theta = -\frac{c^2 sen\,\lambda \cos\lambda}{r\sqrt{a^2\cos^2\lambda - b^2 sen^2\lambda}}$, $d\tau = \frac{r d\theta}{\cos^3\theta} - \frac{p d\lambda}{\cos\theta}$.

Il primo termine di questa differenza è l' elemento infinitesimo dell' arco della parabola, asintotica all' iperbole logaritmica, e generata dal segare il paraboloide di rivoluzione col piano $y = \frac{b}{a} x$; poichè questo passa per l' asse Oz, la detta parabola essendo identica alla curva meridiana $x^2 = 2rz$, $y = o$ ha il parametro eguale a $2r$. L' altro termine $\frac{p d\lambda}{\cos\theta}$ espresso in funzione della variabile λ diviene

$$\frac{d\lambda}{r} \sqrt{a^2 r^2 + c^2 (c^2 - r^2) sen^2\lambda - c^4 sen^4\lambda} = \frac{c^2}{r} d\lambda \sqrt{(x_1 - sen^2\lambda)(x_2 + sen^2\lambda)}$$

e per la surriferita sostituzione $sen^2\lambda = \frac{x_1 x_2 sen^2\varphi}{x_2 + x_1 \cos^2\varphi}$ si riduce alla forma $\frac{a^2 r}{c^2\sqrt{x_1 + x_2}} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(1 - m \, sen^2\varphi)^2 \Delta\varphi}$; quindi ne conseguirà la differenza (9)

$$2(\tau_1 - \tau) = \frac{2rn(1-m)\sqrt{mn}}{m+n-2mn} \cdot \int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(1 - m \, sen^2\varphi)^2 \Delta\varphi} = \frac{r\sqrt{mn}}{m+r-2mn} \times$$

$$\left[\frac{n}{m}(1-m) F\varphi + E\varphi - \frac{m \, sen\varphi \cos\varphi \, \Delta\varphi}{1 - m \, sen^2\varphi}\right] - \frac{r(1-m)\sqrt{mn}}{m} \Pi(-m, k, \varphi)$$

in virtù delle formule (3), (8). Allorchè l'angolo θ eguaglia un quadrante, gli angoli corrispondenti λ, φ saranno determinati per $tang\,\lambda = \pm \frac{a}{b}$, $sen\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{l}}$ e per questo valore l'equazione (9) darà la differenza finita fra i due rami infiniti dell'iperbole logaritmica e della sua parabola asintotica.

Le due curve ellisse ed iperbole logaritmiche furono pure chiamate dall'illustre Booth *sezioni iperconiche*, e siccome un piano parallelo all'asse Oz del paraboloide sega questa superficie secondo una parabola, la cui proiezione sulla base del cilindro è una retta, le proprietà descrittive delle coniche si estendono alle iperconiche, sostituendo archi parabolici alle rette; ad esempio i teoremi di Pascal e Brianchon si enunciano: *Se un esagono avente per lati archi parabolici è iscritto in un' iperconica, i lati opposti si segheranno a due a due sopra una parabola. In un esagono avente per lati archi parabolici e circoscritto ad un' iperconica, gli archi parabolici congiungenti i vertici opposti passeranno per un punto fisso del paraboloide.*

La quartica risultante dal segare il paraboloide $\frac{x^2}{q} + \frac{y^2}{q_1} = 2z$ col cilindro di rotazione $x^2 + y^2 = r^2$ è una specie di ellisse logaritmica. Fatto $x = r\cos\varphi, y = r\,sen\,\varphi$, quindi $z = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{q} + \frac{sen^2\varphi}{q_1}\right)$, $\frac{r}{q} - \frac{r}{q_1} = \lambda$, si avrà $\frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1 + \lambda^2 sen^2\varphi - \lambda^2 sen^4\varphi} = r\lambda\sqrt{(x_1 - sen^2\varphi)(x_2 + sen^2\varphi)}$ dove $x_1 x_2 = \frac{1}{\lambda^2}$, $x_1 - x_2 = 1$: indicato con n un numero positivo minore di uno, scrivansi $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{n} - 1$ e per la sostituzione $tang\,\varphi = tang\,\omega \times \sqrt{1-n}$ risulterà $ds = \frac{\lambda r(1-n)}{n} \frac{d\omega\,\Delta\omega}{(1 - n\,sen^2\omega)^2}$; in cui il quadrato del modulo è $k^2 = n(2-n)$; per l'applicazione della formula (3) potrà esprimersi l'arco s mediante i soli integrali ellittici di prima e seconda specie, cioè (10) $s = \frac{r}{2\sqrt{1-n}}\left[E\omega + (1-n)F\omega - \frac{n\,sen\,\omega\cos\omega\,\Delta\omega}{1 - n\,sen^2\omega}\right]$.

In simil guisa la sezione σ del detto paraboloide con il cilindro iperbolico equilatero $x^2 - y^2 = r^2$ si rettifica ponendo $x = r\cos hu$, $y = r\,sen\,hu$, quindi $z = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2 hu}{q} + \frac{sen^2 hu}{q_1}\right)$, $\frac{r}{q} + \frac{r}{q_1} = \lambda_1$ ed agevolmente si giunge alla derivata

$$\frac{d\sigma}{du} = r\sqrt{\lambda_1^2\cos^4 hu - (\lambda_1^2 - 2)\cos^2 hu - 1} = r\lambda_1\sqrt{(\cos^2 hu - x_1)(\cos^2 hu + x_2)}$$

insieme all' eguaglianze $x_1 - x_2 = 1 - \frac{2}{\lambda_1^2}$, $x_1 x_2 = \frac{1}{\lambda_1^2}$, $x_2 = \frac{1}{n} - 1$, $k^2 = 1 + (1-n)^2$ con n minore di uno. La sostituzione $tang\, hu = \frac{1}{\sqrt{1-n}}\, tang\, hv$ conduce all' integrale $\sigma = \frac{r}{\sqrt{1-n}} \int_0^v \frac{dv\, \Delta\, hv}{(1 - n\, cos^2\, hv)^2}$, che si sviluppa per integrali iperbolici di prima, seconda e terza specie mediante la formula (3') — La linea s comune al paraboloide $\frac{x^2}{q} + \frac{y^2}{q_1} = 2z$ ed alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$ tangente nel suo vertice, si può rettificare con il metodo d'inversione; poichè applicando le formule $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{ds}{ds_1} = \frac{m^2}{\rho_1^2}$, dove m^2 esprime la potenza ed $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1 + z_1^2$, si troverà per la linea s_1 inversa di s la conica piana $x_1^2 \left(\frac{r}{q} - 1\right) + y_1^2 \left(\frac{r}{q_1} - 1\right) = \left(\frac{m^2}{2r}\right)^2$, $z_1 = \frac{m^2}{2r}$, la quale nell' ipotesi di $r > q > q_1$ è un' ellisse, avente l' arco infinitesimo $ds_1 = \frac{m^2}{2r} \sqrt{\frac{q}{r-q}}\, d\varphi\, \Delta\varphi$, $\rho_1^2 = \frac{m^4}{4r(r-q_1)}(1 + n\, sen^2\varphi)$, sendo $n = \frac{q - q_1}{r - q}$ ed il modulo $k = \sqrt{\frac{rn}{q}}$; dunque il differenziale dell' arco della quartica sarà $ds = 2(r - q_1) \sqrt{\frac{q}{r-q}}\, \frac{d\varphi\, \Delta\varphi}{1 + n\, sen^2\, \varphi}$, da cui si deduce

$$s = 2(r - q_1) \sqrt{\frac{q}{r-q}} \times \left[\left(1 + \frac{r}{q}\right) \Pi\varphi - \frac{r}{q} F\varphi\right].$$

La curva s giace pure sulla superficie conica $x^2 \left(\frac{r}{q} - 1\right) + y^2 \left(\frac{r}{q_1} - 1\right) = z^2$ e coincide con la proiezione stereografica della detta ellisse ove prendasi $m^2 = 2r^2$; nel caso di $r = q$ la linea s è la circonferenza d' intersezione del piano $y = z \sqrt{\frac{q_1}{q - q_1}}$ col surriferito paraboloide ellittico. Quando sussistano le disuguaglianze $q_1 > r > q$, la curva trasformata è un'iperbole, e servendosi della surriferita variabile u si troverà

$$ds = 2(r - q_1) \sqrt{\frac{q}{r-q}}\, \frac{du\, \Delta\, hu}{1 - n\, cos^2\, hu}, \text{ dove } n = \frac{q_1 - q}{r - q} \text{ e } k = \sqrt{\frac{rn}{q}}.$$

Proiettando ortogonalmente sul piano xOy l'intersezione del cono ellittico od iperbolico $a^2 x^2 \pm b^2 y^2 = 4r^2 z^2$ col paraboloide $x^2 + y^2 = 2rz$ si trova una linea di quarto grado identica alla pedale del centro del-

l' ellisse (od iperbole) piana sulle sue tangenti, poichè eliminando z risulta la lemniscata ellittica od iperbolica $(x^2+y^2)^2=a^2x^2\pm b^2y^2$, ed in coordinate polari $\rho^2=a^2\cos^2\omega\pm b^2\operatorname{sen}^2\omega$. Queste curve sono rettificabili mediante integrali ellittici di terza specie; infatti per la pedale ellittica risulta

$$\frac{ds}{d\omega}=\left(\rho^2+\frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a^4\cos^2\omega+b^4\operatorname{sen}^2\omega}{a^2\cos^2\omega+b^2\operatorname{sen}^2\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e fatta la sostituzione $\operatorname{tang}\omega=\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi$, si ottiene l'integrale $s=\frac{a^2+b^2}{b}\Pi\varphi-$ $-bF\varphi$; dove il quadrato del modulo è $k^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}$, ed il parametro $n=\frac{a^2}{b^2}-1=\frac{k^2}{1-k^2}$; in altra guisa pongasi $\cot\omega=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\psi$ e con facili calcoli verrà $s=\frac{b^3}{a^2}\Pi\psi$ avente lo stesso modulo $k=\frac{c}{a}$ ed il parametro negativo $m=-1+\frac{b^4}{a^4}$. Per la pedale iperbolica si muti b^2 in $-b^2$ nella surriferita derivata $\frac{ds}{d\omega}$ e poi si faccia la sostituzione $\operatorname{tang}\omega=$ $\frac{a^2\operatorname{sen}\varphi}{b\sqrt{a^2+b^2\cos^2\varphi}}$, si troverà l'arco espresso dall'integrale $s=\frac{a^3}{bc}\Pi\varphi$; in cui si ha $c=\sqrt{a^2+b^2}$, il modulo $k=\frac{b}{c}$ ed il parametro $n=\frac{a^2}{b^2}-1$ circolare o logaritmico, secondochè a sia maggiore o minore di b (pag. 50). Le pedali delle coniche coincidono con le linee inverse delle loro polari reciproche $a^2x^2\pm b^2y^2=1$ rispetto al polo preso per origine d' inversione e la potenza $m^2=1$; a due archi dell' ellisse od iperbole aventi la differenza rettificabile con un segmento rettilineo, corrispondono nella pedale ellittica due archi a differenza circolare o logaritmica.

La linea s d' intersezione di due superficie quadriche si rettifica in generale per integrali iperellittici, così le coordinate dei punti comuni alle due quadriche $ax^2+by^2+cz^2=1$, $a_1x^2+b_1y^2+c_1z^2=1$ si esprimono con le formule $x^2=lu+m$, $y^2=l_1u+m_1$, $z^2=l_2u+m_2$, dove u è il quadrato del raggio vettore, le costanti sono legate dalle identità $l+l_1+l_2=1$, $m+m_1+m_2=o$ e si esprimono con funzioni razionali dei coefficienti a, b, c, a_1, b_1, c_1. Prendendo le derivate delle variabili x, y, z rispetto ad u si ottiene $\frac{ds}{du}=\frac{1}{2}\left[\frac{l^2}{lu+m}+\frac{l_1^2}{l_1u+m_1}+\frac{l_2^2}{l_2u+m_2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{f(u)}{\sqrt{\varphi(u)}}$

ed i polinomi interi $f(u)$, $\varphi(u)$ sono rispettivamente di secondo e quinto grado.

58. — La superficie del paraboloide di rivoluzione limitata dall' ellisse logaritmica è quadrabile con integrali ellittici, (*) infatti si decomponga nella somma di rettangoli infinitesimi, i cui i lati sono archi di parabole meridiane e di circonferenze ad esse normali. Siano M, M' due punti infinitamente vicini di una parabola meridiana, detto α l'angolo della normale al punto M con l'asse Oz del paraboloide, si deduce $\widehat{MM'} = \frac{r\,d\alpha}{\cos^3\alpha}$ (pag. 33) e la distanza MP di M dall'asse Oz ha per misura $r \operatorname{tang} \alpha$; onde indicato con $d\omega$ l'angolo di rotazione della parabola, l'arco infinitesimo del parallelo si esprime con $r \operatorname{tang}\alpha \,.\, d\omega$, e perciò $d^2S = \frac{r^2 \operatorname{tang}\alpha}{\cos^3\alpha}\, d\alpha\, d\omega$; integrando prima rispetto ad α si trova (1) $S = \frac{r^2}{3} \int d\omega \left(\frac{1}{\cos^3\alpha} - 1\right)$, perchè l'area deve annullarsi insieme con α. La relazione fra i due angoli α ed ω si ottiene osservando che $\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi$, ed y è la proiezione di MP sull'asse Oy, cioè $b \operatorname{sen}\varphi = r \operatorname{tang}\alpha \operatorname{sen}\omega$; ovvero $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}$ e per conseguenza scrivendo $\frac{a^2-b^2}{a^2+r^2} = k^2$, $1 - \frac{b^2}{a^2} = n$ si troveranno

$$\sec\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{a^2 - r^2}\,\Delta\varphi,\quad S = \frac{r^2 b}{3a}\int \frac{d\varphi}{1 - n\operatorname{sen}^2\varphi}\left[\frac{1}{r^3}\sqrt{(a^2+r^2)^3}\,(\Delta\varphi)^3 - 1\right].$$

In virtù della identità

$$\frac{d\varphi\,(\Delta\varphi)^3}{1+n\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\left[\frac{k^4}{n}\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{k^2}{n}\left(\frac{k^2}{n}+2\right) + \left(1+\frac{k^2}{n}\right)^2 \frac{1}{1+n\operatorname{sen}^2\varphi}\right]$$

risulta (2) $\int \frac{d\varphi\,(\Delta\varphi)^3}{1+n\operatorname{sen}^2\varphi} = -\frac{k^2}{n}\left(1+\frac{k^2}{n}\right)F\varphi - \frac{k^2}{n}E\varphi + \left(1+\frac{k^2}{n}\right)^2 \Pi\varphi$; in secondo luogo l'elemento $\frac{d\varphi}{1 - n\operatorname{sen}^2\varphi}$ per la sostituzione $\operatorname{tang}\varphi = u$ diviene il differenziale di $\frac{1}{\sqrt{1-n}}\operatorname{arc\,tang}\left(u\sqrt{1-n}\right)$; dunque la precedente formula dell'area si riduce alla espressione (3) $S = \frac{abr\,F\varphi}{3\sqrt{a^2+r^2}} +$

$$+ \frac{ab}{3r}\sqrt{a^2+r^2}\,E\varphi + \frac{br^3}{3a\sqrt{a^2+r^2}}\,\Pi(-n, k, \varphi) - \frac{r^2}{3}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi\right);$$

(*) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* Vol. 144, pag. 53.

in cui posto $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e moltiplicata per 4, si avrà l'area della calotta paraboloidica terminata all'ellisse logaritmica.

Se invece la curva limitante la superficie del paraboloide sia l'iperbole logaritmica facendo $x = a \sec\varphi$, $y = b \tang\varphi$ si deducono le relazioni $\tang\omega = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \sen\varphi$, $d\omega = \frac{ab \cos\varphi\, d\varphi}{a^2 + b^2 \sen^2\varphi}$ e la proiezione di MP sull'asse Oy sarà $b \tang\varphi = r \tang\alpha \sen\omega$, da cui $\tang^2\alpha = \frac{a^2 + b^2 \sen^2\varphi}{r^2 \cos^2\varphi}$, ovvero $\sec\alpha = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{1}{2}} \Delta\varphi}{r \cos\varphi}$ insieme con $k^2 = \frac{r^2 - b^2}{a^2 + r^2}$, quindi la (1) diverrà

$$(4) \quad S = \frac{b}{3\,ar}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}} \int \frac{d\varphi\,(\Delta\varphi)^3}{\cos^2\varphi\,(1+n\sen^2\varphi)} - \frac{br^2}{3a}\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+n\sen^2\varphi},$$

dove il parametro $n = \frac{b^2}{a^2}$. Ora è facile ottenere le due identità

$$(5) \quad \frac{(\Delta\varphi)^3}{\cos^2\varphi\,(1+n\sen^2\varphi)} = \frac{(n+k^2)^2}{n(n+1)(1+n\sen^2\varphi)\Delta\varphi} + \left(1 - \frac{(n+k^2)^2}{n(n+1)}\right)\frac{1}{\Delta\varphi} +$$

$$+ \frac{(1-k^2)^2}{n+1}\frac{\tang^2\varphi}{\Delta\varphi}, \quad (6) \quad (1-k^2)\int \frac{\tang^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \Delta\varphi \tang\varphi - E\varphi.$$

e perciò
$$(7) \quad S = \frac{r^3(a^2+b^2)}{3ab\sqrt{a^2+r^2}}\,\Pi(n,k,\varphi) + \frac{a(a^2b^2+2b^2r^2-r^4)}{3br\sqrt{a^2+r^2}}F\varphi +$$

$$+ \frac{ab}{3r}\sqrt{a^2+r^2}\,(\tang\varphi\,\Delta\varphi - E\varphi) - \frac{br^2}{3a}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\sen\varphi\right).$$

Nel caso particolare di $k = o$ si ha $r = b$, ed a motivo dell'identità $\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{1+n\sen^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{n+1}\,\tang\varphi\right)$, la precedente formula si esprimerà con segmenti di rette ed archi di circonferenze, cioè

$$S = \frac{a}{3}\sqrt{a^2+b^2}\,\tang\varphi + \frac{b^2}{3}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\tang\varphi\right) - \frac{b^2}{3}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\sen\varphi\right)$$

59. — La spirale (1) $\rho = a\omega$ della superficie sferica si rettifica per archi ellittici, poichè risulta $ds^2 = d\rho^2 + \sen^2\rho\, d\omega^2 = d\rho^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\sen^2\rho\right)$, da cui $s = \int_o^\rho \left(1 + \frac{1}{a^2}\sen^2\rho\right)^{\frac{1}{2}} d\rho$, e posto $\rho = \frac{\pi}{2} - \varphi$ si ricava

$$s = -\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\left(1 - \frac{a^2}{1+a^2}\right)\sen^2\varphi . d\varphi = \frac{1}{a}(1+a^2)^{\frac{1}{2}}\left(E\frac{\pi}{2} - E\varphi\right),$$

con il modulo $k = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$; la detta linea sarà algebrica ove a sia il numero razionale $\frac{m}{n}$; fissando l'origine O al centro della sfera, e l'asse Oz che passi per il punto $(\omega = o, \rho = o)$, il piano xOz coincidente col piano da cui si contano gli angoli ω, le coordinate ortogonali del punto M essendo $z = \cos\rho$, $\tang\omega = \frac{y}{x}$, si eliminerà ω fra questa equazione e la $n\rho = m\omega$.

Altre curve gobbe trascendenti e rettificabili per integrali ellittici sono le elici coniche e cilindriche. Se la tangente nel punto (x, y, z) di una linea situata sulla superficie $f(x, y) = o$ fa con l'asse Oz un angolo γ determinato dalla formula $\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = m$ numero costante, la curva segando tutte le generatrici sotto lo stesso angolo prende il nome di *elice cilindrica*; dalle relazioni $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $dz = mds$, consegue $ds = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \sqrt{dx^2 + dy^2}$; perciò l'arco s dell'elice ha un rapporto costante con l'altezza z e con la sua proiezione sul piano xOy ed è rettificabile per integrali ellittici, quando lo sia la linea direttrice $(f(x, y) = o$, $z = o)$; così nel caso del cilindro ellittico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ risulta

$$s = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}} E\left(\frac{c}{a}, \varphi\right), \text{ dove } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Si consideri una linea s descritta sulla superficie conica $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = o$, l'angolo θ della generatrice con la tangente nel punto (x, y, z) è dato per $\cos\theta = \frac{x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{r}\frac{dz}{ds}$; a motivo di $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ si deduce $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$, e quindi $\cos\theta = \frac{dr}{ds}$. La curva s intersecante tutte le generatrici del cono sotto lo stesso angolo θ, si chiama *elice conica*, il suo arco è proporzionale al raggio vettore, cioè $s = mr$. Per il cono ellittico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, sostituite le formule $x = r \operatorname{sen}\rho \cos\omega$, $y = r \operatorname{sen}\rho \cos\omega$, $z = r\cos\rho$ si ottiene $\tang^2\rho = \frac{a^2 b^2}{c^2(a^2 \operatorname{sen}^2\omega + b^2 \cos^2\omega)}$, da cui $d\rho = -\frac{\operatorname{sen}\rho\cos\rho\,(a^2 - b^2) \operatorname{sen}\omega\cos\omega\,d\omega}{a^2 \operatorname{sen}^2\omega + b^2\cos^2\omega}$, questo valore posto insieme con $ds = mdr$ nella nota relazione $ds^2 = dr^2 + r^2 d\rho^2 + \operatorname{sen}^2\rho\, d\omega^2$

conduce all'eguaglianza $(m^2-1)\frac{dr^2}{r^2} = sen^2 \rho \left[\frac{cos^2\rho(a^2-b^2)^2 sen^2\omega cos^2\omega}{a^2 sen^2\omega + b^2 cos^2\omega}+1\right] d\omega^2$, ovvero a motivo di $m = sec\,\theta$ si ricava

$$(1)\quad \frac{dr}{r} = \pm \frac{a\,b\,tang\,\theta\,d\omega}{(a^2 b^2 + a^2 c^2 sen^2\omega + b^2 c^2 cos^2\omega)} \sqrt{\frac{a^4(b^2+c^2)\,sen^2\omega + b^4\,(a^2+c^2) cos^2\omega}{a^2 sen^2\omega + b^2 cos^2\omega}}.$$

Ponendo $tang\,\omega = \frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\,tang\,\varphi,\ k^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2-b^2}{c^2+b^2}\right),\ n = -\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$

con facili riduzioni il precedente differenziale diviene l'ellittico di terza specie

$(2)\ \frac{dr}{r} = \pm \frac{b^2 tang\,\theta\,d\varphi}{a\sqrt{b^2+c^2}\,(1+n\,sen^2\varphi)\Delta\varphi}$; ed integrando $(3)\ log\,r = \pm\sigma\,tang\,\theta$,

indicata con e la base dei logaritmi neperiani e con σ un arco di ellisse sferica (num. 43) risulta $(4)\ s = r\,sec\,\theta = sec\,\theta\,.\,e^{\pm\sigma\,tang\,\theta}$. Crescendo ω da zero all'infinito nell'ipotesi di $a > b$ l'arco σ è crescente ed il raggio vettore aumenta da uno all'infinito; se ad ω si attribuiscono valori negativi da o a $-\infty$, r decrescerà da uno a zero, cioè la curva si avvicina indefinitamente al vertice del cono. Nel caso di $\theta = \frac{\pi}{2}$, r ha un valore costante e la spirale diviene una conica sferica. Se il cono è di rotazione, sarà $b = a$, dalla formula (1) si deduce $log\,r = \pm\frac{a^2\,tang\,\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}\,.\,\omega$, ed $r = e^{\pm h\omega}$ avendo significato con h la costante $\frac{a^2\,tang\,\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}$; la proiezione della curva sul piano xOy è una spirale logaritmica.

Osservazione. — Il Professor Nicola Fuss nel tomo 8° della V^a serie delle memorie dell'Accademia di Pietroburgo, insegnò a determinare un'infinità di curve descritte sulle superficie quadriche di rotazione e rettificabili con linee rette. Qual esempio, sia θ l'angolo costante della generatrice conica OM con l'asse Oz, ρ il raggio vettore del punto M della superficie ed r la sua proiezione sul piano xOy, si ricaveranno le formule $\rho = \frac{r}{sen\,\theta}$, $z = r\,cot\,\theta$, $x = r\,cos\,\omega$, $y = r\,sen\,\omega$ e da queste $ds^2 = \frac{dr^2}{sen^2\theta} + r^2\,d\omega^2$. Suppongasi l'arco misurato dal segmento rettilineo variabile $s = m\sqrt{r^2-a^2}$, simboleggiando a ed m grandezze costanti, posto per brevità $b^2 = 1 - m^2 sen^2\theta$, si ottiene $d\omega = \frac{dr}{r\,sen\theta}\sqrt{\frac{a^2-b^2 r^2}{r^2-a^2}}$.

Notato con $\frac{1}{u}$ questo radicale, risulta $r^2 = a^2\left(\frac{1+u^2}{1+b^2u^2}\right)$; onde la precedente assume la forma $d\omega\, sen\,\theta = \frac{du}{1+u^2} - \frac{b^2\,du}{1+b^2u^2}$, ed integrando $\omega\, sen\,\theta = arc\,tang\,u - b\,arc\,tang\,bu$, dove

$$u = \sqrt{\frac{r^2-a^2}{a^2-b^2r^2}},\ \text{ed}\ s = \frac{\sqrt{(1-b^2)(r^2-a^2)}}{sen\,\theta};$$

la curva sarà algebrica quando i numeri b e $sen\,\theta$ abbiano valori razionali.

60. — Nota al num. 54. Il Dottor K. Schwering in una sua recente memoria (*) dimostra *essere rettificabili per integrali ellittici ed iperellittici le curve piane rappresentate da ciascuna dell'equazioni polari* (1) $r^n\, sen\, n\omega = P$, (2) $r^n \cos n\omega = Q\sqrt{R}$; dove i simboli P, Q, R significano funzioni intere del quadrato del raggio vettore r. Infatti differenziando la (1) e riducendo con la (2) si ottiene

$$\frac{r\,d\omega}{dr} = \frac{1}{Q\sqrt{R}}\left(\frac{r}{n}\frac{dP}{dr} - P\right); \tag{3}$$

ed aggiungendo i quadrati delle (1), (2) risulta (4) $r^{2n} = P^2 + Q^2R$, la cui prima derivata rispetto ad r determina l'eguaglianza

$$P\left(\frac{r}{n}\frac{dP}{dr} - P\right) = Q^2R - \frac{rQ}{2n}\left(Q\frac{dR}{dr} + 2R\frac{dQ}{dr}\right); \tag{5}$$

onde nell'ipotesi di Q primo con P, detta X una funzione intera di r^2, ne consegue la relazione (6) $\frac{r}{n}\frac{dP}{dr} - P = QX$; indi la (3) prenderà la forma $\frac{r\,d\omega}{dr} = \frac{X}{\sqrt{R}}$ e la derivata dell'arco sarà (7) $\frac{ds}{dr} = \left(1+\frac{X^2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$. Facendovi (8) $R + X^2 = g^2r^2$, (9) $X = Ar^4 + Br^2 + C$, con A, B, C, g numeri costanti, per la sostituzione $r^2 = u$ l'elemento ds si riduce ad un differenziale ellittico di prima specie. Sia $a_p\, r^{2p}$ il termine di grado più elevato in P, a motivo delle (6), (9) il polinomio Q sarà del grado $2p-4$, e simboleggiando con $b_{p-2}\, r^{2p-4}$ il suo termine di maggior grado, in virtù della (4) si conchiude il coefficiente di r^{4p} esser eguale alla differenza $a^2_p - b^2_{p-2}A^2$, e supponendo p non minore di n risultare $a_p = Ab_{p-2}$; inoltre identificati i coefficienti di r^{2p} nella (6) si deduce $\left(2\frac{p}{n}-1\right)a_p = Ab_{p-2} = a_p$, cioè $p = n$; dunque i polinomi P, Q avranno le forme

(*) *Zeitschrift für Mathematik und Physik* von Dr. O. Schlömilch, Leipzig, XXV Jahrgang, pag. 234.

(10) $P = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \ldots + a_n r^{2n}$, $Q = b_0 + b_1 r^2 + \ldots + b_n r^{2n-1}$. In primo luogo sia n impari scrivendo (11) $r^n + P = (c_0 + c_1 r + \ldots + c_{n-2} r^{n-2})^2 \times (gr + Ar^4 + Br^2 + C)$ e mutando il segno ad r si trova $r^n - P = (c_0 - - c_1 r + \ldots - c_{n-2} r^{n-2})^2 (gr - Ar^4 - Br^2 - C)$; dalla (4) a motivo di $R = = g^2 r^2 - (Ar^4 + Br^2 + C)^2$ viene (12) $Q = \pm (c_0 + c_1 r + \ldots + c_{n-2} r^{n-2}) \times (c_0 - c_1 r + \ldots - c_{n-2} r^{n-2})$; gli $n-1$ parametri $c_0, c_1, c_2 \ldots c_{n-2}$ si possono determinare per la (11) in funzione dei coefficienti di P. Ora il penultimo coefficiente c_{n-3} è nullo, poichè sostituendo nella (6) i polinomi X, P, Q dati dalle relazioni (9), (10), (12) ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di r nei due membri si ricavano (13) $a_n = Ac^2_{n-2}$, $2Ac_{n-2}c_{n-3} = 0$; siccome per la (13) c_{n-2} è diverso da zero sarà (14) $c_{n-3} = 0$, e quindi per gli altri coefficienti risultano $\left(\frac{n-2}{n}\right) a_{n-1} = = 2Ac_{n-2} c_{n-4} + Bc^2_{n-2}$, $\left(\frac{n-4}{n}\right) a_{n-2} = A(c^2_{n-4} + 2c_{n-2}c_{n-6}) + 2Bc_{n-2}c_{n-4} + + Cc^2_{n-2}$. Similmente sviluppando la (11) ed identificati i coefficienti delle stesse potenze di r, in virtù delle precedenti eguaglianze si deducono (15) $a_{n-1} = 0$, (16) $a_{n-2} = 0$; onde il primo membro della (11) racchiude $n-1$ coefficienti a, ed essendo nullo c_{n-3} il secondo membro sviluppato ed ordinato rispetto ad r conterrà $n-2$ coefficienti c e le costanti A, B, C, g; di più dovranno annullarsi i coefficienti delle potenze impari di r, eccetto quello di r^n che nel primo membro è l' unità; così $n-2$ di queste n equazioni basteranno a determinare gli $n-2$ coefficienti c; i valori dei quali sostituiti nelle due rimanenti per l'eliminazione di g condurranno ad un'eguaglianza di condizione fra le costanti A, B, C. Quando n sia numero pari, si osserva che sostituendo nella (5) l' espressioni $R = g^2 r^2 - (Ar^4 + Br^2 + + C)^2$, $\frac{dR}{dr} r = 2g^2 r^2 - 4 (Ar^4 + Br^2 + C)(2Ar^4 + Br^2)$ con facile ragionamento si conchiude (17) $\frac{rdQ}{dr} - (n-1) Q = X_1 (Ar^4 + Br^2 + C)$; dove X_1 denota una funzione intera di r^2; anche in questo caso si annullano i coefficienti a_{n-2}, a_{n-1}. Esempio 1°. Per $n = 5$ la (11) diviene $r^5 + a_0 + + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_5 r^{10} = (c_0 + c_1 r + c_3 r^3)^2 (Ar^4 + Br^2 + gr + C)$, identificando i coefficienti delle stesse potenze di r nei due membri si ricavano le condizioni $2Ac_1 + Bc_3 = 0$, $2Ac_0 + gc_3 = 0$, $Ac_1^2 + 2Bc_1c_3 + Cc_3^2 = 0$, $2(Ac_0c_1 + Bc_0c_3 + gc_1c_3) = 1$, $2Bc_0c_1 + gc_1^2 + 2c_0c_3C = 0$, $gc_0 + + 2c_1C = 0$, insieme con $a_0 = c_0^2 C$, $a_1 = Bc_0^2 + 2gc_0c_1 + Cc_1^2$, $a_2 = = Ac_0^2 + 2c_3(gc_0 + c_1 C) + Bc_1^2$, dalle quali si hanno i valori

$$c_1 = -\frac{gc_0}{2C},\ c_3 = \frac{gAc_0}{BC} = -\frac{2Ac_0}{g},$$

$g^2 = -2BC$, $3B^2 = 4AC$, $c_0^2 = -\frac{g}{6AB}$, indi $a_1 = \frac{5c_0^2 B}{2}$, $a_2 = -$

$-\frac{5c_0^2 B}{2} B$, $a_5 = -\frac{2A^3 c_0^2}{BC}$, e nell'ipotesi di $B = -2$, $C = 1$ conseguono $A = 3$, $g = -2$ e la curva corrispondente avrà per equazione polare $18\, r^5\, sen\, 5\omega = 1 - 5\, r^2 - 5\, r^4 + 27\, r^{10}$, ovvero $18\, r^5 \cos 5\omega = (1 + r + 3\, r^3) \times (1 - r - 3\, r^3) \sqrt{4\, r^2 - (1 - 2\, r^2 + 3\, r^4)^2}$.

Esempio 2°. Per $n = 4$ saranno $P = a_0 + a_1 r^2 + a_4 r^8$, $Q = b_0 + b_1 r^2 + b_2 r^4$ e l'equazioni (6), (17) divengono $2 a_4 r^8 - a_1 r^2 - 2 a_0 = 2 (b_0 + b_1 r^2 + b_2 r^4)(A r^4 + B r^2 + C)$, $b_2 r^4 - b_1 r^2 - 3 b_0 = h (A r^4 + B r^2 + C)$, con h costante; dalla prima di queste si deducono $b_2 = -\frac{A}{B} b_1$, $b_1 (AC - B^2) = A B b_0$, indi dalla seconda $b_1 = \frac{3 B b_0}{C}$, $b_2 = -\frac{3 A b_0}{C}$, $2 AC = 3 B^2$; e la relazione (4) essendo in questo caso $(a_4 r^8 + a_1 r^2 + a_0)^2 - \left(a_4 r^8 - \frac{1}{2} a_1 r^2 - a_0\right)^2 + g^2 r^2 (b_0 + b_1 r^2 + b_2 r^4)^2 = r^8$ determina i valori $g^2 = -8 BC$, $a_0 = -\frac{BC}{2A} b_1$, $a_1 = -4 \frac{B^2}{A} b_1$, $a_4 = -\frac{A^2}{B} b_1$, fatto $A = 2$, $B = -2$, viene $C = 3$, $b_0 = \frac{1}{12\sqrt{3}}$ e ne risulta la curva

$$4\, r^8 + 12\, r^4 \sqrt{3}\, sen\, 4\omega - 16\, r^2 + 3 = o.$$

Si veda, nella suddetta Memoria come l'illustre Dottor SCHWERING estenda il suo metodo agl'integrali iperellittici. La rappresentazione di quest'integrali fu indicata pure nel lavoro citato al num. 52, dal compianto ed insigne Prof. ALFREDO SERRET (nato a Parigi il 30 agosto 1819 ed ivi estinto il 2 marzo 1885).

Capo Quinto.

SUPERFICIE QUADRICHE.

61. — Le superficie di secondo grado a centro referite ai loro assi principali, eccetto le coniche, sono comprese nell' equazione (1) Ax^2+By^2+ $+Cz^2=1$: i coefficienti A, B, C sono tutti e tre positivi per l' ellissoide, due od un solo positivo per l' iperboloide, secondochè questo ha una o due falde. La normale al punto M (x, y, z) della superficie è definita per la serie di ragioni eguali $\frac{X-x}{Ax}=\frac{Y-y}{By}=\frac{Z-z}{Cz}$, onde l' angolo ω che essa fa col piano xOy è dato da $sen\,\omega=\frac{Cz}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}$; la qual relazione si può scrivere (2) $A^2x^2+B^2y^2-C^2 cot^2\omega\, z^2=o$, e per ω costante rappresenta un cono ellittico. La coesistenza delle due equazioni (1), (2) determina il luogo geometrico dei piedi M delle *normali isocline* o parallele alle generatrici del cono di rotazione, il cui asse è la retta Oz e l' angolo al vertice eguaglia $\pi-2\omega$: eliminando z si trova la proiezione della curva sul piano xOy coincidere con l' ellisse

$$A\left(\frac{A}{C}tang^2\omega+1\right)x^2+B\left(\frac{B}{C}tang^2\omega+1\right)y^2=1$$

avente l' area (3) $\sigma=\frac{\pi\, C cos^2\omega}{\sqrt{AB(A sen^2\omega+C cos^2\omega)(B sen^2\omega+C cos^2\omega)}}$. Per maggior semplicità di calcolo si facciano $1-\frac{A}{C}=\alpha^2, \frac{C-B}{C-A}=k^2$ insieme con la sostituzione (4) $\alpha\, sen\,\omega=sen\,\varphi$, e la (3) si ridurrà alla forma

$$\sigma=\frac{\pi(\alpha^2-sen^2\varphi)}{\alpha^2\sqrt{AB}\, cos\,\varphi\,\Delta\,\varphi}. \tag{5}$$

Si noti con dZ l' elemento della superficie (1) racchiuso fra due curve isocline infinitamente prossime, è chiaro che proiettandolo sul piano xOy si avrà uno spazio anulare compreso fra le due ellissi σ e $\sigma+d\sigma$ proiezioni delle dette curve, e siccome il piano tangente in M fa col piano xOy l' angolo $\frac{\pi}{2}-\omega$ si deduce $dZ=\frac{d\sigma}{sen\,\omega}$: od integrando per parti

$$Z=\frac{\sigma}{sen\,\omega}+\int\frac{\sigma\, cos\,\omega\, d\omega}{sen^2\omega}, \tag{6}$$

la quale in virtù della sostituzione (4), e della (5) diviene

$$Z = -\frac{\pi}{\alpha\sqrt{AB}}\left[\frac{\alpha^2 - sen^2\varphi}{sen\,\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi} + \int\frac{(\alpha^2 - sen^2\varphi)\,d\varphi}{sen^2\varphi\,\Delta\varphi}\right] =$$

$$-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{AB}}\left[\frac{\alpha^2 - sen^2\varphi}{sen\,\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi} + \alpha^2(F\varphi - E\varphi - cot\,\varphi\,\Delta\varphi) - F\varphi\right],$$

dove posto il valore di α^2 ed eseguite alcune riduzioni si ricava

$$(7)\quad Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\left[(C-A)\,E\varphi + AF\varphi + \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}tang\varphi\right];$$

che misura la zona della superficie (1) racchiusa fra il piano xOy e la curva isoclina (φ), cioè corrispondente al valore $\varphi = arc\,sen\,(\alpha\,sen\,\omega)$. Introducendo il simbolo $H\varphi$ per significare la frazione algebrica

$$\frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{A\,\Delta\varphi}\,tang\,\varphi,$$

per l'ellissoide avendosi $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $C = \frac{1}{c^2}$ risultano

$$\alpha^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2},\quad k^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}\right)$$

e l'espressione della zona compresa fra due curve isocline (φ), (φ_1) diviene

$$(8)\quad Z = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\left[(a^2 - c^2)(E\varphi - E\varphi_1) + c^2(F\varphi - F\varphi_1) + c^2(H\varphi - H\varphi_1)\right].$$

Al valore $\omega = \frac{\pi}{2}$ corrisponde per φ l'angolo $\mu = arc\,sen\,\alpha$, ovvero $\cos\mu = \frac{c}{a}$ e la linea (φ) si riduce al vertice ($x = o, y = o, z = c$); onde l'area della calotta ellissoidica compresa fra questo vertice e la curva isoclina (φ_1) è

$$Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\left[(a^2 - c^2)(E\mu - E\varphi_1) + c^2(F\mu - F\varphi_1) + c^2(H\mu - H\varphi_1)\right].$$

Similmente per $\varphi_1 = o$ la formula (8) darà

$$(9)\qquad Z_0 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\left[(a^2 - c^2)\,E\varphi + c^2 F\varphi + c^2 H\varphi\right],$$

che è il valore della superficie ellissoidica racchiusa fra il piano xOy e la curva isoclina (φ): dunque la loro differenza

$$Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\left[(a^2 - c^2)(E\varphi + E\varphi_1 - E\mu) + c^2(F\varphi + F\varphi_1 - F\mu) + \right.$$
$$\left. + c^2(H\varphi + H\varphi_1 - H\mu)\right]$$

si potrà misurare con area circolare, ove gli angoli φ, φ_1 siano legati dall' equazione trascendente $F\mu = F\varphi + F\varphi_1$, o dalla formula di Lagrange

$\cos\mu = \cos\varphi \cos\varphi_1 - sen\,\varphi\, sen\,\varphi_1 \Delta\mu$; infatti a motivo della relazione di Fagnani si trova $Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} [(a^2 - c^2)\, k^2 sen\,\mu\; sen\,\varphi\; sen\,\varphi_1 +$ $+ c^2 (H\varphi + H\varphi_1 - H\mu)]$. L' antecedente eguaglianza scritta sotto la forma $\left(\frac{\cos\mu + sen\,\varphi\; sen\,\varphi_1 \Delta\mu}{\alpha^2}\right)^2 = \left(\frac{1 - sen^2\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1 - sen^2\varphi_1}{\alpha^2}\right)$ si esprime in funzione degli angoli ω, ω_1 mediante la quadratica (10) $c^2[ab + (a^2 - c^2) sen\,\omega\; sen\,\omega_1] = b^2 (a^2 \cos^2\omega + c^2 sen^2\omega)(a^2 \cos^2\omega_1 + c^2 sen^2\omega_1)$; dunque *sulla superficie dell' ellissoide a tre assi disuguali esistono infiniti sistemi di zone aventi per base una sezione principale e terminate ad una curva isoclina* (ω), *e di calotte col vertice in un estremo dell' asse normale alla detta sezione e limitate alla isoclina* (ω_1), *tali che la lor differenza è una superficie circolare; sendo i seni degli angoli* ω, ω_1 *legati da un' equazione quadrica.* Facendo $\omega' = \omega$ la (10) si riduce $a\; tang^2\omega = \frac{ab}{c\,(a + b + c)}$ e la superficie del semi-ellissoide avente per base l' ellisse di assi $2a$, $2b$ è divisa dalla relativa curva isoclina ω in due zone che differiscono fra loro del circolo $\pi\left(ab - \frac{(a^2 + b^2)\,c}{a + b}\right)$.

Osservazione 1.ª — Eliminando le variabili x^2, y^2, z^2 fra le quattro equazioni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, $A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{1}{p^2}$, $Cz = \frac{\cos\gamma}{p}$, detta p la distanza del centro dal piano tangente, si trova il determinante

$$\begin{vmatrix} \cos^2\gamma, & 0, & 0, & C^2 \\ p^2r^2, & 1, & 1, & 1 \\ p^2, & A, & B, & C \\ 1, & A^2, & B^2, & C^2 \end{vmatrix} = o; \text{ onde posto per brevità } \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ A, & B, & C \\ A^2, & B^2, & C^2 \end{vmatrix} = D$$

si giunge all'equazione (11) $D\cos^2\gamma - C^2(A - B)[p^2(A + B - ABr^2) - 1] = o$, che rappresenta la superficie quadrica in coordinate r, p, γ e ad ogni valore attribuito a $\gamma = \frac{\pi}{2} - \omega$, angolo della normale con l'asse Oz, corrisponderà una curva isoclina.

2.ª Nella superficie quadrica $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ la normale fa col piano xOy un angolo ω determinato per la relazione

$sen\,\omega = -\frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$; dunque nel paraboloide ellittico, i piedi delle

normali inclinate all' asse Oz secondo lo stesso angolo ω giacciono pure sul cilindro ellittico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cot^2\omega$; la superficie Z del paraboloide limitata ad una curva isoclina equivale ad un circolo; infatti la superficie σ dell' ellisse proiezione ha per misura $\pi\, ab\, cot^2\omega$, ed essendo $dZ=\frac{d\sigma}{sen\,\omega}$ con l'integrazione per parti fra i limiti $\frac{\pi}{2}$ ed ω, si ottiene $Z=\frac{\pi\, ab\, cot^2\omega}{sen\,\omega}+$

$$\pi\, ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{cos^3\omega\, d\omega}{sen^4\omega}=\pi ab\left(\frac{cos^2\omega}{sen^3\omega}+\frac{1}{sen\,\omega}-\frac{1}{3\, sen^3\omega}-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\, ab\left(\frac{1}{sen^3\omega}-1\right).$$

62. — Anche il Professor Le Besgue scoprì un bel teorema sulle calotte dell' ellissoide a differenza circolare, scegliendo per variabile indipendente $t=\frac{1}{c^2}cot^2\omega$; le relazioni dimostrate (3), (6) del num. 60 divengono

$$\sigma=\frac{\pi\, abt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{a^2}\right)\left(t+\frac{1}{b^2}\right)}},\ Z=\frac{\pi\, abc\, t\left(t+\frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{a^2}\right)\left(t+\frac{1}{b^2}\right)\left(t+\frac{1}{c^2}\right)}}-\pi abcT;$$

dove si ha $T=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{tdt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{a^2}\right)\left(t+\frac{1}{b^2}\right)\left(t+\frac{1}{c^2}\right)}}$. Indicando con i simboli Z_γ l' area della calotta ellissoidica per $\omega=\frac{\pi}{2}-\gamma$, T_γ il valore dell' integrale precedente T, quando si prenda per suo limite superiore $\frac{1}{m^2}=\frac{1}{c^2}tang^2\gamma$, e posto $A=\frac{ma^2b^2c^2}{\sqrt{(a^2+m^2)(b^2+m^2)(c^2+m^2)}}$ si dedurrà $Z_\gamma=\pi\, A\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\pi\, abc\, T_\gamma$: dunque supponendo $\frac{tang\,\alpha}{a}=$ $=\frac{tang\,\beta}{b}=\frac{tang\,\gamma}{c}=\frac{1}{m}$, i valori T_α, T_β, T_γ dell' integrale T saranno identici e si conchiudono le differenze circolari

$$Z_\gamma-Z_\alpha=\pi\, A\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right),\ Z_\gamma-Z_\beta=\pi\, A\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

L' integrale T per la sostituzione $t+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)tang^2\varphi$ si riduce alla forma $T=\frac{ac}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{cos^2\varphi\,\Delta\varphi}-\frac{1}{b^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right]$, che si

esprime con integrali ellittici a motivo della identità $(1-k^2)\int \frac{d\varphi}{cos^2\varphi\,\Delta\varphi} =$ $= tang\,\varphi\,\Delta\varphi - E\varphi + (1-k^2)F\varphi$; con il valore $k^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\right)$.

63. — Se nell' eguaglianza (9) della pag. 180 si pone $\varphi = \mu$, e si moltiplicano i due membri per 2, a motivo di $H\mu = \frac{1}{b}\sqrt{a^2-c^2}$, ne risulterà la elegante formula di Legendre per la superficie dell' ellissoide $S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi ab}{sen\,\mu}(sen^2\mu\,E\mu + cos^2\mu\,F\mu)$, (*Traité des fonctions elliptiques*, I, pag. 350); sendo i semi-assi $a > b > c$, $cos\,\mu = \frac{c}{a}$ ed il modulo $k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$. L' ellissoide $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = r^4$, polare reciproco del primo rispetto ad una sfera concentrica di raggio r, ha per espressione della sua superficie quella che si deduce dalla precedente col mutare le quantità a, b, c nelle rispettive $\frac{r^2}{c}$, $\frac{r^2}{b}$, $\frac{r^2}{a}$ e quindi la stessa ampiezza μ ed invece il modulo $k' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$; affinchè i moduli k, k' risultino eguali dovrà essere $c = \frac{b^2}{a}$; ed inoltre prendendo $r = b$ le superficie dei due ellissoidi polari reciproci saranno eguali.

Un altro metodo per ottenere la superficie dell' ellissoide consiste nel ridurne la ricerca ad una cubatura, infatti nella nota formula $d^2S =$ $= dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$, in cui $p = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $q = -\frac{c^2y}{b^2z}$ eseguendo le sostituzioni $x = ax_1$, $y = by_1$ si troverà $d^2S = ab\,z_1\,dx_1\,dy_1$, dove si è posto (1) $z_1^2 = \frac{1-a_1^2x_1^2-b_1^2y_1^2}{1-x_1^2-y_1^2}$, $a_1^2 = 1-\frac{c^2}{a^2}$, $b_1^2 = 1-\frac{c^2}{b^2}$, dunque si dovrà determinare il volume $V = \int\int z_1\,dx_1\,dy_1$ compreso fra il piano x_1Oy_1, la superficie quartica (1) e la cilindrica $x_1^2 + y_1^2 = 1$; affinchè un sol valore di z_1 corrisponda ad ogni coppia di valori attribuiti ad x_1, y_1, si daranno a z_1 nella equazione (1) tutti i valori reali da 1 a $+\infty$, e siccome la (1) si può scrivere $x_1^2(z_1^2-a_1^2) + y_1^2(z_1^2-b_1^2) = z_1^2-1$, ne risulta che ogni sezione parallela al piano x_1Oy_1, per $z_1 > 1$ è un' ellisse di semi-assi $\left(\frac{z_1^2-1}{z_1^2-a_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{z_1^2-1}{z_1^2-b_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ minori di uno, per $z_1 = 1$ riducesi

ad un punto e per $z_1 = \infty$ è il cerchio $x_1^2 + y_1^2 = 1$, onde la quartica è asintotica alla superficie cilindrica. Ora il volume racchiuso fra questa ed i piani $z_1 = o, z_1 = 1$ eguaglia π, il rimanente volume fu calcolato dal Professor Catalan mediante corone cilindriche parallele all' asse Oz, e con le basi eguali alla differenza fra l'area π del cerchio $x_1^2 + y_1^2 = 1$ e la surriferita sezione ellittica, cioè $V = \pi + \pi \int_1^\infty \left(1 - \frac{z_1^2 - 1}{\sqrt{(z_1^2 - a_1^2)(z_1^2 - b_1^2)}}\right) dz_1 =$

$$= \pi + \pi \left[z_1 - \frac{1}{z_1} \sqrt{(z_1^2 - a_1^2)(z_1^2 - b_1^2)}\right]_1^\infty +$$

$$+ \pi \int_1^\infty \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1^2 - a_1^2)(z_1^2 - b_1^2)}} - \pi a_1^2 b_1^2 \int_1^\infty \frac{dz_1}{z_1^2 \sqrt{(z_1^2 - a_1^2)(z_1^2 - b_1^2)}}.$$

L'espressione contenuta dentro la parentesi rettangolare si annulla per $z_1 = \infty$, in secondo luogo i due integrali si trasformano in ellittici facendo $z_1 = \frac{a_1}{sen\,\varphi}$, onde

$$V = \pi \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - b_1^2)} + \frac{\pi}{a_1} \int_o^\mu \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{\pi b_1^2}{a_1} \int_o^\mu \frac{sen^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

dove il modulo $k = \frac{b_1}{a_1}$ e l'ampiezza μ è data per $sen\,\mu = a_1$, ed esprimendo in funzione di a, b, c si avrà $V = \frac{\pi c^2}{ab} + \frac{\pi}{sen\,\mu}(sen^2\mu\, E\mu + cos^2\mu\, F\mu)$, che moltiplicata per ab conduce alla superficie del semi-ellissoide.

64. — L'elemento infinitesimale (1) $d^2 S = dx\,dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ dell'area di una superficie S trasformasi in differenti modi; per esempio detta P la normale condotta dall'origine sul piano tangente $(X - x)p + $ $+ (Y - y)q = Z - z$, si trova (2) $P = \frac{z - px - qy}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ e perciò eliminando il radicale fra le (1), (2) risulta (3) $d^2 S = \frac{dx\,dy}{P}(z - px - qy)$, così per l'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, si deducono le derivate parziali $p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$, $q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$ e quindi

$$(4) \qquad d^2 S = \frac{c^2\,dx\,dy}{zP}, \quad (5) \quad \frac{1}{P} = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponendo con Legendre $z = c\cos\psi$, $x = a\,sen\,\psi\cos\omega$, $y = b\,sen\,\psi\,sen\,\omega$, si dovrà sostituire all'espressione $dx\,dy$ il prodotto

$$d\psi\,d\omega\left(\frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\omega} - \frac{dy}{d\psi}\frac{dx}{d\omega}\right) = ab\,sen\,\psi\cos\psi\,d\psi\,d\omega$$

e dalla (4) ne conseguirà l'area ellissoidica pure rappresentata da

(6) $S = \int\int sen\psi\, d\psi\, d\omega \left[a^2 b^2 \cos^2\psi + sen^2\psi\, (b^2 c^2 \cos^2\omega + a^2 c^2 sen^2\omega)\right]^{\frac{1}{2}}$.

Se invece si assumono per variabili indipendenti le quantitá p, q, in virtù dell' eguaglianza $dp\,dq = \left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right) dx\,dy = (rt - s^2)\, dx\,dy$ e della nota equazione (7) $(rt - s^2)\,\rho^2 - Q\sqrt{1+p^2+q^2}\,\rho + (1+p^2+q^2)^2 = o$, che determina i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 in funzione delle derivate $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, $r = \frac{dp}{dx}$, $t = \frac{dq}{dy}$, $s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, avendo posto per brevità $Q = (1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2pqs$, si ricava la semplice formula (8) $d^2 S = \rho_1 \rho_2 \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$. Chiamando poi θ l'angolo dell'asse Ox con la normale P abbassata sul piano tangente, e φ l' angolo che la proiezione di P sul piano yOz fa con Oy, si deducono $\cos\theta = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $tang\,\varphi = -\frac{1}{q}$; i differenziali della prima rispetto alla variabile p e della seconda rispetto a q hanno per prodotto (9) $sen\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$ e quindi la (8) conduce alla seguente formula di Gauss (10) $d^2 S = \rho_1 \rho_2\, sen\theta\, d\theta\, d\varphi$. Per la superficie quadrica $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, si traggono le derivate parziali (11) $p = -\frac{Ax}{Cz}$, $q = -\frac{By}{Cz}$, $r = -\frac{A}{C^2 z^3} \times (Ax^2 + Cz^2)$, $t = -\frac{B}{C^2 z^3}(By^2 + Cz^2)$, $s = -\frac{ABxy}{C^2 z^3}$; onde applicando la (7) ed indicata con P la distanza dell' origine dal piano tangente $AXx + BYy + CZz = 1$, si trova il prodotto dei raggi principali di curvatura (12) $\rho_1 \rho_2 = \frac{1}{ABC}(A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2)^2 = \frac{1}{ABCP^4}$. Paragonando i secondi membri delle (11) con quelli dell' eguaglianze

$$p = -\frac{\cos\theta}{sen\theta\, sen\varphi},\quad q = -\frac{\cos\varphi}{sen\varphi}$$

si ottengono le coordinate del contatto $\frac{Ax}{\cos\theta} = \frac{By}{sen\theta \cos\varphi} = \frac{Cz}{sen\theta\, sen\varphi} = \frac{1}{P}$,

quindi (13) $P^2 = \frac{1}{ABC}(AB\, sen^2\theta\, sen^2\varphi + BC\cos^2\theta + CA\, sen^2\theta \cos^2\varphi)$, e dalla (10) risulta l'espressione razionale di Jacobi

$$S = ABC \int\int \frac{sen\,\theta\,.\,d\theta\,.\,d\varphi}{(AB\, sen^2\theta\, sen^2\varphi + BC\cos^2\theta + CA\, sen^2\theta\cos^2\varphi)^2},$$

oppure essendo $\frac{\pi}{2} - \omega$ l'angolo della normale P con l'asse Oz, e ψ l'angolo fatto dalla sua proiezione sul piano xOy con l'asse Ox, dalle relazioni $sen\,\omega = sen\,\theta\, sen\,\varphi$, $sen\,\theta\cos\varphi = sen\,\psi\cos\omega$, $\cos\theta = \cos\omega\cos\varphi$, per il cambiamento delle variabili indipendenti si avrà

$$(14)\quad S = -ABC \int\int \frac{\cos\omega\, d\omega\,.\,d\psi}{(AB\, sen^2\omega + BC\cos^2\omega\cos^2\psi + CA\cos^2\omega\, sen^2\psi)^2}\ (*)$$

È bene avvertire che dalla (9) si deduce

$$(15)\qquad \int\int \frac{dp\, dq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

la qual proprietà ha luogo per l'ottava parte di ogni superficie chiusa e di uniforme curvatura.

Il Professor Catalan giunse alla surriferita formula (6) di Legendre decomponendo la superficie ellissoidica in rettangoli curvilinei mediante linee s di livello e linee s' di massima pendenza; poichè le prime sono sezioni parallele al piano xOy, ogni lor punto ha per coordinate $z = c\cos\psi$, $x = a\, sen\,\psi\cos\omega$, $y = b\, sen\,\psi\, sen\,\omega$, e per un dato valore di ψ trovasi l'arco $ds = d\omega\, sen\,\psi\,(a^2 sen^2\omega + b^2\cos^2\omega)^{\frac{1}{2}}$; le linee di massima pendenza sono definite dalla proporzione $dx : \frac{x}{a^2} = dy : \frac{y}{b^2}$, inoltre dalla eguaglianza $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ricavandosi $\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = o$, facilmente si ottiene

$$ds' = dz\left(1 + \frac{\frac{z^2}{c^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}\right)^{\frac{1}{2}} = c\,d\psi\left(sen^2\psi + \frac{a^2 b^2\cos^2\psi}{c^2(a^2 sen^2\omega + b^2\cos^2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e però l'area di uno dei suddetti rettangoli infinitesimi si esprimerà con $ds\,.\,ds' = sen\,\psi\, d\psi\, d\omega\,[a^2b^2\cos^2\psi + c^2 sen^2\psi\,(a^2 sen^2\omega + b^2\cos^2\omega)]^{\frac{1}{2}}$, ec.

Sia R il raggio vettore di un punto M della superficie S_1, γ la sua inclinazione sull'asse Oz ed ω l'angolo che la proiezione di R nel piano xOy fa con l'asse Ox, il prodotto $sen\,\gamma\, d\gamma\, d\omega$ rappresenta l'elemento

(*) Giornale di Crelle, tomo X, pag. 110.

superficiale della sfera di raggio uno, e perciò $d^2 S_1 = R^2 sen\gamma\, d\gamma\, d\omega$, ed il valore della piramide avente quest'area per base ed il vertice all'origine sarà (16) $d^2 V_1 = \frac{R^3}{3} sen\gamma\, d\gamma\, d\omega = \frac{P}{3} d^2 S_1$, da cui (17) $d^2 S_1 = \frac{R^3}{P} sen\gamma\, d\gamma\, d\omega$. È facile conchiudere che il *volume racchiuso dalla superficie* $R^3 = 3\, l\, [a^2 b^2 cos^2\gamma + sen^2\gamma\, (b^2 c^2 cos^2\omega + c^2 a^2 sen^2\omega)]^{\frac{1}{2}}$, ovvero $(x^2+y^2+z^2)^4 = 9\, l^2\, (a^2 b^2 z^2 + b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2)$, *eguaglia il prodotto del segmento l per l'area dell'ellissoide, i cui semi-assi sono a, b, c.*

Il celebre Professore Oscar Schlömilch scoprì, mediante la formula di Jacobi, *esistere sulle superficie quadriche a centro un' infinità di zone misurabili con integrali ellittici completi di prima e seconda specie.* Infatti la (14) con semplici trasformazioni si può scrivere

$$Z = \frac{AB}{C} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(A\, sen^2\psi + B\, cos^2\psi)^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{cos\omega\, d\omega}{(1 - \lambda^2 sen^2\omega)};$$

dove si ha $\lambda^2 = 1 - \frac{AB}{C\,(A\, sen^2\psi + B\, cos^2\psi)}$, ed i limiti ω_1, ω_2 restano da principio indeterminati; posto $\lambda\, sen\omega = u$ l'integrale rispetto ad ω avrà per valore la costante $M = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \left[\frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4} log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_{u_1}^{u_2}$; onde la superficie della zona diverrà l'integrale

$$Z = \frac{ABM}{C} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\lambda\,(A\, sen^2\psi + B\, cos^2\psi)^2};$$

questo per la sostituzione $tang\,\psi = \sqrt{\frac{B}{A}}\, tang\,\varphi$ si riduce alla forma

$$Z = \frac{4\, M}{\sqrt{ABC\,(C-A)}} \left[C F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - (C-A)\, E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

essendo $k = \left(\frac{B-A}{C-A}\right)^{\frac{1}{2}}$. I suddetti limiti ω_1, ω_2 sono dati dall' eguaglianza $\lambda\, sen\omega = u$, in cui u prende i valori corrispondenti u_1, u_2 e definiscono due curve limitanti la zona; a motivo dell' equazioni

$$tang\,\psi = \frac{By}{Ax},\ sen^2\omega = \frac{1 - Ax^2 - By^2}{1 - A\alpha^2 x^2 - B\beta^2 y^2},\ \lambda^2 = \frac{A\alpha^2 x^2 + B\beta^2 y^2}{Ax^2 + By^2},$$

dove si è fatto per brevità $\alpha^2 = 1 - \frac{A}{C}$, $\beta^2 = 1 - \frac{B}{C}$ la precedente $\lambda\, sen\omega = u$ diviene $(Ax^2 + By^2)(A\alpha^2 x^2 + B\beta^2 y^2)(1 - u^2) = (A\alpha^2 x^2 + B\beta^2 y^2) - u^2 (Ax^2 + By^2)$; attribuendo ad u i valori u_1, u_2 si avranno le proiezioni delle dette curve sul piano xOy, e confrontandole con $Ax^2 + By^2 = 1$, traccia della quadrica sullo stesso piano, si conchiuderà che i numeri

u_1, u_2 devono esser positivi, minori di β per l'ellissoide, minori di uno per l' iperboloide ad una falda, superiori ad uno e minori di β per l'iperboloide a due falde.

65. — La superficie pedale della quadrica $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ rispetto al centro si esprime in coordinate cartesiane eliminando x, y, z fra l'equazioni del piano tangente $AxX+ByY+CzZ=1$, della normale $\frac{X}{Ax}=$ $=\frac{Y}{By}=\frac{Z}{Cz}$ abbassata dall'origine sul detto piano, e della stessa quadrica; ne risulta la quartica $(X^2+Y^2+Z^2)^2=\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C}$ e scrivendo X^2+ $+Y^2+Z^2=R^2$, $x^2+y^2+z^2=r^2$, si ha pure $R^4r^2=\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}$, in cui sostituite le formule $X=R\,sen\,\gamma\,cos\,\omega$, $Y=R\,sen\,\gamma\,sen\,\omega$, $Z=R\,cos\,\gamma$ ne consegue la relazione $R^2r^2=sen^2\gamma\left(\frac{cos^2\omega}{A^2}+\frac{sen^2\omega}{B^2}\right)+\frac{cos^2\gamma}{C^2}$: siccome l'angolo che la normale P al piano tangente nel punto (X, Y, Z) fa col raggio vettore R è identico all'angolo di R con il raggio vettore r del punto (x, y, z) si trova $R^2=Pr$; onde applicando la (17) si avrà la superficie quartica misurata da $S_1=\int\int Rr\,sen\,\gamma\,d\gamma\,d\omega=$

$$=\int\int sen\,\gamma\,d\gamma\,d\omega\left[\frac{cos^2\gamma}{C^2}+sen^2\gamma\left(\frac{cos^2\omega}{A^2}+\frac{sen^2\omega}{B^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}};$$ paragonandola con la (6) del num. 64 si conchiude il teorema *la superficie pedale, rispetto al centro, dell' ellissoide di semi-assi a, b, c eguaglia la superficie dell' ellissoide avente per semi-assi* $\frac{bc}{a}, \frac{ac}{b}, \frac{ab}{c}$.

Anche il volume V racchiuso dalla superficie pedale dell'ellissoide è esprimibile con integrali ellittici di prima e seconda specie. (*) Infatti si applichi la formula (16) num. 64, osservando che il raggio vettore della superficie è $R=(a^2 sen^2\gamma\,cos^2\omega+b^2 sen^2\gamma\,sen^2\omega+c^2 cos^2\gamma)^{\frac{1}{2}}$, fatte le sostituzioni $a\,sen\,\gamma\,cos\,\omega=\frac{1}{\rho}\,sen\,\theta\,cos\,\psi$, $b\,sen\,\gamma\,sen\,\omega=\frac{1}{\rho}\,sen\,\theta\,sen\,\psi$, $cos\,\gamma=\frac{1}{\rho}\,cos\,\theta$ si deducono inversamente $\rho=\frac{1}{R}=\left(\frac{sen^2\theta\,cos^2\psi}{a^2}+\frac{sen^2\theta\,sen^2\psi}{b^2}+\frac{cos^2\theta}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

(*) *Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie curve e cubatura dei solidi.* Memoria del Prof. Barnaba Tortolini inserita nel tomo 31mo del Giornale di Crelle, anno 1844.

$tang\, \omega = \frac{a}{b} tang\, \psi$, $tang\, \gamma = \frac{c}{ab} tang\, \theta\, (a^2 sen^2 \psi + b^2 cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}}$; onde scritto per brevità $\alpha^2 = b^2 (c^2 sen^2 \theta + a^2 cos^2 \theta)$, $\beta^2 = a^2 (c^2 sen^2 \theta + b^2 cos^2 \theta)$, l'elemento del volume si trasforma in $d^2 V = \frac{8}{3} (a b c)^5 \frac{sen \theta\, d \theta\, d \psi}{(\alpha^2 cos^2 \psi + \beta^2 sen^2 \psi)^3}$ da integrarsi fra i limiti o e $\frac{\pi}{2}$ rispetto a ciascuna delle variabili θ, ψ. Ora mediante la nuova sostituzione $tang\, \psi = \frac{\alpha}{\beta} tang\, \lambda$ il differenziale

$$\frac{d \psi}{(\alpha^2 cos^2 \psi + \beta^2 sen^2 \psi)^3}$$

si muta in $\frac{d \lambda}{(\alpha \beta)^5} (\alpha^2 sen^2 \lambda + \beta^2 cos^2 \lambda)^3$, ed in virtù dell'integrale definito

$\int_o^{\frac{\pi}{2}} d \lambda\, (\alpha^2 sen^2 \lambda + \beta^2 cos^2 \lambda)^3 = \frac{\pi}{16} (3\, \alpha^4 + 3\, \beta^4 + 2\, \alpha^2 \beta^2)$, il volume considerato diviene $V = \frac{\pi}{6} (a b c)^5 \int_o^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{\alpha^4} + \frac{3}{\beta^4} + \frac{2}{\alpha^2 \beta^2} \right) \frac{sen \theta\, d \theta}{\alpha \beta}$. Per questa integrazione si ponga $cos\, \mu = \frac{c}{a}$, $cos\, \nu = \frac{c}{b}$, $cos \theta = cot \mu\, tang \varphi$, i detti valori di α, β si ridurranno alle forme $\alpha = \frac{ab\, cos\, \mu}{cos\, \varphi}$, $\beta = \frac{ab\, cos\, \nu}{cos\, \varphi} \Delta \varphi$, dove $\Delta\, \varphi = (1 - k^2 sen^2\, \varphi)^{\frac{1}{2}}$, $k^2 = 1 - tang^2\, \nu\, cot^2\, \mu = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$, $\Delta\, \mu = \frac{b}{a}$ ed il volume sarà espresso da $V = \frac{\pi\, c^5}{6 ab\, sen\, \mu\, cos \nu} \left[\frac{3}{cos^4 \mu} \int_o^{\mu} \frac{cos^4 \varphi\, d \varphi}{\Delta \varphi} + \right.$ $\left. + \frac{3}{cos^4 \nu} \int_o^{\mu} \frac{cos^4 \varphi\, d \varphi}{(\Delta\, \varphi)^5} + \frac{2}{cos^2 \mu\, cos^2 \nu} \int_o^{\mu} \frac{cos^4 \varphi\, d \varphi}{(\Delta \varphi)^3} \right]$. I tre integrali contenuti nella parentesi si ottengono in funzione delle trascendenti $E \mu$, $F \mu$, poichè scritto per brevità Δ in luogo di $\Delta\, \varphi$ e $k_1^2 = 1 - k^2$ si hanno

$$k^2 \int \frac{sen^2 \varphi\, d \varphi}{\Delta} = F \varphi - E \varphi, \quad k^2 \int \frac{cos^2\, \varphi\, d\, \varphi}{\Delta} = E\, \varphi - k_1^2 F \varphi;$$

inoltre dalla relazione differenziale

$d\, (sen\, \varphi\, cos\, \varphi\, \Delta\, \varphi) = \frac{d \varphi}{\Delta\, \varphi} [3\, k^2 cos^4\, \varphi + 2\, (k_1^2 - k^2)\, cos^2\, \varphi - k_1^2]$ si ricava

$$(1) \int \frac{cos^4 \varphi\, d\, \varphi}{\Delta} = \frac{\Delta}{3\, k^2}\, sen\, \varphi\, cos\, \varphi + \frac{2}{3\, k^4} (k^2 - k_1^2)\, E\, \varphi + \frac{k_1^2}{3\, k^4} (2\, k_1^2 - k^2)\, F \varphi.$$

Parimente differenziando la frazione $\frac{sen \varphi cos \varphi}{\Delta}$ si trova $\left(\frac{cos^2 \varphi}{\Delta^3} - \frac{sen^2\, \varphi}{\Delta} \right) d \varphi$, e quindi ne consegue (2) $\int \frac{cos^2 \varphi\, d \varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{\Delta} sen\, \varphi\, cos\, \varphi + \frac{1}{k^2} (F \varphi - E\, \varphi)$,

dalla quale in virtù dell' identità $\frac{1}{\Delta} - \frac{k^2 \cos^2 \varphi}{\Delta^3} = \frac{k_1^2}{\Delta^3}$ verrà

$$(3) \qquad \int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{E\varphi}{k_1^2} - \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{k_1^2 \Delta}$$

come pure moltiplicata la stessa identità per $\cos^2\varphi$ è facile dedurre la seguente (4) $\int \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = \frac{(1+k_1^2)}{k^4} E\varphi - \frac{2k_1^2}{k^4} F\varphi - \frac{k_1^2}{k^2\Delta} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$. Infine la relazione differenziale

$$d\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\Delta^3}\right) = (2\cos^2\varphi - 1)\frac{d\varphi}{\Delta^3} + 3k^2(\cos^2\varphi - \cos^4\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta^5}$$

a motivo dell' identità $\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^5} = \frac{1}{k_1^2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3} - \frac{k^2\cos^4\varphi}{\Delta^5}\right)$ si riduce a

$$d\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\Delta^3}\right) = \frac{(2+k^2)}{k_1^2\Delta^3}\cos^2\varphi\, d\varphi - \frac{3k^2}{k_1^2\Delta^5}\cos^4\varphi\, d\varphi - \frac{d\varphi}{\Delta^3};$$

da quest' eguaglianza per le formule precedenti risulta l' integrale

$$(5) \quad \int \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Delta^5} = \frac{2(1+k^2)}{3k^2\Delta}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{k_1^2 \operatorname{sen}\varphi}{3k^2\Delta^3}\cos\varphi + \frac{(2+k^2)}{3k^4}F\varphi - \frac{2(1+k^2)}{3k^4}E\varphi.$$

Sostituendo i valori degl'integrali (1), (4), (5) per $\varphi = \mu$ nell' espressione surriferita del volume, dopo alcune riduzioni si otterrà

$$(6) \; V = \frac{\pi abc}{6}\left(2\frac{d^2}{a^2} - 1\right) + \frac{\pi}{6}\left(\frac{c^2 d^2 + c^4 - a^2 b^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right)F\mu + \frac{1}{3}\pi d^2 \sqrt{a^2 - c^2}\, E\mu;$$

in cui d^2 rappresenta la somma $a^2 + b^2 + c^2$. Nell' ottica la superficie pedale dell' ellissoide prende il nome di *superficie d' elasticità;* essa è pure la figura inversa dell' ellissoide $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$, polare reciproco del primo rispetto alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Il Professor Tortolini derivò dall' ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ la superficie quartica (7) $\left(\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} + \frac{z^2}{c_1}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, mediante la trasformazione parabolica $r^2 = m\rho$; dove r indica il raggio vettore dell' ellissoide, ρ quello della superficie derivata ed il segmento $m = \frac{a^2}{a_1} = \frac{b^2}{b_1} = \frac{c^2}{c_1}$. Il volume racchiuso dalla quartica (7) ha la ragione costante $\frac{m^3}{abc}$ col volume determinato dalla superficie d' elasticità e ciò si dimostra con le coordinate polari o costruendo la figura (x_1, y_1, z_1) affine alla quartica (7) mediante le relazioni $\frac{x}{ax_1} = \frac{y}{by_1} = \frac{z}{cz_1} = \frac{1}{m}$.

Si può aggiungere che il volume racchiuso dalla superficie algebrica

$$a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^6 (x^2 + y^2 + z^2) = m^8\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^5 \left(\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^5$$

è pure determinato dalla formula (6) divisa per m^4.

In simil modo il volume contenuto dalla superficie sestica $(x^2+y^2+z^2)\times(ax^2+by^2+cz^2)^2=1$, dove le costanti $a>b>c$ sono positive, si valuta con l'integrale doppio $V=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,\gamma\,d\gamma\,d\omega}{\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2 sen^2\omega}$, sendo $\alpha^2=a\,sen^2\gamma+c\cos^2\gamma$, $\beta^2=b\,sen^2\gamma+c\cos^2\gamma$; integrando prima rispetto ad ω risulta $V=\frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sen\gamma\,d\gamma}{\alpha\,\beta}$, che per la sostituzione $\cos\gamma=sen\theta\sqrt{\frac{a}{a-c}}$ si trasforma in $V=\frac{4\pi}{3\sqrt{b(a-c)}}F(k,\theta_0)$, in cui si ha $\theta_0=arc\cos\sqrt{\frac{c}{a}}$, e $k^2=\frac{a}{b}\left(\frac{b-c}{a-c}\right)$.

66. — È notevolissima la formula di William Roberts per determinare la quadratura di una superficie S in funzione della normale P abbassata dall'origine sul piano tangente, degli angoli θ ch'essa fa con l'asse Ox e φ formato dalla proiezione di P sul piano yOz con l'asse Oy. Il piano tangente (1) $x\cos\theta+y\,sen\,\theta\cos\varphi+z\,sen\,\theta\,sen\,\varphi=P$ contiene il punto infinitamente vicino $x+dx, y+dy, z+dz$ e però la condizione (2) $dx\cos\theta+dy\,sen\,\theta\cos\varphi+dz\,sen\,\theta\,sen\,\varphi=o$; differenziando la (1) rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti θ, φ in virtù della (2) si ottengono

$$(3)\qquad \frac{dP}{d\theta}=-x\,sen\,\theta+y\cos\theta\cos\varphi+z\cos\theta\,sen\,\varphi$$

$$(4)\qquad \frac{dP}{d\varphi}=-y\,sen\,\theta\,sen\,\varphi+z\,sen\,\theta\cos\varphi;$$

indi per le (1), (3), (4) si hanno i valori delle coordinate

$$(5)\quad x=P\cos\theta-\frac{dP}{d\theta}sen\,\theta,\; y=\cos\varphi\left(P\,sen\,\theta+\frac{dP}{d\theta}\cos\theta\right)-\frac{sen\varphi}{sen\theta}\frac{dP}{d\varphi},$$

$$z=sen\,\varphi\left(P\,sen\,\theta+\frac{dP}{d\theta}\cos\theta\right)+\frac{\cos\varphi}{sen\theta}\frac{dP}{d\varphi}.$$

L'area infinitesimale della superficie essendo $d^2S=\frac{dx\,dy}{sen\,\theta\,sen\,\varphi}$, per il cambiamento delle variabili indipendenti si riduce alla forma

$$d^2S=\frac{d\theta\,d\varphi}{sen\,\theta\,sen\,\varphi}\left(\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\theta}\right)$$

e posto per brevità (7) $u=P\,sen\theta+\frac{dP}{d\theta}\cos\theta+\frac{1}{sen\theta}\frac{d^2P}{d\varphi^2}$, $v=P+\frac{d^2P}{d\theta^2}$, $w=\cot\theta\frac{dP}{d\varphi}-\frac{d^2P}{d\theta\,d\varphi}$, dalle (5) si ricavano le derivate (8) $\frac{dx}{d\theta}=-v\,sen\,\theta$, $\frac{dx}{d\varphi}=w\,sen\,\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=v\cos\varphi\cos\theta+w\frac{sen\,\varphi}{sen\,\theta}$, $\frac{dy}{d\varphi}=-(u\,sen\,\varphi+w\cos\varphi\cos\theta)$, che sostituite nella (6) conducono alla seguente formula di Roberts (9) $d^2S=\left(uv-\frac{w^2}{sen\theta}\right)d\theta\,.\,d\varphi$.

La superficie S_1 parallela ad una superficie data S è l'inviluppo della sfera di raggio costante k ed il cui centro descrive la superficie S; i piani tangenti ai punti omologhi sono paralleli e distano fra loro del segmento k; cioè (10) $P_1 = P + k$, dove P_1 e P sono le normali abbassate dall'origine comune sui detti piani; onde significate con u_1, v_1, w_1 le quantità della superficie S_1 analoghe alle respettive u, v, w di S trovansi (11) $u_1 = u + k\, sen\, \theta$, $v_1 = v + k$, $w_1 = w$ e però

(12) $d^2 S_1 = \left[u_1 v_1 - \frac{w_1^{\,2}}{sen\,\theta}\right] d\theta\, d\varphi = d^2 S + k\,(u + v\, sen\,\theta)\, d\theta\, d\varphi + k^2\, sen\,\theta\, d\theta\, d\varphi$

a motivo della formula (9). Inoltre i raggi principali di curvatura di S_1 nel punto $(P+k, \varphi, \theta)$ omologo al punto (P, φ, θ) della superficie S sono evidentemente $\rho_1 + k$, $\rho_2 + k$, ed applicando la formula di Gauss si avrà pure (13) $d^2 S_1 = (\rho_1 + k)(\rho_2 + k)\, sen\,\theta\, d\theta\,.\, d\varphi = d^2 S + k\,(\rho_1 + \rho_2)\, sen\,\theta\,.\, d\theta\,.\, d\varphi + k^2\, sen\,\theta\,.\, d\theta\,.\, d\varphi$; la quale eguaglianza paragonata con la (12) determina la relazione (14) $(\rho_1 + \rho_2)\, sen\,\theta = u + v\, sen\,\theta$. Sostituendo in questa i valori di u, v forniti dalle (7), e moltiplicando i due membri per $d\theta\, d\varphi$ si ricava integrando (15) $S' = \int_0^{\varphi} \int_0^{\theta} (\rho_1 + \rho_2)\, sen\,\theta\,.\, d\theta\, d\varphi =$

$= \int_0^{\varphi} \int_0^{\theta} \left(2 P\, sen\,\theta + \frac{dP}{d\theta} \cos\theta + \frac{d^2 P}{d\theta^2}\, sen\,\theta + \frac{1}{sen\,\theta} \frac{d^2 P}{d\varphi^2}\right) d\varphi\, d\theta$, e poichè si hanno gl'integrali semplici $\int_0^{\theta} \left(\frac{dP}{d\theta} \cos\theta + \frac{d^2 P}{d\theta^2}\, sen\,\theta\right) d\theta =$

$= \left(\frac{dP}{d\theta}\, sen\,\theta\right)_0^{\theta}$, $\int_0^{\varphi} \frac{d^2 P}{d\varphi^2}\, d\varphi = \left(\frac{dP}{d\varphi}\right)_0^{\varphi}$, la (15) si riduce alla seguente

$$(16)\quad S' = \int_0^{\varphi} \int_0^{\theta} 2 P\, sen\,\theta\, d\varphi\, d\theta + \int_0^{\varphi} \left(\frac{dP}{d\theta}\, sen\,\theta\right)_0^{\theta} d\varphi + \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{sen\,\theta} \left(\frac{dP}{d\varphi}\right)_0^{\varphi}.$$

Ad esempio la formula (13) del numero 64 determina l'espressione di P per la superficie quadrica $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ e con facile calcolo da essa ne conseguono $\frac{dP}{d\theta} = \frac{sen\,\theta \cos\theta}{P}\left(\frac{\cos^2\varphi}{B} + \frac{sen^2\varphi}{C} - \frac{1}{A}\right)$, $\frac{dP}{d\varphi} = \frac{sen^2\theta\, sen\,\varphi \cos\varphi}{P} \times \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)$, siccome queste derivate si annullano ai limiti o, $\frac{\pi}{2}$, nell'ellissoide si conchiude per la (16) la relazione (17)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho_1 + \rho_2)\, sen\,\theta\,.\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,\theta\,.\, d\theta\, d\varphi \left[4 \frac{\cos^2\theta}{A} + 4 sen^2\theta \left(\frac{\cos^2\varphi}{B} + \frac{sen^2\varphi}{C}\right)\right]^{\frac{1}{2}};$$

dunque dalla (13) risulta il teorema del Tortolini (*) *la superficie parallela all' ellissoide S di semi-assi a, b, c eguaglia la somma di tre superficie, la prima sferica di raggio k, le altre ellissoidiche date dalla stessa S e dalla kS' avente per quadrati dei semi-assi* $\frac{2kab}{c}$, $\frac{2kbc}{a}$, $\frac{2kac}{b}$.

(*) Vedasi la Memoria del sapiente annalista « *Sopra le superficie parallele...* » pubblicata nel 1° volume dei suoi *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche,* anno 1850.

67. — I raggi ρ_1, ρ_2 di curvatura principale della superficie quadrica (1) $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ nel punto (x, y, z) sono le radici dell'equazione (2) $\frac{A^2x^2}{AP\rho-1}+\frac{B^2y^2}{BP\rho-1}+\frac{C^2z^2}{CP\rho-1}=0$, dove $P=\frac{1}{(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$ misura la distanza del centro dal piano tangente; con facili riduzioni la (2) ordinata rispetto a ρ e posto $x^2+y^2+z^2=r^2$ diviene (3) $\rho^2-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-r^2\right)\frac{\rho}{P}+\frac{1}{ABCP^4}=0$. Il professor Tortolini, con laboriosi calcoli ed ingegnose riduzioni determinò l'equazione di secondo grado avente per sue radici i raggi di curvatura principale della superficie di elasticità; vi si può giungere facilmente applicando la trasformazione inversa. Infatti si è veduto al numero 65 che la pedale della quadrica (1) è definita dall'equazione (4) $R^4=aX^2+bY^2+cZ^2$, dove a, b, c simboleggiano le respettive grandezze $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$; ricavando le derivate parziali $p=-\frac{X}{Z}\left(\frac{a-2R^2}{c-2R^2}\right)$, $q=\frac{Y}{Z}\left(\frac{b-2R^2}{c-2R^2}\right)$, ed eguagliandole alle note formule $p=-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}$, $q=-\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$ si ottengono le ragioni $\frac{X(2R^2-a)}{\cos\theta}=\frac{Y(2R^2-b)}{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}=\frac{Z(2R^2-c)}{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}$; indicando con lR questo valor comune, innalzandole a quadrato e componendole si trova (5) $R^2l^2=a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2$. Invece moltiplicando i termini delle ragioni per X, Y, Z e poi aggiunti i numeratori e i denominatori delle nuove risulta (6) $l=\frac{R^3}{P_1}$; dove $P_1=\frac{(X^2+Y^2+Z^2)^2}{(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)^{\frac{1}{2}}}$ rappresenta la normale abbassata dal centro sul piano tangente nel punto (X, Y, Z) della superficie (4). Mediante le relazioni $X=R\operatorname{sen}\gamma\cos\omega$, $Y=R\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\omega$, $Z=R\cos\gamma$, ne consegue dalla (5) il valore

$$(7)\ l^2=(a^2\cos^2\omega+b^2\operatorname{sen}^2\omega)\operatorname{sen}^2\gamma+c^2\cos^2\gamma.$$

Inoltre l'angolo ψ della normale nel punto (X, Y, Z) col raggio vettore corrispondente R, si otterrà evidentemente per la formula

$$(8)\ \cos\psi=\frac{P_1}{R}=\frac{R^2}{l}.$$

Descrivasi una sfera con il raggio k ed il centro nell'origine degli assi coordinati, la superficie polare reciproca della quadrica (1) ha per equazione (9) $ax^2+by^2+cz^2=k^4$; la distanza del suo centro dal piano tangente è (10) $P=\frac{k^4}{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$, ed i raggi di curvatura principale della quadrica (9) sono le radici dell'equazione

$$(11)\ \rho^2-\left(\frac{k^4}{a}+\frac{k^4}{b}+\frac{k^4}{c}-r^2\right)\frac{\rho}{P}+\frac{k^{12}}{abc\,P^4}=0;$$

sendo r il raggio centrale. Ora costruendo la figura inversa della quadrica polare mediante le ragioni $\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{r}{R} = \frac{k^2}{R^2}$ si ottiene la superficie di elasticità $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = R^4$; la distanza del centro dai piani tangenti la quadrica polare si esprime in funzione di X, Y, Z con la formula $P = \frac{k^2 R^2}{(a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{k^2 R}{l}$. E siccome il cerchio m di curvatura nel punto M della linea piana s descritta sopra una superficie f ha comuni con questa tre punti M, N, P infinitamente vicini, la sua inversa sarà una circonferenza m' passante per i tre punti M', N', P' infinitamente vicini od osculatrice alla curva s' inversa di s e situata sopra la sfera S' inversa del piano s e perciò contenente l'origine. Se la linea s coincida con una sezione normale della superficie f in M, il centro C' del cerchio osculatore m' a motivo del teorema di Meusnier (*) è la proiezione ortogonale del centro C_1 di curvatura della sezione normale in M', ed il raggio $C_1 M'$ normale alla superficie f' toccherà la sfera S'; onde C_1 si può considerare qual centro di una sfera S'_1 col raggio $C_1 M'$ e segante ortogonalmente S' secondo il cerchio osculatore m', e poichè l'angolo di due superficie in un punto M della loro sezione eguaglia quello di segamento delle superficie inverse nel punto omologo M', la circonferenza m situata nel piano s inverso della sfera S' sarà un cerchio massimo della sfera S_1 inversa di S'_1, ed il suo centro C giacerà sulla retta che unisce l'origine O al centro C_1; dunque i raggi $CM = \rho$, $C_1 M' = \rho_1$ corrispondenti di curvatura principale delle due superficie inverse facendo lo stesso angolo ψ con il raggio vettore OMM' ed avendo i centri C, C_1 in linea retta con l'origine saranno proporzionali alle respettive proiezioni OD, OD_1 dei segmenti OC, OC_1, ovvero $\frac{OM - DM}{D_1 M' - OM'} = \frac{CM}{C_1 M'}$, e perchè $OM = r$, $OM' = R$, ne viene $\frac{r - \rho \cos\psi}{\rho_1 \cos\psi - R} = \frac{\rho}{\rho_1}$, dalla quale per i noti valori $r = \frac{k^2}{R}$, $\cos\psi = \frac{R^2}{l}$ si conchiude (12) $\rho = \frac{k^2 l \rho_1}{R^2 (2 R \rho_1 - l)}$; sostituendo questa espressione insieme con la surriferita $P = \frac{k^2 R}{l}$ nell'equazione dei raggi di curvatura principale della quadrica polare con brevi riduzioni risulta
$abc R \rho_1^2 - [R(ab + ac + bc) - abc] \rho_1 (2 R \rho_1 - l) + R l^2 (2 R \rho_1 - l)^2 = 0$,
e sviluppando si ottiene

$$(13) \quad [4 R^3 l^2 - 2 R^3 (ab + bc + ca) + 3 abc R] \rho_1^2 - \\ - [4 l^3 R^2 - l R^2 (ab + bc + ca) + l abc] \rho_1 + R l^4 = 0,$$

(*) Si consulti il seguente capo VI.

la quale equazione determina i raggi ρ_1, ρ_2 di curvatura principale della superficie d'elasticità mediante il raggio centrale R, i quadrati a, b, c dei semiassi della superficiė quadrica (1) e la funzione angolare l. Ne discende la relazione (14) $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{R l^3}[4 l^2 R^2 - R^2(ab+ac+bc)+abc]$ sufficiente ad ottenere la quadratura della superficie S_1 parallela alla superficie S di elasticità determinata con integrali ellittici dal prof. Tortolini l'anno 1856 nel tomo settimo dei suoi *Annali di scienze fisiche e matematiche.*

68. — Al numero 65 si è provato che l'elemento infinitesimale della superficie di elasticità si esprime con la formula (1) $d^2 S = l \, sen\gamma \, d\gamma \, d\omega$, e dalla relazione (13) della pagina 192 risulta (2) $S_1 = S + k S' + 4\pi k^2$; essendo $\frac{1}{8} d^2 S' = (\rho_1 + \rho_2) \, sen\,\theta \, d\theta \, d\varphi = \left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right) d^2 S$ in virtù del teorema di Gauss, pag. 185; inoltre

$$S = 2\pi \frac{b^2 c^2}{a^2} + 2\pi \frac{a^4}{\sqrt{a^4 - c^4}} [sen^2\mu \, E(\mu, h') + cos^2\mu \, F(\mu, h')],$$

dove $cos\,\mu = \frac{c^2}{a^2}$, il modulo $h' = \sqrt{\frac{a^4 - b^4}{a^4 - c^4}}$, e k significa il raggio della sfera costante inviluppata da S_1.

Ora dalla espressione (14) del numero precedente avendosi la somma dei reciproci dei raggi di curvatura si deduce

$$(3) \quad d^2 S' = 32 R \, sen\gamma \, d\gamma \, d\omega + \frac{8\,abc}{R\,l^2} sen\gamma \, d\gamma \, d\omega - 8(ab+ac+bc)\frac{R}{l^2} sen\gamma \, d\gamma \, d\omega;$$

dove si hanno $R = (a \, sen^2\gamma \, cos^2\omega + b \, sen^2\gamma \, sen^2\omega + c \, cos^2\gamma)^{\frac{1}{2}}$

ed $\qquad l = (a^2 sen^2\gamma \, cos^2\omega + b^2 sen^2\gamma \, sen^2\omega + c^2 cos^2\gamma)^{\frac{1}{2}}$.

Integrando la (3) fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$ prima rispetto a γ, indi rispetto ad ω, e scrivendo a^2, b^2, c^2 in luogo di a, b, c verrà

$$(4) \quad S' = 4\,T_1 + 8\,a^2 b^2 c^2\,T_2 - 8(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)\,T_3.$$

Il primo termine di S' rappresenta il quadruplo della superficie ellissoidica T_1 di semiassi $\sqrt{\frac{ab}{c}}$, $\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $\sqrt{\frac{bc}{a}}$; cioè posto $cos\,\mu = \frac{c}{a}$ si trae (5) $T_1 = 2\pi\frac{bc}{a} + \frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}(cos^2\mu \, F\mu + sen^2\mu \, E\mu)$, ed il modulo di questi integrali ellittici è $h = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Nei differenziali $d^2 T_2 = \frac{sen\gamma \, d\gamma \, d\omega}{R\,l^2}$, $d^2 T_3 = \frac{R}{l^2} sen\gamma \, d\gamma \, d\omega$ contenuti nella (3) si operino le sostituzioni

$$\sqrt{a}\, sen\gamma \, cos\omega = \frac{1}{\rho} sen\theta \, cos\psi, \quad \sqrt{b}\, sen\gamma \, sen\omega = \frac{1}{\rho} sen\theta \, sen\psi, \quad \sqrt{c}\, cos\gamma = \frac{1}{\rho} cos\theta;$$

dalle quali si ricavano inversamente le formule

$$\rho = \frac{1}{R} = \left(\frac{sen^2\theta\, cos^2\psi}{a} + \frac{sen^2\theta\, sen^2\psi}{b} + \frac{cos^2\theta}{c}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$l = \frac{1}{\rho}\,(a\, sen^2\theta\, cos^2\psi + b\, sen^2\theta\, sen^2\psi + c\, cos^2\theta)^{\frac{1}{2}},$$

$$tang\,\omega = \sqrt{\frac{a}{b}}\, tang\,\psi, \quad tang\,\gamma = \sqrt{\frac{c}{ab}}\, tang\,\theta\,(a\, sen^2\psi + b\, cos^2\psi)^{\frac{1}{2}},$$

$$d\omega = \frac{\sqrt{ab}\, d\psi}{a\, sen^2\psi + b\, cos^2\psi}, \quad sen\gamma\, d\gamma = \frac{sen\theta\, d\theta}{ab\,\rho^3\sqrt{c}}(a\, sen^2\psi + b\, cos^2\psi).$$

Ponendo per brevità $\alpha_1^2 = b\, sen^2\theta + c\, cos^2\theta$, $\beta_1^2 = a\, sen^2\theta + c\, cos^2\theta$, $\alpha^2 = ab\, cos^2\theta + bc\, sen^2\theta$, $\beta^2 = ab\, cos^2\theta + ac\, sen^2\theta$ si traggono

$$l = \frac{1}{\rho}\,(\alpha_1^2\, sen^2\psi + \beta_1^2\, cos^2\psi)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho^2 = \frac{1}{abc}\,(\alpha^2 cos^2\psi + \beta^2 sen^2\psi),$$

$$d^2 T_2 = \frac{1}{\sqrt{abc}}\,\frac{sen\theta\, d\theta\, d\psi}{\alpha_1^2\, sen^2\psi + \beta_1^2\, cos^2\psi},$$

$$d^2 T_3 = \frac{\sqrt{abc}\; sen\theta\, d\theta\, d\psi}{(\alpha_1^2\, sen^2\psi + \beta_1^2\, cos^2\psi)\,(\alpha^2 cos^2\psi + \beta^2 sen^2\psi)},$$

riducibile alla forma $\left[\frac{M}{\alpha^2 cos^2\psi + \beta^2 sen^2\psi} + \frac{N}{\alpha_1^2 sen^2\psi + \beta_1^2 cos^2\psi}\right] sen\theta\, d\theta\, d\psi$; onde facilmente si ottengono $M = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2\alpha_1^2 - \beta^2\beta_1^2}$, $N = \frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{\alpha^2\alpha_1^2 - \beta^2\beta_1^2}$, e per i surriferiti valori deduconsi

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\,c\,(a-b)\, sen^2\theta, \quad \alpha_1^2 - \beta_1^2 = -\,(a-b)\, sen^2\theta,$$

$$\alpha^2\alpha_1^2 - \beta^2\beta_1^2 = -\,(a-b)\, sen^2\theta\,[c\,(a+b)\, sen^2\theta + (c^2+ab)\, cos^2\theta].$$

Se integriamo d^2T_2, d^2T_3 rispetto a ψ fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, a motivo di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\alpha_1^2\, sen^2\psi + \beta_1^2\, cos^2\psi} = \frac{\pi}{2\,\alpha_1\beta_1}$ ne risultano i primi differenziali

$$d\,T_2 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{abc}}\,\frac{sen\theta\, d\theta}{\alpha_1\beta_1}, \quad d\,T_3 = \frac{\pi}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{M}{\alpha\beta} + \frac{N}{\alpha_1\beta_1}\right) sen\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}(dU + dV);$$

avendo posto $dU = \frac{M\, sen\theta\, d\theta}{\alpha_1\beta_1} = \frac{sen\theta\, d\theta}{\alpha_1\beta_1\,[c\,(a+b)\, sen^2\theta + (c^2+ab)\, cos^2\theta]}$,

$$dV = \frac{N\, sen\theta\, d\theta}{\alpha\beta} = -\,\frac{c\, sen\theta\, d\theta}{\alpha\beta\,[c\,(a+b)\, sen^2\theta + (ab+c^2)\, cos^2\theta]}.$$

Mediante la sostituzione $cos\theta = \frac{a\, sen\, t}{\sqrt{a^2-c^2}}$ nei differenziali dT_2, dU, e mutando a, b, c nei loro quadrati, si trovano $\alpha_1 = b\,\Delta t$, $\beta_1 = a\, cos\, t$

col modulo $h_1 = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$. Integrando i detti differenziali rispetto a t ed osservando come ai limiti $0, \frac{\pi}{2}$ di θ corrispondano $\mu, 0$ per i limiti di t sendo $\mu = arc\cos\frac{c}{a}$ si deducono (6) $T_2 = \frac{\pi}{2ab^2c\sqrt{a^2-c^2}} F(\mu, h_1)$,

$$(7)\ U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,\theta\, d\theta}{\alpha_1\beta_1 [c^2(a^2+b^2)sen^2\theta + (c^4+a^2b^2)\cos^2\theta]} =$$

$$= \frac{1}{c^2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\mu}\frac{dt}{(1+n\,sen^2 t)\Delta t} = \frac{1}{b(a^2+b^2)\sqrt{a^2-c^2}}\Pi(\mu, n, h_1)$$

con $n = \frac{a^2(b^2-c^2)}{c^2(a^2+b^2)}$. Per l'altro differenziale dV si operi la sostituzione $\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}tang\,t$ e si troveranno

$$\alpha = \frac{bc}{\cos t},\ \beta = \frac{ac\Delta t}{\cos t},\ \Delta t = (1-h^2sen^2t)^{\frac{1}{2}},\ h = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

$$n_1 = -\left(\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}\right),\ dV = \frac{dt\cos^2 t}{abc(a^2+b^2)\sqrt{a^2-c^2}(1+n_1 sen^2 t)\Delta t},$$

da cui si conchiude

$$(8)\ V = \frac{b^2-c^2}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)abc\sqrt{a^2-c^2}}\Pi(\mu, h, n_1) - \frac{F(\mu, h)}{abc(a^2+c^2)\sqrt{a^2-c^2}},$$

ed in virtù delle precedenti formule (9) $T_3 = \frac{\pi}{2}abc(U+V)$; dunque risulta

$$(10)\ S' = 4\pi k^2 + 2\pi\frac{b^2c^2}{a^2} + 2\pi\frac{a^4}{\sqrt{a^4-c^4}}[sen^2\mu'\, E(\mu', h') + \cos^2\mu' F(\mu', h')] +$$

$$+ 8\pi\frac{bc}{a}k + 8\pi\frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}}[\cos^2\mu\, F(\mu, h) + sen^2\mu\, E(\mu, h)] +$$

$$+ 4\pi\frac{ack}{\sqrt{a^2-c^2}}F(\mu, h) - 4\pi k\frac{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{\sqrt{a^2-c^2}}\times$$

$$\times\left[\frac{a\,\Pi(\mu, h, n)}{c(a^2+b^2)} - \frac{(b^2-c^2)\Pi(\mu, h, n_1)}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)} + \frac{F(\mu, h)}{a^2+c^2}\right].$$

69. — Per la superficie parallela al paraboloide ellittico $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ limitata alla curva isoclina che si proietta sul piano xOy secondo l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cot^2\omega$ (pag. 182), basterà fare le sostituzioni $x = a\cot\omega\cos\psi$, $y = b\cot\omega\, sen\psi$; onde a motivo delle derivate parziali $p = \frac{x}{a} = -\frac{\cos\theta}{sen\theta\, sen\varphi}$,

$q = \frac{y}{b} = -\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$ (pag. 185) si hanno l'eguaglianze $\cos\theta = \cos\omega \cos\psi$, $\cot\varphi = \cot\omega \operatorname{sen}\psi$, e perciò mutando le variabili indipendenti θ, φ nelle nuove ω, ψ risulta $\operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = \cos\omega \, d\psi \, d\omega$. Come pure l'equazione (7) della pag. 185 determina fra i raggi principali ρ_1, ρ_2 di curvatura le relazioni

$$\rho_1 + \rho_2 = (a + b + 2z) \frac{z}{P}, \quad \rho_1 \rho_2 = a b \left(\frac{z}{P}\right)^4,$$

ed essendo $P = - z \operatorname{sen}\omega$, $2z = \cot^2\omega (a \cos^2\psi + b \operatorname{sen}^2\psi)$ si ottiene

$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho_1 + \rho_2) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a + b + a \cot^2\omega \cos^2\psi + b \cot^2\omega \operatorname{sen}^2\psi) \cot\omega \, d\psi \, d\omega =$$

$$= -2(a+b)\pi \log \operatorname{sen}\omega - (a+b)\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \cot^3\omega \, d\omega;$$

ovvero per l'identità $\int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \log \operatorname{sen} x$, la precedente si ridurrà ad $S = (a+b)\pi \left(\frac{1}{2}\cot^2\omega - \log \operatorname{sen}\omega\right)$, ed il valore di ω è compreso fra i limiti $\frac{\pi}{2}$, π; dunque in virtù della (13), pag. 192, e del n. 61, la quadratura della superficie parallela al paraboloide ellittico è

$$\frac{2}{3}\pi ab \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3\omega} - 1\right) + k(a+b)\pi \left(\log \operatorname{sen}\omega - \frac{1}{2}\cot^2\omega\right) - 2\pi k^2 (1 - \operatorname{sen}\omega).$$

70. — La superficie S del paraboloide ellittico $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ racchiusa fra i piani $z = 0$, $z = h$ normali all'asse si esprime con integrali ellittici completi. Infatti l'elemento infinitesimale (1) $d^2S = 4\,dx\,dy \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ integrato rispetto ad x fra i limiti 0 ed $x = \sqrt{a\left(2h - \frac{y^2}{b}\right)}$, mediante la nota formula $\int dx \sqrt{m + x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{m + x^2} + \frac{m}{2}\log(x + \sqrt{m + x^2})$ diviene

$$dS = 2x\,dy\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2a\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) dy \log\left[\frac{x}{a\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)}}\right];$$

da cui supposto $b > a$ e fattovi $x = \sqrt{2ha}\cos\varphi$, $y = \sqrt{2hb}\,sen\varphi$, $k^2 = \frac{2h(b-a)}{b(a+2h)}$, $n = \frac{2h}{b}$ si deduce la trasformata

$$dS = 4h\sqrt{b(a+2h)}\cos^2\varphi\,\Delta\varphi\,d\varphi + 2a\sqrt{2bh}\,(1+n\,sen^2\varphi)\times$$
$$\times\cos\varphi\,\log\left[\frac{\cos\varphi\sqrt{2h}}{\sqrt{a(1+n\,sen^2\varphi)}} + \sqrt{1+\frac{2h\cos^2\varphi}{a(1+n\,sen^2\varphi)}}\right]d\varphi.$$

Integrando per parti il secondo termine, si osserva il differenziale della quantità logaritmica ridursi all' espressione

$$-\left(1+\frac{2h}{b}\right)\sqrt{\frac{2h}{a+2h}}\cdot\frac{sen\varphi\,d\varphi}{(1+n\,sen^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

e quindi verrà

$$S = 4h\sqrt{b(a+2h)}\int\cos^2\varphi\,\Delta\varphi\,d\varphi +$$
$$+ 2a\sqrt{2bh}\,sen\varphi\left(1+\frac{n\,sen^2\varphi}{3}\right)\log\left[\frac{\cos\varphi\sqrt{2h}}{\sqrt{1+n\,sen^2\varphi}} + \sqrt{1+\frac{2h\cos^2\varphi}{a(1+n\,sen^2\varphi)}}\right] +$$
$$+\frac{4}{3}\frac{h(b+2h)a}{\sqrt{b(a+2h)}}\left[\int sen^2\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{2}{n}\int\frac{d\varphi}{(1+n\,sen^2\varphi)\,\Delta\varphi} + \frac{2}{n}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right].$$

Applicando gl' integrali $\int\cos^2\varphi\,\Delta\varphi\,d\varphi = \frac{1+k^2}{3k^2}E\varphi - \frac{(1-k^2)}{3k^2}F\varphi + \frac{1}{3}sen\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi$, $\int sen^2\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{F\varphi - E\varphi}{k^2}$, il valore di S preso fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$ attribuiti alla variabile φ, con brevi riduzioni diviene

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{b(a+2h)}\left[2h\,E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) + a\left(\frac{b+2h}{a+2h}\right)\left(F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) - \Pi\left(k,n,\frac{\pi}{2}\right)\right)\right].$$

Se il paraboloide sia di rivoluzione, a motivo di $b = a$, si ha $k = 0$, gl' integrali completi $E\frac{\pi}{2}$, $F\frac{\pi}{2}$ prendono il valor comune $\frac{\pi}{2}$, e $\Pi\frac{\pi}{2}$ si riduce a $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+n\,sen^2\varphi} = \frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}$; onde la superficie del paraboloide di rivoluzione racchiusa fra i piani $z = 0$, $z = h$ sarà misurata dal circolo $S = \frac{2}{3}\pi a^{\frac{1}{2}}\left[(2h+a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right]$.

Il professor Tortolini, nel tomo IV della prima serie degli *Annali di Matematica*, ottenne con più facilità la quadratura del paraboloide ellittico, mutando nella formula $\frac{1}{4}d^2S = dx\,dy\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ le variabili indipendenti x, y in altre due r, φ legate con le prime mediante

l'eguaglianze $x = r \sqrt{2ah} \cos\varphi$, $y = r \sqrt{2bh} \operatorname{sen}\varphi$; ed a motivo del determinante $\frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{dr} = 2rh\sqrt{ab}$ si avrà

$$\frac{1}{4} d^2 S = 2rh\, dr\, d\varphi \left[ab + 2hr^2 (b \cos^2\varphi + a \operatorname{sen}^2\varphi)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Scrivendo per brevità $u = 2h(b\cos^2\varphi + a \operatorname{sen}^2\varphi)$, ed integrando rispetto ad r fra i limiti zero ed uno corrispondenti al vertice del paraboloide e la sezione $z = h$, risulta $\frac{1}{4} dS = 2h\, d\varphi \int_0^1 r\, dr\, (ab + r^2 u)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{2}{3} h\, d\varphi \left[\frac{(ab+u)^{\frac{3}{2}} - (ab)^{\frac{3}{2}}}{u}\right] = \frac{2}{3} h\, d\varphi \left[\frac{(ab+u)^2}{u\sqrt{ab+u}} - \frac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{u}\right] =$$

$$= \frac{2}{3} h\, d\varphi \left[\frac{a^2 b^2}{u\sqrt{ab+u}} + \frac{ab}{\sqrt{ab+u}} + \sqrt{ab+u} - \frac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{u}\right];$$

supponendo $b > a$ saranno le quantità $u = 2hb(1 + n' \operatorname{sen}^2\varphi)$, $\sqrt{ab+u} = \sqrt{b(a+2h)} \,.\, \Delta\varphi$; dove si hanno il parametro $n' = -\left(\frac{b-a}{b}\right)$; ed il quadrato del modulo $k^2 = \frac{2h(b-a)}{b(a+2h)}$. Sostituendo le precedenti espressioni, si ricava integrando, rispetto a φ fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$,

$$S = \frac{4a^2 b}{3\sqrt{b(a+2h)}} \Pi\left(k, n', \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8abh}{3\sqrt{b(a+2h)}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ \frac{8}{3} h \sqrt{b(a+2h)}\, E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3}\pi a b.$$

Paragonando quest'espressione a quella ottenuta precedentemente, ne risulterà una formula di Legendre.

71. — La superficie del cono avente per base l'ellisse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0\right)$ ed il vertice V nel punto (α, β, γ) si decompone in triangoli infinitesimi, ciascuno dei quali è formato da due generatrici consecutive e dall'elemento ellittico ds; ponendo $x = a\cos\varphi, y = b \operatorname{sen}\varphi$ si ha $ds = d\varphi \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$, e siccome nel piano xOy la tangente alla base ha per equazione $bx\cos\varphi + ay \operatorname{sen}\varphi = ab$, il punto V_1 di coordinate $(\alpha, \beta, 0)$ disterà da essa del segmento $V_1 P_1 = \pm \frac{(b\alpha\cos\varphi + a\beta \operatorname{sen}\varphi - ab)}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$, l'altezza h del detto triangolo sarà $VP_1 = \sqrt{VV_1^2 + V_1 P_1^2}$, onde sostituiti i precedenti valori di $V_1 P_1$ e $VV_1 = \gamma$ si avrà l'elemento infinitesimale della superficie

$$(1) \quad dS = \frac{h}{2} ds = \frac{1}{2} d\varphi \left[(a^2 \operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\gamma^2 + (b\alpha\cos\varphi + a\beta \operatorname{sen}\varphi - ab)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{ab\gamma}{2P} d\varphi,$$

dove P simboleggia la distanza dell' origine dal piano tangente

$$(bx\cos\varphi + ay\,sen\,\varphi)\gamma = (b\alpha\cos\varphi + a\beta\,sen\,\varphi - ab)z.$$

Alla stessa formula (1) si giungerebbe se il vertice del cono fosse l'origine e la base ellittica $\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = 1$ situata sul piano $z=\gamma$. Mediante la sostituzione $tang\,\frac{1}{2}\,\varphi = t$ la (1) assume la forma

$$(2)\quad dS = \frac{dt}{(1+t^2)^2}\sqrt{T},\quad \text{essendo}\quad T = A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4\,;$$

in cui i coefficienti hanno i valori $A_0 = b^2(\gamma^2 + (a+\alpha)^2)$, $A_1 = -4ab\beta(a+\alpha)$, $A_2 = 4a^2(\beta^2+\gamma^2) - 2b^2(\gamma^2+\alpha^2) + 2a^2b^2$, $A_3 = -4ab\beta(a-\alpha)$, $A_4 = b^2(\gamma^2 + (a-\alpha)^2)$; dunque *la superficie di ogni cono avente per base un' ellisse è quadrabile con integrali ellittici* (*).

Le rette g, g', congiungenti i vertici della base ellittica situati sull' asse Ox con il vertice V del cono, sono date per $g^2 = \gamma^2 + (a+\alpha)^2$, $g'^2 = \gamma^2 + (a-\alpha)^2$; onde ne conseguono le relazioni

$$(3)\quad g^2 + g'^2 = 2(a^2+\alpha^2+\gamma^2),\quad g^2 - g'^2 = 4a\alpha,\quad g^2g'^2 = (a^2+\alpha^2+\gamma^2)^2 - 4a^2\alpha^2,$$
$$16a^2\gamma^2 = 4g^2g'^2 - (g^2+g'^2-4a^2)^2,$$

e detto V l'angolo formato dalle due generatrici g, g' si trova facilmente essere (4) $a^2 = \left(\frac{g-g'}{2}\right)^2 + gg'\,sen^2\frac{V}{2} = \left(\frac{g+g'}{2}\right)^2 - gg'\cos^2\frac{V}{2}$.

Rispetto alla quadratura si distinguono i casi particolari:

1° Il cono ellittico retto, ovvero $\alpha = \beta = 0$; dalla (1) si ricava

$$(5)\quad S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,[a^2(b^2+\gamma^2) - (a^2-b^2)\gamma^2\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}} = 2a\sqrt{b^2+\gamma^2}\,E\,\frac{\pi}{2}$$

con il modulo $k = \frac{\gamma}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\gamma^2}}$, e similmente la (2) si riduce ad

$$S = 4b\sqrt{a^2+\gamma^2}\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}(t^4+2pt^2+1)^{\frac{1}{2}},\ \text{in cui}\ p = \frac{2(a^2-b^2)\gamma^2}{b^2(a^2+\gamma^2)} + 1,$$

(*) Vedi *Mémoire sur la surface du cone elliptique, par le D.r J. Dienger*, inserita nel tomo II degli *Annali* del. Tortolini, anno 1851. Se la base fosse l'iperbole definita dalle coordinate $x = a\cos hu$, $y = b\,sen\,hu$ si troverebbe l'espressione

$$S = \frac{1}{2}\int_0^u du\,[\gamma^2(a^2 sen^2 hu + b^2\cos^2 hu) + (b\alpha\cos hu - a\beta\,sen\,hu - ab)^2],$$

ed introducendo la variabile $t_1 = tang\,h\,\frac{u}{2}$ si trasformerebbe in $S = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\frac{dt_1}{(1-t_1^2)^2}\sqrt{T_1}$, dove $T_1 = A_0' t^4 + A_1' t^3 + A_2' t^2 + A_3' t + A_4'$ con i valori $A_0' = b^2[\gamma^2 + (a+\alpha)^2]$, $A_1' = -4ab\beta(a+\alpha)$, $A_2' = 4a^2(\gamma^2+\beta^2) + 2b^2(\gamma^2+\alpha^2) - 2a^2b^2$, $A_3' = 4ab\beta(a-\alpha)$, $A_4' = b^2[\gamma^2 + (a-\alpha)^2]$.

e quindi per il confronto ne consegue la notevole relazione

$$(6) \quad \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}(1+2pt^2+t^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2k_1} E\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

dove $p = 2\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 + 1$ e $k_1 = \sqrt{1-k^2}$.

2° Il vertice V del cono giace sul piano xOz, cioè $\beta = 0$, e fatto per brevità $A = b^2\alpha^2 - c^2\gamma^2$, $B = a\alpha b^2$, $C = a^2(b^2+\gamma^2)$, $c^2 = a^2 - b^2$, la formula (1) si potrà scrivere (7) $dS = \frac{1}{2} d\varphi (A \cos^2\varphi - 2B\cos\varphi + C)^{\frac{1}{2}}$; il trinomio racchiuso in parentesi ha per suo determinante

$$B^2 - AC = a^2\gamma^2(c^2\gamma^2 - b^2\alpha^2 + b^2c^2).$$

Se questo ha un valor nullo, il punto V giace sull'iperbole

$$\left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \ y = 0\right),$$

i cui vertici e fuochi sono respettivamente i fuochi ed i vertici della base ellittica, onde $\pm(g - g') = 2c$, e (8) $dS = \frac{b}{2} d\varphi \left(\frac{a\alpha}{c} - c\cos\varphi\right)$, ne risulta la superficie $S = \frac{b}{2c}(a\alpha\varphi - c^2 \operatorname{sen}\varphi) + costante$; valutandola prima fra i limiti $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ e poi fra i limiti $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ si avranno i segmenti $S_1 = \frac{\pi a b}{2c}\alpha - bc$, $S_2 = \frac{\pi a b}{2c}\alpha + bc$, nei quali è divisa la superficie conica dal piano menato per il suo vertice V e l'asse minore della base; onde la lor differenza è esattamente quadrabile. In questo caso il cono è di rotazione; infatti la superficie conica avente il vertice nello stesso punto $V(\alpha, 0, \gamma)$ circoscritta alla sfera di raggio r, ed il cui centro è situato sull'asse Oz alla distanza z_0 dall'origine, ha per equazione

$$\left(x^2+y^2+(z-z_0)^2-r^2\right)\left(\alpha^2+(\gamma-z_0)^2-r^2\right) = [\alpha x + (\gamma - z_0)(z-z_0) - r^2]^2;$$

onde segherà il piano xOy secondo una conica la quale coincide con l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, purchè siano soddisfatte le condizioni

$$z_0(\gamma - z_0) + r^2 = 0, \quad r^2 - z_0^2 = b^2, \quad b^2[\alpha^2 + (\gamma - z_0)^2 - r^2] = a^2[(\gamma - z_0)^2 - r^2];$$

dalle prime due ricavando $z_0 = -\frac{b^2}{\gamma}$, $r = \frac{b^2\alpha}{c\gamma}$ a motivo del determinante nullo, sostituendoli nella terza eguaglianza, questa risulta verificata; sendo il luogo del vertice la surriferita iperbole $\left(\frac{\alpha^2}{c^2} - \frac{\gamma^2}{b^2} = 1, \ \beta = 0\right)$.

Se inoltre il vertice V giaccia sopra uno degli asintoti $\gamma = \pm \frac{b\alpha}{c}$, la costante A ha un valore nullo, l'elemento della superficie diviene $dS = \frac{1}{2} d\varphi\, (C - 2B\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$, e posto $\varphi = \pi - 2\theta$ si deduce

$$S = 2\sqrt{C + 2B} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(1 - \frac{4B}{C+2B}\, sen^2\theta\right)^{\frac{1}{2}};$$

la quantità positiva $\frac{4B}{C+2B}$ è minore di uno, poichè la differenza $(C+2B) - 4B = a^2(b^2+\gamma^2) - 2abc\gamma$ è maggiore di zero in virtù delle due diseguaglianze $a > c$, $b^2 + \gamma^2 > 2b\gamma$, e così la superficie conica si misura con (9) $S = \frac{4ab}{k}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\, E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, dove il modulo è $k = 2\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + 2\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Quando il determinante $B^2 - AC$ abbia un valor negativo, il vertice V cade nell'interno dell'iperbole $\left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,\ y = 0\right)$, e la differenza delle sue distanze g, g' dai fuochi della base ellittica supera il segmento $2c$. Nell'espressione $dS = \frac{1}{2} d\varphi\, (A\cos^2\varphi - 2B\cos\varphi + C)^{\frac{1}{2}}$ si faccia la sostituzione $\cos\varphi = \frac{u - v\cos\theta}{v - u\cos\theta}$ con u, v costanti arbitrarie e si cerchi di ridurre il numeratore della trasformata sotto radicale, ad esser privo del termine lineare rispetto a $\cos\theta$; scrivendo $u_1 = Au^2 + Cv^2 - 2Buv$, $v_1 = Av^2 + Cu^2 - 2Buv$ si trova $dS = -\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{2(v - u\cos\theta)^2}\, d\theta\, (u_1 + v_1\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}$ insieme con la condizione $(A + C)uv = B(u^2 + v^2)$, che si può scindere nelle due $uv = B = ab^2\alpha$, $u^2 + v^2 = A + C = b^2(a^2 + \alpha^2 + \gamma^2)$. Supposta la quantità v maggiore della u, dalle precedenti relazioni e dalle (3) risultano $v = \frac{b}{2}(g + g')$, $u = \frac{b}{2}(g - g')$, $\sqrt{u_1 + v_1} = v^2 - u^2 = b^2 gg'$,

$$u_1 - v_1 = (A - C)(u^2 - v^2) = b^2 gg'\left(2a^2b^2 + 2a^2\gamma^2 - \frac{b^2}{2}(g^2 + g'^2)\right),$$

$$v_1 = \frac{b^2}{4} gg'\,[b^2(g+g')^2 - 4a^2b^2 - 4a^2\gamma^2] = \frac{b^2}{16} gg'\,[(g+g')^2 - 4a^2]\,[(g-g')^2 - 4c^2],$$

che ha un valor positivo in virtù dell'ipotesi $g - g' > 2c$. Inoltre, fatto $h = \frac{u}{v} = \frac{g - g'}{g + g'}$, $m = \frac{b(gg')^{\frac{3}{2}}}{(g + g')^2}$ ed il modulo $k = \sqrt{\frac{v_1}{u_1 + v_1}} = \cos\frac{V}{2}\left(1 - \frac{gg'}{b^2}\, sen^2\frac{V}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, l'elemento infinitesimale della superficie prenderà la semplice forma $dS = \frac{m\, d\theta\, \Delta\theta}{2(1 - h\cos\theta)^2}$ da integrarsi fra i li-

miti $0, \pi$ corrispondenti ai limiti $\pi, 0$ dell'angolo φ dati da $\cos\theta = \frac{h - \cos\varphi}{1 - h\cos\varphi}$, onde ottenere la metà della superficie conica, e perciò

$$S = m \int_0^\pi \frac{d\theta\,\Delta\theta}{(1 - h\cos\theta)^2} = m \int_0^\pi \frac{d\theta}{\Delta\theta} \frac{(1 - k^2 + k^2\cos^2\theta)}{(1 - h\cos\theta)^2}.$$

Decomponendo questa frazione razionale rispetto a $\cos\theta$ nella somma di frazioni semplici si avrà

$$\frac{S}{m} = \frac{k^2}{h^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\Delta\theta} - \frac{2k^2}{h^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 - h\cos\theta)\Delta\theta} + \left(1 - k^2 + \frac{k^2}{h^2}\right) \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 - h\cos\theta)^2 \Delta\theta};$$

ora il primo termine è doppio di F_1 integrale ellittico completo di prima specie, il secondo equivale alla somma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 - h\cos\theta} + \frac{1}{1 + h\cos\theta}\right) \frac{d\theta}{\Delta\theta} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - h^2\cos^2\theta)\Delta\theta} = 2(n+1)\Pi_1,$$

avendo significato con Π_1 l'integrale completo ellittico di terza specie dello stesso modulo k e di parametro $n = \frac{h^2}{1 - h^2} = \frac{(g - g')^2}{4gg'}$. Parimente il terzo integrale contenuto nel valore di $\frac{S}{m}$ si trasforma in

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 - h\cos\theta)^2 \Delta\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{(1 - h\cos\theta)^2} + \frac{1}{(1 + h\cos\theta)^2}\right] \frac{d\theta}{\Delta\theta} =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + h^2\cos^2\theta)}{(1 - h^2\cos^2\theta)^2} \frac{d\theta}{\Delta\theta} = 4(n+1)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + n\,sen^2\theta)^2 \Delta\theta} - 2(n+1)\Pi_1;$$

applicando l'identità

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + n\,sen^2\theta)^2 \Delta\theta} = \frac{k^2}{n + k^2} \Pi\,\theta + \frac{n}{n + k^2} \int_0^\theta \frac{d\theta\,\Delta\theta}{(1 + n\,sen^2\theta)^2}$$

e la formula (3) del paragrafo 57 risultano le seguenti

$$2(n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + n\,sen^2\theta)^2 \Delta\theta} = \left(n + 2 + \frac{(n+1)k^2}{n + k^2}\right) \Pi_1 + \frac{n E_1}{n + k^2} - F_1,$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 - h\cos\theta)^2 \Delta\theta} = 2(n+1)^2 \left(1 + \frac{k^2}{n + k^2}\right) \Pi_1 + \frac{2n(n+1)}{n + k^2} E_1 - 2(n+1) F_1;$$

infine, sostituendo quest'integrali nel surriferito valore di $\frac{S}{m}$, si conchiude: *la superficie convessa del cono, il cui vertice giace nell'in-*

terno dell' iperbole $\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ *descritta sul piano normale alla base ellittica e menato per l'asse maggiore di questa, esprimersi per*

$$(10)\quad S_1=2b\sqrt{gg'}\left((n+1)\Pi_1+E_1-F_1\right),$$

dove F_1, E_1, Π_1 *sono gl'integrali ellittici completi di prima, seconda e terza specie.* Per il cono circolare obliquo si farà $b=a$, l'iperbole riducesi all'asse Oz, e la formula (10) coinciderà con quella esposta dal sommo Legendre nel suo *Traité des fonctions elliptiques.*

Infine, se il determinante B^2-AC risulti positivo, il vertice V cadrà all'esterno dell'iperbole $\left(\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,\ y=0\right)$ e la differenza fra gli apotemi g, g' sarà minore di $2c$; eseguendo le surriferite sostituzioni e trasformate, la costante v_1 acquistando un valor negativo, basterà mutare k^2 in $-k^2$, ed in virtù degl'integrali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+k^2 sen^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{k^2}{1+k^2}cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{1+k^2sen^2\varphi}=\sqrt{1+k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}cos^2\varphi},$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(1+n\,sen^2\varphi)\sqrt{1+k^2sen^2\varphi}}=\frac{1}{(1+n)\sqrt{1+k^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{n}{1+n}cos^2\varphi\right)\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}cos^2\varphi}}$$

ne consegue potersi ottenere la relativa formula della superficie dalla (10) sostituendo in questa ai simboli E_1, F_1, Π_1 le rispettive espressioni

$$\sqrt{1+k^2}\,E\left(k_0,\frac{\pi}{2}\right),\quad \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}F\left(k_0,\frac{\pi}{2}\right),\quad \frac{1}{(1+n)\sqrt{1+k^2}}\Pi\left(k_0,n_0,\frac{\pi}{2}\right),$$

dove il modulo k_0 ed il parametro n_0 sono legati con il modulo k, ed il parametro n mediante l'eguaglianze $k_0=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ ed $n_0=-\frac{n}{1+n}$; ne viene in questo caso la superficie conica misurata per

$$(11)\quad S=\frac{2b\sqrt{gg'}}{\sqrt{1-k_0^2}}\left[(1-k_0^2)\left(\Pi\left(k_0,n_0,\frac{\pi}{2}\right)-F\left(k_0,\frac{\pi}{2}\right)\right)+E\left(k_0,\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

col modulo $k_0=cot\frac{V}{2}\left(\frac{g\,g'sen^2\frac{V}{2}-b^2}{g\,g'cos^2\frac{V}{2}+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ e il parametro $n_0=-\left(\frac{g-g'}{g+g'}\right)^2$.

Un caso notevole succede allorquando il vertice del cono sia sull'iperbole coniugata $\left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1,\ y = 0\right)$: le radici del trinomio $A\cos^2\varphi - 2B\cos\varphi + C$ nella (1) hanno valori reali e di segno opposto; i coefficienti si esprimono in funzione di a, b, α, cioè

$$A = -b^2 c^2,\quad B = b^2 a\,\alpha,\quad C = a^2(b^2 + \gamma^2) = \frac{a^2 b^2}{c^2}(\alpha^2 + 2c^2);$$

i valori assoluti delle radici essendo

$$x_1 = \frac{a}{c^2}\left(\alpha + \sqrt{2(c^2+\alpha^2)}\right),\quad x_2 = \frac{a}{c^2}\left(\sqrt{2(\alpha^2+c^2)} - \alpha\right),$$

l'infinitesimo della superficie conica acquisterà la forma

$$dS = \frac{1}{2}\, b\, c\, d\varphi\, \sqrt{(x_1 + \cos\varphi)(x_2 - \cos\varphi)}.$$

Mediante la sostituzione $\cos\varphi = \frac{\cos^2\theta - \lambda\,sen^2\theta}{\cos^2\theta + \lambda\,sen^2\theta}$ con λ parametro arbitrario, si potrà ridurre il numeratore di $x_2 - \cos\varphi$ ad esser indipendente da θ, scrivendo $\lambda = \frac{x_2-1}{x_2+1}$; onde il differenziale della superficie, a motivo di $d\varphi = \frac{2\sqrt{\lambda}\,d\theta}{\cos^2\theta + \lambda\,sen^2\theta}$, diverrà $dS = bc(x_2-1)\sqrt{\frac{x_1+1}{x_2+1}}\,\frac{d\theta\,\Delta\theta}{(1-n\,sen^2\theta)^2} =$ $= 2\,bc\,(1-n)\sqrt{\frac{1-n}{n(k^2-n)}}\,\frac{d\theta\,\Delta\theta}{(1-n\,sen^2\theta)^2}$, dove $n = 1 - \lambda = \frac{2}{1+x_2}$, e $k^2 = \frac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)} < 1$, poichè a motivo di $\sqrt{2(c^2+\alpha^2)} > c + \alpha > \frac{c^2}{a} + \alpha$ i valori di x_2, x_1 superano l'unità, e quindi dalla diseguaglianza $(x_1-1)(x_2-1) > 0$ si ricava $(1+x_1)(1+x_2) > 2(x_1+x_2)$. Applicando la formula (3) del paragrafo 57 risulta

$$(12)\quad S = 4\,bc\sqrt{\frac{1-n}{n(k^2-n)}}\left[-E_1 + \left(1-\frac{k^2}{n}\right)F_1 - \left(2-n-\frac{k^2}{n}\right)\Pi_1\right].$$

Se il vertice del cono giaccia sul piano yOz, fatto $\alpha = 0$, la formula fondamentale (1) si riduce a $dS = \frac{1}{2}\,d\varphi\,(A_1 sen^2\varphi - 2B_1 sen\,\varphi + C_1)^{\frac{1}{2}}$ insieme con i coefficienti $A_1 = c^2\gamma^2 + a^2\beta^2$, $B_1 = a^2 b\,\beta$, $C_1 = b^2(a^2+\gamma^2)$ e il determinante $B_1^2 - A_1 C_1 = -b^2\gamma^2(a^2c^2 + a^2\beta^2 + c^2\gamma^2)$. L'espressione della superficie può dedursi dalla (10), purchè in questa si mutino le grandezze a, c^2, α nelle respettive b, $-c^2$, β, l'angolo φ nel suo complemento e gli apotemi g, g' negli apotemi l, l' dati per l'eguaglianze $l^2 = \gamma^2 + (b+\beta)^2$, $l'^2 = \gamma^2 + (b-\beta)^2$, l'angolo V nell'angolo V' formato dalle generatrici l, l', e ne risultano il modulo $k = \cos\frac{V'}{2}\left(1 - \frac{ll'}{a^2}sen^2\frac{V'}{2}\right)$ ed il parametro $n = \frac{(l-l')^2}{4ll'}$.

72. — Sviluppando la superficie del cono sopra uno dei suoi piani tangenti, sorge il quesito di trovare l'angolo al vertice dello sviluppo e la curva dell'orlo settoriale che rappresenta l'appianata superficie. Detta ρ la lunghezza di una generatrice VM, raggio vettore dell'orlo, posta l'origine al vertice V e significata con ω l'inclinazione di ρ sulla prima generatrice VA, l'elemento superficiale dello sviluppo è $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega$, da cui si ricava (1) $d\omega = 2\frac{dS}{\rho^2}$; essendo (2) $\rho^2 = \gamma^2 + (a\cos\varphi - \alpha)^2 + (b\,sen\,\beta - \beta)^2$ quadrato della distanza del vertice dal punto $(a\cos\varphi,\ b\,sen\,\varphi,\ 0)$ della base ellittica; col sostituire nella (1) il valore di dS in funzione di φ ed eliminare poi φ, per la (2) si avrà l'equazione differenziale della curva dell'orlo. Così per il cono retto (vedi n. 68) viene $d\omega = \frac{a\,d\varphi\,(1-k^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b^2+\gamma^2}\,(1+n\cos^2\varphi)}$ insieme a $k = \frac{\gamma}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\gamma^2}}$, $n = \frac{a^2-b^2}{b^2+\gamma^2}$, ed integrando si trova (2) $\omega = \frac{a^2+\gamma^2}{a\sqrt{b^2+\gamma^2}}\,\Pi_1 - \frac{\gamma^2}{a\sqrt{b^2+\gamma^2}}\,F_1$. Se il cono di rotazione abbia il suo vertice sull'iperbole $\left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,\ y = 0\right)$, il raggio vettore ha la forma razionale $\rho = \frac{a\alpha}{c} - c\cos\varphi$; e risultando $2dS = b\,d\varphi\left(\frac{a\alpha}{c} - c\cos\varphi\right)$ si otterrà $d\omega = \frac{b\,d\varphi}{\frac{a\alpha}{c} - c\cos\varphi}$; inoltre, dalle relazioni $g - g' = 2c$, $g^2 - g'^2 = 4a\alpha$, ne consegue $g + g' = 2\frac{a\alpha}{c}$, e dalla eguaglianza $a^2 = \left(\frac{g-g'}{2}\right)^2 + gg'sen^2\frac{V}{2}$ si trae $b^2 = gg'sen^2\frac{V}{2}$. Il differenziale precedente assume la forma $d\omega = sen\frac{V}{2}\,\frac{\sqrt{gg'}\,d\varphi}{\frac{g+g'}{2} - \left(\frac{g-g'}{2}\right)\cos\varphi}$, e per la sostituzione $tang\frac{\varphi}{2} = u$ è integrabile; posto $sen\frac{V}{2} = h$ risulta

$$\frac{\omega}{h} = 2\,arc\,tang\left(tang\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{g}{g'}}\right),\ \text{ovvero}\ \cos\frac{\omega}{h} = \frac{g' - g\,tang^2\frac{\varphi}{2}}{g' + g\,tang^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{g' - g + (g'+g)\cos\varphi}{g' + g + (g'-g)\cos\varphi};$$

ed a motivo di $\rho = \frac{g+g'}{2} - \left(\frac{g-g'}{2}\right)\cos\varphi$ si ottiene $\rho = \frac{2gg'}{g + g' + (g'-g)\cos\frac{\omega}{h}}$, equazione polare dell'orlo, curva algebrica nel caso di h razionale; così per $V = \frac{\pi}{3}$ viene $h = \frac{1}{2}$, e si trova $\left(\frac{x^2}{g'} + \frac{y^2}{g}\right)^2 = x^2 + y^2$, trasformata

dell'ellisse descritta con gli assi $2b = \sqrt{gg'}$, $2a = (g^2 + g'^2 - gg')^{\frac{1}{2}}$. Per ulteriore svolgimento veggasi la memoria del dottor Schwering nello *Zeitschrift* di Sclömilch, anno 1880, pag. 234.

73. — Nell'iperboloide ad una falda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ la pedale delle normali isocline (n. 61) si proietta sul piano xOy secondo la conica $\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\,tang^2\omega\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\,tang^2\omega\right) = 1$, la quale per i valori di a minori di b e di $tang^2\omega \leqq \frac{a^2}{c^2}$ sarà un'ellisse od una coppia di rette parallele. Se l'angolo ω sia definito dall'eguaglianza $\frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\,tang^2\omega\right) = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\,tang^2\omega\right)$, cioè $tang\,\omega = \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2}}$, l'ellisse proiezione coinciderà con la circonferenza luogo dei vertici degli angoli retti circoscritti alla detta ellisse di gola. Per ottenere la zona iperboloidica Z_0 racchiusa fra il piano xOy e la superficie cilindrica $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, nella formula (7) del num. 61, si porranno $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $C = -\frac{1}{c^2}$, $\alpha = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}}$, $sen\,\nu = \alpha\,sen\,\omega$, dove è $sen\,\omega = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$ per il precedente valore di $tang\,\omega$; onde si deducono

$$tang\,\nu = \frac{b}{ac}\sqrt{a^2+c^2},\quad k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}},\quad \Delta\nu = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}},$$

$$H\nu = \frac{a^4b^2 + a^2b^4 + c^2a^4 + c^2b^4 + a^2b^2c^2}{a\,b^2c^2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{a^2+c^2},$$

$$Z_0 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2+c^2}}\left[c^2 F\nu - (a^2+c^2)\,E\nu + c^2 H\nu\right].$$

La zona compresa fra due curve isocline (φ), (φ') proiettantisi in ellissi sul coordinato xOy viene espressa da

$$Z = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2+c^2}}\left[c^2(F\varphi - F\varphi') - (a^2+c^2)(E\varphi - E\varphi') + c^2(H\varphi - H\varphi')\right],$$

e la differenza $Z_0 - Z$ si ridurrà ad un'area circolare, quando sussisterà la relazione $F\nu = F\varphi - F\varphi'$.

Ogni punto dell'iperboloide ad una falda si può rappresentare con le coordinate $x = a\cos hu\cos\alpha$, $y = b\cos hu\,sen\,\alpha$, $z = c\,sen\,hu$, e quindi le formule (3), (5) del n. 64 danno per la superficie l'espressione

$$S = \int_0^u \int_0^{2\pi} \cos hu\,(a^2b^2sen^2hu + b^2c^2\cos^2hu\cos^2\alpha + c^2a^2\cos^2hu\,sen^2\alpha)^{\frac{1}{2}}\,du\,d\alpha,$$

analoga a quella di Legendre per l'area dell'ellissoide. Facendo $b = a$ ne ricaviamo la superficie dell'iperboloide di rivoluzione

$$S_u = \pi a \left[sen\,hu \sqrt{a^2 cos^2 hu + c^2 sen^2 hu} \right] + \\ + \frac{\pi a c^2}{\sqrt{a^2+c^2}} \log \frac{1}{a} \left(sen\,hu \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{a^2 cos^2 hu + c^2 sen^2 hu} \right),$$

che per l'iperboloide equilatero $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ diviene

$$S_u = \pi a^2 \left[sen\,hu \sqrt{cos\,h 2u} \right] + \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} \log \left(sen\,hu \sqrt{2} + \sqrt{cos\,h 2u} \right).$$

In simil guisa, per l'iperboloide a due falde $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ponendo $z = c\,cos\,hu$, $x = a\,sen\,hu\,cos\,\alpha$, $y = b\,sen\,hu\,sen\,\alpha$ nella formula (1) del num. 64, si ottiene

$$S = 4 \int_0^u \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,hu\,(a^2 b^2 cos^2 hu + b^2 c^2 sen^2 hu\,cos^2 \alpha + a^2 c^2 sen^2 hu\,sen^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} du\,d\alpha = \\ = 4ab \int_0^u \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,hu\,(p\,sen^2 hu + 1)^{\frac{1}{2}} du\,d\alpha,$$

dove $p = 1 + \frac{c^2}{a^2} cos^2 \alpha + \frac{c^2}{b^2} sen^2 \alpha$. Nel caso di $a = b$ riducesi ad

$$S_u = \pi a\,cos\,hu \sqrt{a^2 cos^2 hu + c^2 sen^2 hu} - \pi a^2 - \\ - \frac{\pi a c^2}{\sqrt{a^2+c^2}} \log \left(\frac{cos\,hu \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{a^2 cos^2 hu + c^2 sen^2 hu}}{\sqrt{a^2+c^2} + a} \right),$$

che per l'iperboloide equilatero si semplifica divenendo

$$S_u = \pi a^2 \left[cos\,hu \sqrt{cos\,h 2u} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{cos\,hu \sqrt{2} + \sqrt{cos\,h 2u}}{\sqrt{2} + 1} \right) \right].$$

Nell'iperboloide a due falde il fascio delle normali isocline secondo l'angolo ω sega la superficie lungo una curva che si proietta sul piano xOy per la conica $\frac{x^2}{a^2} \left(\frac{c^2}{a^2} tang^2 \omega - 1 \right) + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{c^2}{b^2} tang^2 \omega - 1 \right) = 1$; la quale è un'ellisse nel caso di $tang^2 \omega > \frac{a^2}{c^2}$, e siccome $\alpha = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}}$, $\alpha\,sen\,\omega > 1$, la sostituzione $sen\,\varphi = \alpha\,sen\,\omega$ darebbe per φ un angolo immaginario ed il modulo $k > 1$. Giovandosi delle funzioni iperboliche pongasi $sen\,\omega = \frac{1}{\alpha} cos\,hu$, i semiassi della detta ellisse si espri-

mono con $\frac{a}{\alpha \, sen\, hu}\sqrt{\alpha^2 - cos^2 hu}$, $\frac{b}{\alpha \, \Delta\, hu}\sqrt{\alpha^2 - cos^2 hu}$, essendo $\Delta\, hu = \sqrt{e^2 cos^2 hu - 1}$, $e = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2 + b^2}{c^2 + a^2}}$; e per l' eguaglianze $sen\, \omega = \frac{1}{\alpha} cos\, hu$, $cos\, \omega\, d\omega = \frac{1}{\alpha} sen\, hu\, du$, la formula (6) del num. 61, $Z = \frac{\sigma}{sen\, \omega} + \int \frac{\sigma\, cos\, \omega\, d\omega}{sen^2\, \omega}$, dove σ indica l'area dell' ellisse, si converte in $Z = \frac{\pi\, a\, b}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2 - cos^2 hu}{sen\, hu\, cos\, hu\, \Delta\, hu} + \int \frac{(\alpha^2 - cos^2 hu)\, du}{cos^2 hu\, \Delta\, hu}\right]$. Introducendo i noti simboli $L u = \int_0^u \frac{du}{\Delta\, hu}$, $I u = \int_0^u du\, \Delta\, hu$ (num. 35), si ottiene la relazione $\int \frac{du}{cos^2 hu\, \Delta\, hu} = L u + I u - tang\, hu\, \Delta\, hu$; onde la surriferita zona dell' iperboloide a due falde equivale a

$$Z = \frac{\pi\, a\, b}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2 - cos^2 hu}{sen\, hu\, cos\, hu\, \Delta\, hu} - \alpha^2 tang\, hu\, \Delta\, hu + (\alpha^2 - 1)\, L u + \alpha^2 I u\right],$$

e posto per brevità $H u = \frac{cot\, hu}{\Delta\, hu}\left[1 - a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) sen^2 hu\right]$ verrà $Z = \frac{\pi\, b}{\sqrt{a^2 + c^2}}\left[c^2 L u + (a^2 + c^2)\, I u + c^2 H u\right]$. Dicasi u_0 il valore della u avente per coseno iperbolico il numero $\alpha = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$; vi corrisponde $\omega = \frac{\pi}{2}$, e poichè la linea isoclina si riduce al vertice $(x = y = 0,\ z = c)$ dell' iperboloide, si deducono le costanti

$$sen\, hu_0 = \frac{c}{a},\quad \Delta\, hu_0 = \frac{c}{b},\quad H u_0 = -\frac{1}{b}\sqrt{a^2 + c^2};$$

onde la calotta iperboloidica racchiusa fra il vertice e la curva isoclina relativa ad $u > 0$ si esprimerà con

$$Z = \frac{\pi\, b}{\sqrt{a^2 + c^2}}\left[c^2 (L u - L u_0) + (a^2 + c^2)(I u - I u_0) + c^2 (H u - H u_0)\right].$$

Per il valore $tang\, \omega = \frac{1}{c}\sqrt{a^2 + b^2}$ risultano

$$cos\, hu = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}},\quad sen\, hu = \frac{b\, c}{a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\Delta\, hu = \frac{a\, c}{b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\quad c^2 H u = a\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

e la proiezione della curva isoclina coincide con l'ellisse $\frac{a^2 x^2}{b^4} + \frac{b^2 y^2}{a^4} = 1$, i cui semiassi sono eguali ai raggi di curvatura dei vertici dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

74. — La pedale di una quadrica è pure l'inviluppo delle sfere descritte come diametri sui raggi vettori della sua superficie. Infatti sia (1) $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha x + \beta y + \gamma z$ l'equazione della sfera, il cui centro (α, β, γ) ha per luogo la quadrica (2) $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 1$. Considerando γ qual funzione delle variabili α, β risultano

$$-\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{x}{z} = \frac{A\alpha}{C\gamma}, \quad -\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{y}{z} = \frac{B\beta}{C\gamma};$$

da queste e dalla (1) si traggono le ragioni

$$\alpha : \frac{x}{A} = \beta : \frac{y}{B} = \gamma : \frac{z}{C} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}},$$

che sostituite nella (2) conducono alla quartica

$$(3) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}.$$

La proprietà enunciata sussiste pure se la (2) sia una superficie qualunque $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, perchè l'equazioni $\frac{x}{z} = -\frac{d\gamma}{d\alpha}$, $\frac{y}{z} = -\frac{d\gamma}{d\beta}$ coincidono con quelle della normale abbassata dall'origine sul piano tangente a questa superficie, ed il piede giace sulla sferica (1). Supponendo $\gamma = 0$ si trova l'inviluppo delle sfere $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha x + \beta y$ descritte come diametri sui raggi vettori della conica (4) $A\alpha^2 + B\beta^2 = 1$ esser la quartica (5) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}$; generabile ancora come pedale del centro della quadrica (4) sulle superficie dei coni retti, aventi per base la conica (4) ed il vertice in un punto dell'asse Oz: attesochè il piano condotto per questo punto $(0, 0, \gamma)$ e la tangente alla curva (4) abbia per equazione $A\alpha x + B\beta y + \frac{z}{\gamma} = 1$ e la normale tirata dall'origine sia definita dalle ragioni $\frac{x}{A\alpha} = \frac{y}{B\beta} = z\gamma$; dalle quali vengono $\alpha = \frac{x}{A(x^2 + y^2 + z^2)}$, $\beta = \frac{y}{B(x^2 + z^2 + z^2)}$, che sostituiti nella (4) danno la stessa (5). Nel caso di $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$ il volume V_1 racchiuso dalla superficie (5) si deduce mediante la formula (6) della pa-

gina 190 ponendo $c = 0$, e quindi $\mu = \nu = \frac{\pi}{2}$, $k = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$, $V_1 = lim\, V = \frac{\pi a}{6}\left[2(a^2 + b^2) E_1 - b^2 F_1\right]$, sendo F_1 ed E_1 gl' integrali ellittici di prima e seconda specie. In virtù delle coordinate polari si hanno le relazioni $x = R\, sen\, \gamma\, cos\, \omega$, $y = R\, sen\, \gamma\, sen\, \omega$, $z = R\, cos\, \gamma$; quindi la (5) si esprime con $R = sen\, \gamma\, (a^2 cos^2 \omega + b^2 sen^2 \omega)^{\frac{1}{2}}$, ed a motivo di $p = \frac{(a^2 - 2R^2)\, x}{2R^2 z}$, $q = \frac{(b^2 - 2R^2)\, y}{2R^2 z}$, la normale abbassata sul piano tangente ha per lunghezza $P = \frac{R^3}{sen\, \gamma\, (a^4 cos^2 \omega + b^4 sen^2 \omega)^{\frac{1}{2}}}$, onde l' elemento superficiale è

$$d^2 S = \frac{R^3}{P}\, sen\, \gamma\, d\gamma\, d\omega = sen^2 \gamma\, (a^4 cos^2 \omega + b^4 sen^2 \omega)^{\frac{1}{2}}\, d\gamma\, d\omega\,;$$

come si ricaverebbe dall' infinitesimo della superficie pedale dell' ellissoide indicata al numero 65, facendovi $\frac{1}{C} = 0$; ne consegue l' appianatura $S = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^4 cos^2 \omega + b^4 sen^2 \omega)^{\frac{1}{2}}\, sen^2 \gamma\, d\gamma\, d\omega = 2\pi a^2 E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, dove $k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^4}$.

75. — Nel tomo XXIV delle *Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze* (stampato in Modena l' anno 1848), il professor Tortolini adoperando gl' integrali ellittici determinò il volume racchiuso dalla superficie $(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = c^2 Z^2 - a^2 X^2 - b^2 Y^2$, pedale dell' iperboloide a due falde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Ora, per le funzioni iperboliche, si può giungere allo stesso risultato seguendo un calcolo simile a quello della pagina 188; infatti, avendosi in coordinate polari

$$R = (c^2 cos^2 \gamma - b^2 sen^2 \omega\, sen^2 \gamma - a^2 cos^2 \omega\, sen^2 \gamma)^{\frac{1}{2}},$$

$$V = \frac{8}{3} \int\int R^3\, sen\, \gamma\, d\gamma\, d\omega\,,$$

dove i limiti d' integrazione per ω sono 0 e $\frac{\pi}{2}$, e per γ sono 0 ed $arc\, tang \frac{c}{\sqrt{a^2 cos^2 \omega + b^2 sen^2 \omega}}$; affinchè il raggio vettore R risulti reale. Facendo le sostituzioni (1) $a\, sen\, \gamma\, cos\, \omega = \frac{1}{\rho} cos\, \psi\, sen\, h\, u$, $b\, sen\, \gamma\, sen\, \omega = \frac{1}{\rho} sen\, \psi\, sen\, h\, u$, $c\, cos\, \gamma = \frac{1}{\rho} cos\, h\, u$ si deducono

$$(2) \quad \rho^2 = \left(\frac{cos^2\psi}{a^2} + \frac{sen^2\psi}{b^2}\right) sen^2 h u + \frac{cos^2 h u}{c^2},$$

$$R = \frac{1}{\rho} \quad tang\,\omega = \frac{a}{b}\,tang\,\psi, \quad tang\,\gamma = \frac{c}{a\,b}(a^2 sen^2\psi + b^2 cos^2\psi)^{\frac{1}{2}}\,tang\,h\,u,$$

$$a^2 b^2 c^2 \rho^2 = \alpha^2 cos^2\psi + \beta^2 sen^2\psi,$$

dove si hanno

$$(3) \quad \alpha^2 = b^2(c^2 sen\,h^2 u + a^2 cos\,h^2 u), \quad \beta^2 = a^2(c^2 sen\,h^2 u + b^2 cos\,h^2 u).$$

L'ultima delle relazioni (1) differenziata ci somministra

$$c\,sen\,\gamma\,d\gamma = cos\,h\,u\,\frac{d\,u}{\rho^2} - \frac{1}{\rho}\,sen\,h\,u\,d\,u,$$

e quindi le altre (2) conducono ai differenziali

$$(4) \quad \rho\,d\rho = \left(\frac{cos^2\psi}{a^2} + \frac{sen^2\psi}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) sen\,h\,u\,cos\,h\,u\,d\,u,$$

$$d\omega = \frac{a\,b\,d\psi}{a^2 sen^2\psi + b^2 cos^2\psi} \quad c\,sen\,\gamma\,d\gamma = \frac{sen\,h\,u}{\rho^3}\left(\frac{cos^2\psi}{a^2} + \frac{sen^2\psi}{b^2}\right) d\,u,$$

$$sen\,\gamma\,d\gamma\,d\omega = \frac{1}{a\,b\,c\,\rho^3}\,sen\,h\,u\,d\,u\,d\psi.$$

E siccome i limiti di ψ sono 0 e $\frac{\pi}{2}$, e quelli di u a motivo delle formule (2) sono 0 e $+\infty$, si ottiene l'espressione

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^5 b^5 c^5\,d\psi\,sen\,h\,u\,d\,u}{(\alpha^2 cos^2\psi + \beta^2 sen^2\psi)^3}.$$

Come alla pagina 189 il valore di V per la sostituzione $tang\,\psi = \frac{\alpha}{\beta}\,tang\,\lambda$ integrato rispetto a λ si converte nel semplice risultamento

$$V = \frac{\pi}{6}(a\,b\,c)^5 \int_0^{\infty}\left(\frac{3}{\alpha^4} + \frac{3}{\beta^4} + \frac{2}{\alpha^2\beta^2}\right)\frac{sen\,h\,u\,d\,u}{\alpha\,\beta}.$$

Nelle formule (3) si facciano le sostituzioni $cos\,h\,u = tang\,h\,\mu.\,cot\,h\,t$, $sen\,h\,\mu = \frac{c}{b}$, $sen\,h\,\nu = \frac{c}{a}$ e si supponga a maggiore di b; simboleggiando brevemente con Δ la quantità

$$\Delta\,h\,t = (1 + e^2 cos^2 h\,t)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ed} \quad e^2 = cot^2 h\,\nu\,tang^2 h\,\mu - 1 = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}$$

si otterranno $\alpha = \frac{ab \, sen \, h \nu \, \Delta}{sen \, h t}$, $\beta = \frac{ab \, sen \, h \mu}{sen \, h t}$. E poichè ai limiti 0 ed ∞ di u corrispondono respettivamente i limiti μ e 0 di t, la surriferita espressione del volume diviene

$$V = \frac{\pi c^5}{6 ab \, sen \, h \nu \cos h \mu} \left[\frac{3}{sen \, h^4 \mu} \int_0^{\mu} \frac{sen \, h^4 t \, dt}{\Delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{sen \, h^4 \nu} \int_0^{\mu} \frac{sen \, h^4 t \, dt}{\Delta^5} + \frac{2}{sen \, h^2 \mu \, sen \, h^2 \nu} \int_0^{\mu} \frac{sen \, h^4 t \, dt}{\Delta^3} \right].$$

Ponendo le notazioni $\int_0^u \frac{du}{\Delta} = Lu$, $\int_0^u \Delta \, du = Iu$ si hanno le formule $e^2 \int \frac{\cos h^2 u \, du}{\Delta} = Iu - Lu$, $e^2 \int \frac{sen \, h^2 u \, du}{\Delta} = Iu - (e^2+1) Lu$.

È facile ottenere altri integrali simili a quelli della pagina 188 con un procedimento analogo; così dalle identità $d \Delta = e^2 \cos h u \, sen \, h u \frac{du}{\Delta}$, $d(sen \, hu \cos hu \, \Delta) = [1 + e^2 + (2+4e^2) \, sen \, h^2 u + 3 e^2 sen \, h^4 u]$ si ricava

$$(1') \int sen \, h^4 u \frac{du}{\Delta} = \frac{\Delta}{3e^2} sen \, hu \cos hu + \frac{(2+3e^2)(1+e^2)}{3e^4} Lu - 2 \frac{(2e^2+1)}{3e^4} Iu.$$

Dal differenziale $d\left(\frac{sen \, hu \cos hu}{\Delta}\right) = \frac{sen \, h^2 u \, du}{\Delta^3} + \frac{\cos h^2 u \, du}{\Delta}$ si deduce

$(2') \int \frac{sen \, h^2 u \, du}{\Delta^3} = \frac{sen \, hu \cos hu}{\Delta} + \frac{1}{e^2}(Lu - Iu)$. Così pure dall'identità $\frac{1+e^2}{\Delta^3} = \frac{1}{\Delta} - \frac{e^2 sen \, h^2 u}{\Delta^3}$ si conchiude

$$(3') \int \frac{du}{\Delta^3} = \frac{1}{1+e^2} Iu - \frac{e^2}{1+e^2} \frac{sen \, hu \cos hu}{\Delta},$$

e moltiplicando la stessa identità per $sen \, h^2 u \, du$, a motivo delle precedenti integrazioni si avrà

$$(4') \int \frac{sen \, h^4 u \, du}{\Delta^3} = \frac{e^2+2}{e^4} Iu - \frac{2}{e^4}(1+e^2) Lu - \left(\frac{1+e^2}{e^2}\right) \frac{sen \, hu \cos hu}{\Delta}.$$

In simil modo, dall' eguaglianza

$$d\left(\frac{sen \, hu \cos hu}{\Delta^3}\right) = \left(\frac{2-e^2}{1+e^2}\right) sen \, h^2 u \frac{du}{\Delta^3} + \frac{du}{\Delta^3} - \frac{3e^2}{1+e^2} sen \, h^4 u \frac{du}{\Delta^5}$$

si giunge all' integrale

$$(5')\int \operatorname{sen} h^4 u \frac{du}{\Delta^5} = \frac{2}{3e^2\Delta}\left(1 - e^2 - \frac{1+e^2}{\Delta^2}\right)\operatorname{sen} hu \cos hu + \\ + \frac{(2-e^2)}{3e^4} Lu + \frac{2(e^2-1)}{3e^4} Iu.$$

Ora essendo $\operatorname{sen} h\mu = \frac{c}{b}$ si ricaverà $\Delta = \frac{a}{b}$, e gl' integrali contenuti in V secondo le formule (1'), (4') e (5') per $u = \mu$ si riducono alle espressioni

$$\frac{3}{\operatorname{sen} h^4 \mu}\int_0^\mu \frac{\operatorname{sen} h^4 t\, dt}{\Delta} = \frac{ab(b^2+c^2)}{c^3(a^2-b^2)}\sqrt{b^2+c^2} + \\ + \frac{b^4(2c^2+3a^2-b^2)(a^2+c^2)}{c^4(a^2-b^2)^2} L\mu - \frac{2b^4(b^2+c^2)}{c^4(a^2-b^2)^2}(2a^2+c^2-b^2) I\mu,$$

$$\frac{2}{\operatorname{sen} h^2\mu \operatorname{sen} h^2\nu}\int_0^\mu \frac{\operatorname{sen} h^4 t\, dt}{\Delta^3} = -\frac{2ab(a^2+c^2)}{c^3(a^2-b^2)}\sqrt{b^2+c^2} - \\ - \frac{4a^2b^2(b^2+c^2)(a^2+c^2)}{c^4(a^2-b^2)^2} L\mu + \frac{2a^2b^2(b^2+c^2)}{c^4(a^2-b^2)^2}(2c^2+a^2+b^2) I\mu,$$

$$\frac{3}{\operatorname{sen} h^4\nu}\int_0^\mu \frac{\operatorname{sen} h^4 t\, dt}{\Delta^5} = \frac{a}{bc^3}\left(\frac{3a^2b^2+2a^2c^2-2a^4-b^2c^2}{(a^2-b^2)}\right)\sqrt{b^2+c^2} + \\ + \frac{a^4(b^2+c^2)}{c^4(a^2-b^2)^2}(3b^2+2c^2-a^2) L\mu + \frac{2a^4}{c^4}\frac{(a^2-2b^2-c^2)(b^2+c^2)}{(a^2-b^2)^2} I\mu;$$

e siccome il fattore che moltiplica la somma dei precedenti integrali è $\frac{\pi c^5}{6ab \operatorname{sen} h\mu \operatorname{sen} h\nu} = \frac{\pi c^4}{6\sqrt{b^2+c^2}}$, ne resulta

$$V = \frac{\pi abc}{6}\left(\frac{2c^2-2a^2-b^2}{b^2}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{b^2+c^2}}\left(2c^4 - c^2(a^2+b^2) - a^2b^2\right) L\mu + \\ + \frac{\pi}{3}(a^2+b^2-c^2)\sqrt{b^2+c^2}\, I\mu.$$

Volendo esprimere V con integrali ellittici si faccia $\operatorname{sen} hu = \operatorname{tang}\varphi$, $\frac{1}{1+e^2} = k^2$ e si troverà $\Delta hu = \frac{\Delta\varphi}{k\cos\varphi}$, $du = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, $Lu = kF\varphi$, $du\ \Delta hu = \frac{d\varphi\,\Delta\varphi}{k\cos^2\varphi} = k\left[\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + (1-k^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\operatorname{tang}\varphi\right]$, onde

$I\mu = \frac{1}{k}[F\varphi + tang\,\varphi\,\Delta\,\varphi - E\varphi]$, e nel caso di $tang\,\varphi = \frac{c}{b}$ ottengonsi i valori

$$L\mu = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}\,F\varphi,\quad I\mu = \frac{a\,c}{b\sqrt{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\,[F\varphi - E\varphi],$$

che sostituiti nel surriferito valore di V conducono alla formula del Tortolini

$$V = \frac{\pi\,abc}{6} + \frac{\pi}{6}\,\frac{[2a^4 + a^2(b^2-c^2) + b^2c^2]}{\sqrt{a^2+c^2}}\,F\varphi + \frac{\pi}{3}(a^2+b^2-c^2)\sqrt{a^2+c^2}\,E\varphi.$$

76. — Il punto da cui si tirano le perpendicolari alle tangenti di una linea (od ai piani tangenti di una superficie S) vien detto *origine* della curva (o superficie) pedale. Steiner trovò *nelle pedali di area costante, derivate da una linea piana chiusa, giacere le origini sopra una circonferenza, ed i vari cerchi corrispondenti ad aree diverse esser concentrici*. Il volume racchiuso da una superficie pedale di origine M è definito dal cono avente il vertice in M e la base posta sulla pedale relativa alla superficie S della prima figura.

I geometri Fischer ed A. Hirst estesero allo spazio il teorema di Steiner per l'enunciato *le origini delle pedali di volume costante* V *sono allogate sopra una superficie cubica, riducentesi ad una quadrica, ove la prima figura sia chiusa; nel qual caso, variando* V *l'insieme dei luoghi, si compone di quadriche omotetiche col medesimo centro situato nell'origine della pedale di minimo volume* (*). Dicansi x, y, z le coordinate di un'origine M; α, β, γ gli angoli formati dagli assi ortogonali Ox, Oy, Oz con la perpendicolare $R = R_0 - x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma$ abbassata da M sulla superficie S, ed R_0 il valore di R per $x = y = z = 0$; in virtù della formula (16) del numero 64 abbiamo $d^2V = \frac{1}{2}R^3\,d\theta$; dove $d\theta = sen\,\gamma\,d\gamma\,d\omega$ è l'infinitesimo della superficie sferica descritta col raggio uno e centro M intercetto dal cono elementare, il cui vertice è lo stesso punto M e la base infinitesima giace sovra la superficie pedale. Sviluppando l'espressione $d^2V = \frac{1}{3}(R_0 - x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma)^3\,d\theta$, ed integrandola si ottiene (1) $V = V_0 - f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z) - \frac{1}{3}f_3(x, y, z)$; V_0 significa il volume relativo all'origine O e le funzioni omogenee $f_1(x, y, z) = A_1x + A_2y + A_3z$, $f_2(x, y, z) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz$, $f_3(x, y, z) = A_{111}x^3 + A_{222}y^3 + A_{333}z^3 +$

(*) *Sur les volumes des surfaces podaires*, par T. A. Hirst, Journal de Crelle, tomo LXII, pag. 246.

$+3\,A_{112}x^2y+3\,A_{113}x^2z+3\,A_{221}y^2x+3\,A_{223}y^2z+3\,A_{331}z^2x+3\,A_{332}z^2y+$
$+A_{123}xyz$ hanno i primi coefficienti

$$A_1=\int\int R_0^2\cos\alpha\,d\theta,\ldots.\quad A_{11}=\int\int R_0\cos^2\alpha\,d\theta,\ldots.$$

$$A_{12}=\int\int R_0\cos\alpha\cos\beta\,d\theta,\ldots.\quad A_{111}=\int\int\cos^3\alpha\,d\theta,\ldots.$$

$$A_{112}=\int\int\cos^2\alpha\cos\beta\,d\theta,\ldots.\quad A_{123}=\int\int\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,d\theta,$$

e gli altri si deducono permutando fra loro α, β, γ conforme agli scambi degl' indici 1, 2, 3. Quando la superficie S risulti chiusa e convessa, le normali avendo tutte le possibili direzioni dello spazio e la curvatura $d\theta$ conservando lo stesso segno, gl' integrali contenuti nei coefficienti delle funzioni lineare e cubica si annulleranno, perocchè i loro termini differenziali assumono due a due valori eguali e di segno opposto; onde l' equazione (1) riducesi alla $f_2(x,\,y,\,z)=V-V_0$, ed i luoghi del punto M sono quadriche concentriche per i diversi valori di V. Infine, se la prima superficie S sia simmetrica rispetto a tre piani ortogonali, e si prendano questi per coordinati, si annulleranno pure i coefficienti A_{12}, A_{13}, A_{23} e la (1) acquisterà la forma $A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2=V-V_0$; per esempio, supposto S esser la quadrica $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$, dalle ragioni $R_0=\frac{a\cos\alpha}{x}=\frac{b\cos\beta}{y}=\frac{c\cos\gamma}{z}$ si trae $R_0^2=a\cos^2\alpha+b\cos^2\beta+c\cos^2\gamma$; da cui derivano $2\,R_0\frac{d\,R_0}{d\,a}=\cos^2\alpha,\ldots.$ e siccome $3\,V_0=\int\int R_0^3\,d\theta$, ne consegue $\frac{d\,V_0}{d\,a}=\int\int R_0^2\frac{d\,R_0}{d\,a}\,d\theta=\frac{1}{2}\int\int R_0\cos^2\alpha\,d\theta=\frac{1}{2}A_{11}$; onde si conchiude $V=V_0+2\frac{d\,V_0}{d\,a}x^2+2\frac{d\,V_0}{d\,b}y^2+2\frac{d\,V_0}{d\,c}z^2$.

Capo Sesto.

CURVATURA DELLE SUPERFICIE QUADRICHE. (*)

77. — Sovra la superficie $f(x, y, z) = 0$ giaccia la curva s, il cui elemento $ds = MM'$ ha la direzione t definita dalle ragioni

$$(1)\quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

e la normale nel punto M alla superficie vien determinata dalla serie dei rapporti (2) $\cos\alpha' : \frac{df}{dx} = \cos\beta' : \frac{df}{dy} = \cos\gamma' : \frac{df}{dz} = \frac{1}{h}$; dove si è posto (3) $h^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2$. I coseni degli angoli formati dagli assi con la normale n' al punto successivo M' si esprimono per $\cos\alpha' + d\cos\alpha'$, $\cos\beta' + d\cos\beta'$, $\cos\gamma' + d\cos\gamma'$. S' immagini una sfera direttiva col centro in un punto O' dello spazio, e col raggio unitario, tirando le rette $O'N$, $O'N'$ parallele alle normali n, n', l'arco $\widehat{NN'} = d\nu$ della circonferenza massima determinata dal piano NON' misura l'angolo delle normali, la direzione della tangente in N è nota per le componenti $d\cos\alpha'$, $d\cos\beta'$, $d\cos\gamma'$ del segmento NN', e perciò (4) $d\nu^2 = (d\cos\alpha')^2 + (d\cos\beta')^2 + (d\cos\gamma')^2$. Rappresenti M'' il punto della s consecutivo ad M', ovvero $\widehat{M'M''} = ds' = ds + d^2s$, poichè la (1) fissa la direzione della tangente MM', quella della successiva tangente $M'M''$ si otterrà per i binomi $\cos\alpha + d\cos\alpha$, $\cos\beta + d\cos\beta$, $\cos\gamma + d\cos\gamma$; onde nella sfera direttiva menati i raggi $O'T$, $O'T'$ paralleli a queste due tangenti, l'angolo di contingenza misurato dall'arco $\widehat{TT'} = d\sigma$ avrà per sue componenti $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$; cioè (5) $d\sigma^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2$, il piano $TO'T'$ risulta parallelo al piano osculatore in M alla curva s, e detto ρ il raggio di curvatura MC' avente la stessa direzione dell'elemento TT', si deduce (6) $d\sigma = \frac{ds}{\rho}$. Differenziando l'identità $\sum \cos\alpha \cos\alpha' = 0$ ne consegue $\sum \cos\alpha' \, d\cos\alpha = -\sum \cos\alpha \, d\cos\alpha'$; si osservi il primo membro equi-

(*) *Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo,* per il prof. Domenico Chelini, scritto inserito nel tomo VIII, serie 2ª, delle *Memorie dell'Accademia scientifica bolognese.*

valere a $\frac{ds}{\rho} \cos(n, \rho)$ in virtù del principio che i prodotti delle componenti omonime dei segmenti $O'N = 1$, $TT' = d\sigma$ hanno la somma pari al rettangolo $O'N . TT'$ per il coseno dell'angolo compreso; il secondo membro restare invariabile per tutte le curve che hanno la stessa tangente t, ed il suo valore assoluto essere $d\nu \cos(t, \nu)$, e siccome il raggio r di curvatura della sezione normale è diretto secondo $O'N$, si potrà esprimere la detta costante per $\frac{ds}{r}$, e perciò risulta (7) $\rho = r \cos(n, \rho)$, teorema da *Meusnier* stabilito nel tomo X del *Recueil des savants étrangers*, 1785. Ne consegue ancora la relazione (8) $\cos(t, \nu) = \frac{1}{r} \frac{ds}{d\nu}$.

Differenziando rispetto ad s ciascuna delle formule (2) si trova

$$\frac{d \cos \alpha'}{ds} = \frac{1}{h} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2 f}{dx\,dy} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2 f}{dx\,dz} \frac{dz}{ds} \right) - \frac{1}{h^2} \frac{dh}{ds} \frac{df}{dx},$$

e similmente per le altre; moltiplicandole rispettivamente per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, e poi aggiungendole a motivo della (4) si otterrà

$$(9) \quad \Sigma \frac{d \cos \alpha'}{ds} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{h} \left(\Sigma \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{dx^2}{ds^2} + 2 \Sigma \frac{d^2 f}{dz\,dy} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{1}{r};$$

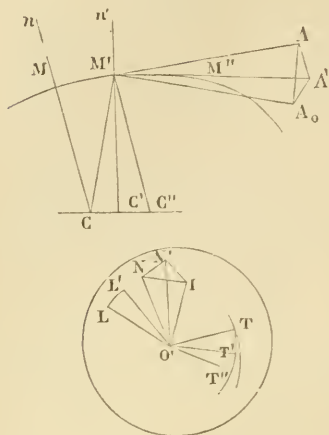
la quale insieme con la (10) $\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0$ rappresenta nel piano tangente la *conica indicatrice*, avente il centro in M ed il raggio vettore $\sqrt{r}$ parallelo alla tangente MM'. Riferendola ai suoi assi principali $2\sqrt{r_1}$, $2\sqrt{r_2}$, la conica è definita dalla equazione di Euler (11) $\frac{\cos^2 \varphi}{r_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{r_2} = \frac{1}{r}$, dove φ simboleggia l'angolo che la MM' fa col semiasse $\sqrt{r_1}$, e poichè il piano xOy deve coincidere col piano tangente, le formule si riducono ad $\alpha' = \beta' = \frac{\pi}{2}$, $\gamma' = 0$, $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\varphi$, $\frac{dz}{ds} = 0$ e la (9) alla $\frac{d \cos \alpha'}{ds} \cos\varphi + \frac{d \cos \beta'}{ds} \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{r}$; ora, dovendo esser questa identica alla (11), sussisteranno le condizioni $\frac{d \cos \alpha'}{ds} = \frac{\cos\varphi}{r_1}$, $\frac{d \cos \beta'}{ds} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r_2}$, $d \cos\gamma' = 0$; onde per la (4) si ricavano

$$(12) \quad \frac{d\nu}{ds} = \left(\frac{\cos^2 \varphi}{r_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{r_2^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(13) \quad \cos(t, \nu) = \left(\frac{\cos^2 \varphi}{r_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{r_2} \right) : \left(\frac{\cos^2 \varphi}{r_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{r_2^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(14) \quad \operatorname{sen}(t, \nu) = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) : \left(\frac{\cos^2 \varphi}{r_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{r_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nel caso di $r_1 = r_2$, viene $r = r_1$, ovvero tutte le sezioni normali hanno la stessa curvatura; il punto M dicesi *umbilico* della superficie.

Fig. 33ª.

Sulle tangenti $M\,M'$, $M'\,M''$ si prendano $M'A = M'A' = 1$, e condotto per $M'\,M''$ il piano che tocca la superficie, vi si proietti in $M'A_0$ il segmento $M'A$, l'angolo di contingenza $\widehat{A\,M'A'} = \frac{d\,s}{\rho}$ si decomponga in due: $A'\,M'A_0 = \frac{d\,s}{\rho_t}$ (*curvatura tangenziale*), ed $A_0 M'A = \frac{d\,s}{\rho_n}$ (*curvatura normale*); dal triangolo rettangolo $A\,A_0 A'$ si deducono (15) $\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho, \rho_t)$, $\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho, \rho_n)$, $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_t^2} + \frac{1}{\rho_n^2}$. Se in ogni punto della linea s la retta $M'A_0$ coincida con la normale n', il piano $M\,M'\,M''$ risulta osculatore e normale alla superficie; il cammino $M\,M' + M'\,M''$ sendo il più breve per andare da M in M'', la linea s chiamasi *geodetica.*

Il cerchio di curvatura della sezione normale ha il centro C sulla retta n e l'angolo di contingenza $\widehat{M\,C\,M'} = \frac{d\,s}{r}$; indicando con $t\,n$ il piano del cerchio, *l'inclinazione infinitesima* dθ *della normale successiva* n' *con* t n *vien detta angolo della torsione geodetica.* Tirando nella sfera direttiva il raggio $O'I$ parallelo alla retta $M'\,C$, il triangolo infinitesimo $N\,O'\,I$ è simile ad $M\,C\,M'$, e la direzione $N\,I$ è normale al piano $I\,O'\,N'$, come parallela alla $M\,M'$ normale alle rette $C\,M'$, n', pur parallele alle rispettive $O'I$, $O'N'$, onde $\widehat{I\,N\,N'} = t, \nu$ ed $I\,N' = N\,N' \operatorname{sen} I\,N\,N'$; dunque a motivo della (14) ne discende la formula di Bertrand (16) $\frac{d\,\theta}{d\,s} = \frac{d\,\nu}{d\,s} \operatorname{sen}(t, \nu) = \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

Le componenti (17)
$$a_0 = \cos \beta' \, d \cos \gamma - \cos \gamma' \, d \cos \beta,$$
$$b_0 = \cos \gamma' \, d \cos \alpha - \cos \alpha' \, d \cos \gamma,$$
$$c_0 = \cos \alpha' \, d \cos \beta - \cos \beta' \, d \cos \alpha$$

hanno per risultante il segmento $d\,\sigma \operatorname{sen}(n, \rho)$ perpendicolare alle rette n, ρ e quindi parallelo ad $M'A$, o all'elemento $M\,M' = d\,s$; e poichè due segmenti paralleli hanno la stessa ragione delle componenti omonime, ne consegue $d\,\sigma \operatorname{sen}(n, \rho) = \frac{a_0}{\cos \alpha} = \frac{b_0}{\cos \beta} = \frac{c_0}{\cos \gamma}$; da cui

$$(18)\quad d\,\sigma \operatorname{sen}(n, \rho) = \sum (\cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta') \, d \cos \alpha.$$

Se i piani osculatori della curva s menati per le tangenti successive MM', $M'M''$ siano obliqui alla superficie, le direzioni dei raggi di curvatura $M'C = r$, $M'C' = \rho$, $M'C'' = \rho'$ e della normale n' sono perpendicolari all'elemento $M'M$, e però giacciono nello stesso piano, e fra gli angoli da esse formati sussiste l'eguaglianza $\widehat{r\,n'} = \widehat{\rho\,\rho'} - (\widehat{n'\rho'} - \widehat{r\,\rho})$; al limite la direzione $M'C$ coincide con la normale n, cioè $lim\ \widehat{r\,\rho} = \widehat{n\,\rho}$, l'angolo $\rho\,\rho'$ misurando l'angolo $d\tau$ dei due successivi piani osculatori si definisce *angolo di torsione*, ed $\widehat{r, n'} = \widehat{t\,n, n'} = d\theta$ è l'*angolo di torsione geodetica*: onde la formula di Ossian Bonnet (19) $d\theta = d\tau - d\,(\widehat{n, \rho})$.

Le componenti
$$a = cos\,\gamma' \,cos\,\beta - cos\,\beta' \,cos\,\gamma,$$
$$b = cos\,\gamma \,cos\,\alpha' - cos\,\alpha \,cos\,\gamma',$$
$$c = cos\,\beta' \,cos\,\alpha - cos\,\alpha' \,cos\,\beta,$$

hanno per risultante un segmento unitario v perpendicolare al piano $t\,n$; proiettando sulla normale successiva n' si trova $sen\,(\widehat{n', t\,n}) = \Sigma\, a\,d cos\,\alpha'$; e poichè l'angolo $\widehat{n', t\,n} = d\theta$, sostituendo al seno infinitesimo il suo arco si ha (20) $d\theta = \Sigma\, a\,d\,cos\,\alpha'$. Le componenti del segmento unitario v' preso sulla normale al piano successivo $t'n'$ saranno $a + da$, $b + db$, $c + dc$, e l'angolo $d\omega$ di questi due segmenti v, v' eguaglia quello formato dai piani $t\,n$, $t'n'$; onde un segmento perpendicolare al piano $v\,v'$ e di grandezza $v\,v'\,d\omega$ avrà per componenti $adb - bda$, $bdc - cdb$, $adc - cda$. Ora, in virtù delle identità $a\,cos\,\alpha + b\,cos\,\beta + c\,cos\,\gamma = 0$, $a\,cos\,\alpha' + b\,cos\,\beta' + c\,cos\,\gamma' = 0$, dei surriferiti valori di a, b, c e delle formule (18), (20) si deducono $a\,d\,b - b\,d\,a = cos\,\gamma\,(a\,d\,cos\,\alpha' + b\,d\,cos\,\beta' + c\,d\,cos\,\gamma') - cos\,\gamma'\,(a\,d\,cos\,\alpha + b\,d\,cos\,\beta + c\,d\,cos\,\gamma) = cos\,\gamma\,d\theta - cos\,\gamma'\,d\sigma\,sen\,(n, \rho)$, e similmente ne conseguono $bdc - cdb = cos\,\alpha\,d\theta - cos\,\alpha'\,d\sigma\,sen\,(n, \rho)$, $cda - adc = cos\,\beta\,d\theta - cos\,\beta'\,d\sigma\,sen\,(\widehat{n, \rho})$. La somma dei quadrati di queste componenti determina (22) $d\omega^2 = d\theta^2 + d\sigma^2 sen^2 (\widehat{n, \rho})$: dunque l'angolo di contingenza tangenziale è diverso dall'angolo dei due piani $t\,n$, $t'n'$ e ne diviene identico soltanto per le linee di curvatura aventi nullo l'angolo di torsione geodetica.

Si è già veduto gli angoli ξ, η, ζ degli assi ortogonali Ox, Oy, Oz con la normale principale, o perpendicolare alla tangente nel punto M situata nel piano osculatore e parallela all'elemento $d\sigma$, ottenersi per le relazioni (23) $cos\,\xi = \frac{d\,cos\,\alpha}{d\,\sigma}$, $cos\,\eta = \frac{d\,cos\,\beta}{d\,\sigma}$, $cos\,\zeta = \frac{d\,cos\,\gamma}{d\,\sigma}$; or nel piano delle due rette MC, MC' normali alla tangente MM' si dice *polare* di M l'asse CC' del piano osculatore od il luogo dei centri dei circoli osculatori in M alla linea s, e quando M' coincida con M, essa è l'intersezione dei piani normali ad s condotti per i due punti; la

parallela tirata alla CC' per il punto M, o la perpendicolare innalzata da M al piano osculatore, si chiama la *binormale*. Indicando con λ, μ, ν gli angoli di questa retta con i tre assi coordinati saranno $\cos\lambda + d\cos\lambda$, $\cos\mu + d\cos\mu$, $\cos\nu + d\cos\nu$ i coseni degli angoli che la binormale in M' fa coi medesimi assi, e conducendo dal centro O' della sfera direttiva i raggi $O'L$, $O'L'$ paralleli alle binormali, l'arco infinitesimo $LL' = d\tau$ misurando l'angolo di torsione si esprimerà per (24) $d\tau^2 = (d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2$, ed il rapporto $\frac{ds}{d\tau} = T$ si dice *il raggio di torsione* della linea s nel punto M; se $d\tau = 0$ la curva s è piana.

I raggi $O'L$, $O'L'$ sono respettivamente perpendicolari ai piani $TO'T'$, $T'O'T''$ e però la retta $O'T'$ è normale al piano LOL'; in virtù delle relazioni (23), (24) è facile ricavare la serie delle ragioni eguali

$$(25)\quad \frac{d\cos\lambda}{\cos\xi} = \frac{d\cos\mu}{\cos\eta} = \frac{d\cos\nu}{\cos\zeta} = d\tau.$$

La tangente, la normale principale e la binormale sono ortogonali due a due; dunque i quadrati dei coseni angolari fatti da ciascun asse coordinato con quelle rette hanno per somma l'unità, ovvero $\cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1$, che differenziate a motivo delle (23), (25) conducono alle formule di Serret (26) $d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau$, $d\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau$, $d\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau$.

Se nell'eguaglianze di ortogonalità $\Sigma\cos\lambda\cos\alpha = 0$, $\Sigma\cos\lambda\cos\xi = 0$, $\Sigma\cos\alpha\cos\xi = 0$ si pongano in vece di $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ le quantità loro proporzionali fornite dalla (23) si ricaveranno le formule $d\sigma\cos\lambda = \cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta$, $d\sigma\cos\mu = \cos\alpha\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\alpha$, $d\sigma\cos\nu = \cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha$; ed applicando le (1) si esprimeranno i coseni della binormale in funzione delle coordinate di M, cioè (27) $\cos\lambda = \frac{\rho}{ds^3}(dy\, d^2z - dz\, d^2y)$, $\cos\mu = \frac{\rho}{ds^3}(dx\, d^2z - dz\, d^2x)$, $\cos\nu = \frac{\rho}{ds^3}(dx\, d^2y - dy\, d^2x)$; aggiungendo i lor quadrati risulta (28) $\left(\frac{ds^3}{\rho}\right)^2 = \Sigma\,(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2$. Ora la prima e terza delle surriferite eguaglianze di ortogonalità si possono ancora scrivere $\Sigma\cos\lambda\, dx = 0$, $\Sigma\, d\cos\lambda\, dx = 0$ a motivo delle (25); ne discendono le relazioni $dx = T(\cos\mu\, d\cos\nu - \cos\nu\, d\cos\mu)$, $dy = T(\cos\lambda\, d\cos\nu - \cos\nu\, d\cos\lambda)$,...... In una di queste sostituendo le formule (27) facilmente si conchiude

(29) $\frac{1}{T} = \left(\frac{\rho}{ds^3}\right)^2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$; dunque per la (28) si può calcolare il raggio di torsione per le coordinate di M; il determinante con-

tenuto nella (29) posto uguale a zero dà la condizione affinchè la curva sia piana.

La *sfera osculatrice* in un punto M della curva s è descritta per M e per i tre punti infinitamente vicini M', M'', M'''; chiamando x_0, y_0, z_0 le coordinate del centro, x, y, z quelle del punto M, ed R il raggio della sfera, differenziando l'equazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0$, nell'ipotesi di x_0, y_0, z_0, R costanti, si ottiene $(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+$ $+(z-z_0)\cos\gamma=0$, cioè il centro giace nel piano condotto per M e normale alla s. Per due successive differenziazioni si deducono

$$(x-x_0)\cos\xi+(y-y_0)\cos\eta+(z-z_0)\cos\zeta=-\frac{d\,s}{d\,\sigma}=-\rho,$$
$$(x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu=-\frac{d\,\rho}{d\,\tau},$$

avendole ridotte mediante le formule di Serret. Moltiplicando le tre precedenti equazioni prima per $\cos\alpha$, $\cos\xi$, $\cos\lambda$; indi per $\cos\beta$, $\cos\eta$, $\cos\mu$; ed in ultimo per $\cos\gamma$, $\cos\zeta$, $\cos\nu$ si traggono le componenti

$$(30)\quad x-x_0=\rho\cos\xi-\frac{d\,\rho}{d\,\tau}\cos\lambda,\quad y-y_0=\rho\cos\eta-\frac{d\,\rho}{d\,\tau}\cos\mu,$$
$$z-z_0=\rho\cos\zeta-\frac{d\,\rho}{d\,\tau}\cos\nu;$$

le quali innalzate a quadrato ed aggiunte determinano $R^2=\rho^2+\left(\frac{d\,\rho}{d\,\tau}\right)^2$.

78. — Quando in una superficie le normali infinitamente vicine si segano a due a due, il luogo dei loro punti d'incontro dicesi *linea di curvatura*, la direzione ν del segmento $d\nu$ è parallela a t, cioè $\cos(t\nu)=1$; onde sussiste la serie di ragioni eguali $\frac{d\cos\alpha'}{\cos\alpha}=\frac{d\cos\beta'}{\cos\beta}=\frac{d\cos\gamma'}{\cos\gamma}$, ed a motivo della relazione (4) ciascuna di queste ragioni è $\frac{d\nu}{1}=\frac{d\,s}{r}$. Inoltre differenziando $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ si ricava $\Sigma\cos\alpha\,d\cos\alpha=0$, e sostituendovi le quantità proporzionali avremo (I) $\Sigma\,d\cos\alpha'\,d\cos\alpha=0$, sussistente pure per le curve geodetiche; infatti per queste linee la normale principale coincide in direzione con la normale alla superficie, quindi la serie $\frac{d\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\frac{d\cos\beta}{\cos\beta'}=\frac{d\cos\gamma}{\cos\gamma'}=d\sigma=\frac{d\,s}{\rho}$ per la (6). Col differenziare l'identità $\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'=1$ e sostituire ai coseni le quantità proporzionali della serie precedente si trova la stessa equazione (I), che si può ancora scrivere $\Sigma\,d\cos\alpha'\,d\frac{d\,x}{d\,s}=0$. Risolvendo rispetto alla derivata seconda della variabile s resulta $\frac{d^2s}{d\,s}=\frac{\Sigma\,d^2x\,d\cos\alpha'}{\Sigma\,d\,x\;d\cos\alpha'}$;

la quale, a motivo dei differenziali $d \cos z' = -\frac{d h}{h^2}\frac{d f}{d x} + \frac{1}{h} d \frac{d f}{d x}, \ldots\ldots$ e dell'identità $\Sigma \frac{d f}{d x} d^2 x = - \Sigma \, d x \, d \frac{d f}{d x}$ ricavata dalla $\Sigma \, d x \frac{d f}{d x} = 0$, si trasforma in (II) $\frac{d^2 s}{d s} = \frac{d h}{h} + \frac{\Sigma \, d^2 x \, d \frac{d f}{d x}}{\Sigma \, d x \, d \frac{d f}{d x}}$, relazione dovuta all'illustre geometra F. Joachimsthal (*). Nelle superficie quadriche, in virtù dell'eguaglianza $\Sigma \, d^2 x \, d \frac{d f}{d x} = \Sigma \, d x \, d^2 \frac{d f}{d x} = \frac{1}{2} \Sigma \, d \left(d x \, d \frac{d f}{d x} \right)$, la precedente equazione differenziale di second'ordine diviene

$$\frac{d^2 s}{d s} = \frac{d h}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Sigma \, d \left(d x \, d \frac{d f}{d x} \right)}{\Sigma \, d x \, d \frac{d f}{d x}},$$

ed ha per primo integrale $\log \left(h^2 \Sigma \frac{d x}{d s^2} \, d \frac{d f}{d x} \right) = costante$, da cui si trae (III) $h^2 \Sigma \frac{d x}{d s} \frac{d \frac{d f}{d x}}{d s} = J$, dove J simboleggia una costante. E siccome l'eguaglianza (9) della pag. 219 per la sostituzione di $\cos z' = \frac{1}{h}\frac{d f}{d x}, \ldots\ldots$ acquista la forma (IV) $\Sigma \frac{d x}{d s} \frac{d \frac{d f}{d x}}{d s} = \frac{h}{r}$, l'antecedente si esprime con (V) $\frac{h^3}{r} = J$. Per es., nella quadrica $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(A x^2 + B y^2 + C z^2 - 1) = 0$, detta p la distanza del centro dal piano tangente, si hanno le derivate $\frac{d f}{d x} = A x$, $\frac{d f}{d y} = B y$, $\frac{d f}{d z} = C z$, quindi $h = \frac{1}{p}$, e la (IV) si traduce in $A \left(\frac{d x}{d s}\right)^2 + B \left(\frac{d y}{d s}\right)^2 + C \left(\frac{d z}{d s}\right)^2 = \frac{1}{p r}$; il primo membro significa il reciproco quadrato del semidiametro d parallelo alla tangente nel punto (x, y, z) della linea di curvatura; onde risulta $d^2 = p r$, e dalla (V) si deduce $p d = \sqrt{\frac{1}{J}}$. Il qual teorema di Joachimsthal sussiste ancora per le quadriche prive di centro $f(x. y, z) = \frac{1}{2}(A x^2 + B y^2 - 2 z) = 0$, poichè segando questa superficie per il piano $A X x + B Y y - Z - z + l = 0$ parallelo al piano tangente nel punto (x, y, z) si troveranno le coordinate

(*) *Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturæ in superficiebus secundi gradus.* Tomo XXVI del Giornale di Crelle, anno 1842.

del centro della sezione espresse per $x, y, z+l$ ed $h=\frac{l}{p}$, dove p è la distanza dei due piani paralleli. Ora, simboleggiando con x', y', z' le coordinate dell'estremo del diametro d parallelo alla tangente nel punto (x, y, z) della linea di curvatura, eliminandole per l'equazioni $x'-x=\frac{dx}{ds}.d$, $y'-y=\frac{dy}{ds}.d$, $z'-(z+l)=\frac{dz}{ds}.d$, $Ax'^2+By'^2=2z'$, a motivo dell'identità $Ax\,dx+By\,dy=dz$ si giunge all'equazione $A\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+B\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=\frac{2l}{d^2}$; inoltre la (IV) si riduce alla forma $A\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+B\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=\frac{h}{r}=\frac{l}{pr}$, e dal paragone si trae $d^2=2pr$; onde per la (V) ne consegue $pd=\sqrt{\frac{2l^3}{J}}$.

Nel caso di $B=A$ la superficie quadrica è di rotazione intorno all'asse Oz, il raggio di curvatura della linea meridiana $Ax^2+Cz^2=1$, (oppure $Ax^2=2z$) è misurato da $R=\frac{1}{ACp^3}$, $\left(\text{od } \frac{l^3}{Ap^3}\right)$ ed a motivo della (V) si conchiude $\frac{R}{r}=\frac{J}{AC}=costante$; dunque *nelle superficie quadriche di rotazione il raggio di curvatura della meridiana sta al raggio di curvatura della geodetica nel punto comune in un rapporto costante:* proprietà dovuta a Gudermann (Crelle, tomo XVII).

79. — Siano x', y', z' le coordinate del centro di curvatura della sezione normale in un punto della superficie $f(x, y, z)=0$; dall'equazioni della normale risultano (1) $x-x':\frac{df}{dx}=y-y':\frac{df}{dy}=z-z':\frac{df}{dz}=r:h=\lambda$; in particolare per l'ellissoide (2) $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}-1\right)=0$ vengono $x=x'+\frac{\lambda x}{a^2}$, $y=y'+\frac{\lambda y}{a^2-b^2}$, $z=z'+\frac{\lambda z}{a^2-c^2}$; col differenziarle si passerà alla normale infinitamente vicina, perciò considerando costanti le x', y', z' si traggono le ragioni $dx:\frac{x}{a^2-\lambda}=dy:\frac{y}{a^2-b^2-\lambda}=$ $=dz:\frac{z}{a^2-c^2-\lambda}=d\lambda$, ed in virtù della condizione $\Sigma\, dx\frac{df}{dx}=0$ si ottiene (3) $\frac{x^2}{a^2(a^2-\lambda)}+\frac{y^2}{(a^2-b^2)(a^2-b^2-\lambda)}+\frac{z^2}{(a^2-c^2)(a^2-c^2-\lambda)}=0$, che aggiunta col prodotto della (2) per il fattore $\frac{2}{\lambda}$ dà la superficie di second'ordine (4) $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{a^2-b^2-\lambda}+\frac{z^2}{a^2-c^2-\lambda}=1$.

Le quadriche (2), (4) sono ortogonali fra loro, perchè i piani $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{a^2-b^2}+\frac{Zz}{a^2-c^2}=0$, $\frac{Xx}{a^2-\lambda}+\frac{Yy}{a^2-b^2-\lambda}+\frac{Zz}{a^2-c^2-\lambda}=0$,

paralleli ai loro piani tangenti, risultano perpendicolari fra loro a motivo della relazione (3). Questa è di secondo grado rispetto alla differenza $u=a^2-\lambda$, ed indicate con μ^2, ν^2 le radici u, i due valori $a^2-\mu^2$, $a^2-\nu^2$ dell'incognita λ esprimeranno i quadrati dei semiassi d_μ, d_ν della sezione diametrale dell'ellissoide (2), eziandio parallela al piano tangente nel punto (x, y, z), e rappresenteranno pure i rapporti dei raggi principali di curvatura alla quantità h. Origina dunque il sistema triplo ortogonale $\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$, $(\rho=a, \mu, \nu)$ con i parametri $a>c>\mu>b>\nu$; sendo la prima superficie un'ellissoide e le altre iperboloidi ad una e a due falde.

Ordinando la (3) rispetto ad $u=a^2-\lambda$ si ottengono dai coefficienti le eguaglianze $\mu^2+\nu^2=(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2y^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2z^2}{a^2-c^2}$, $\mu^2\nu^2=\frac{b^2c^2x^2}{a^2}$; ed in virtù della stessa (2) facilmente si conchiude $a^2+\mu^2+\nu^2=$ $=b^2+c^2+x^2+y^2+z^2$, la quale conduce alla relazione fra i quadrati degli assi e dei diametri coniugati $r^2+(a^2-\mu^2)+(a^2-\nu^2)=$ $=a^2+(a^2-b^2)+(a^2-c^2)$, dove è $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Parimente la (3), ridotta a forma intera ed ordinata rispetto a λ, ha per termine indipendente $\frac{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{p^2}$; e p nell'ellissoide simboleggia la distanza del centro dal piano tangente. Eguagliando questa espressione al prodotto $(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)$ dei due valori di λ si ottiene il noto teorema, il volume del parallelepipedo costruito sui diametri coniugati equivalere al parallelepipedo costruito sugli assi; ne consegue (5) $p=a\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}}$.

L'equazione (4), ridotta a forma intera, è una cubica in u avente per radici a^2, μ^2, ν^2 e quindi l'identità

$$u(u-b^2)(u-c^2)-x^2(u-b^2)(u-c^2)-y^2u(u-c^2)-z^2u(u-b^2)=$$
$$=(u-a^2)(u-\mu^2)(u-\nu^2);$$

dalle quali discendono le relazioni

$$(6)\quad a^2+\mu^2+\nu^2=b^2+c^2+x^2+y^2+z^2,$$
$$b^2c^2+x^2(b^2+c^2)+c^2y^2+b^2z^2=a^2\mu^2+a^2\nu^2+\mu^2\nu^2,\quad b^2c^2x^2=a^2\mu^2\nu^2.$$

Attribuendo ad u i valori 0, b^2, c^2 si traggono dall'identità le coordinate cartesiane dei punti comuni alle tre quadriche ortogonali e concentriche, cioè

$$(7)\quad x=\pm\frac{a\mu\nu}{bc},\quad y=\pm\frac{1}{b}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(b^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)}{b^2-c^2}},$$
$$z=\pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{(a^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}.$$

Le variabili μ, ν sono le *coordinate ellittiche* (o *di Lamé*), facendo $\mu = \nu = \pm b$ si ottengono i quattro umbilichi; ogni equazione della forma $f(\mu, \nu) = 0$ rappresenterà una linea s descritta sulla superficie ellissoidica e le coordinate cartesiane saranno funzioni di una delle μ, ν; così, per esempio, $\mu = costante$ significa la linea di curvatura dell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1$ prodotta dalla sua intersezione con l'iperboloide ad una falda $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1$. Osservando essere $h = \frac{1}{p}$ e simboleggiando con r_μ, r_ν i due raggi principali di curvatura corrispondenti ai due valori di $\lambda = \frac{r}{h}$ si deducono le formule (8) $r_\nu = \frac{a^2 - \mu^2}{p}$, $r_\mu = \frac{a^2 - \nu^2}{p}$. Se p rimanga costante, sussisterà l'equazione (9) $(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2) = costante$, che in coordinate ellittiche rappresenta la curva *polodia* di Poinsot; luogo dei punti di contatto dei piani tangenti all'ellissoide e ad una sfera concentrica, od anche il luogo dei punti dell'ellissoide che hanno costante il prodotto dei raggi principali di curvatura.

Se la linea di curvatura $\mu = costante$ sia segata da una linea sotto l'angolo i, l'equazione di Euler dà il raggio corrispondente $\frac{1}{r} = \frac{cos^2 i}{r_\mu} + \frac{sen^2 i}{r_\nu}$; ovvero, sostituendovi i trovati valori di r_μ, r_ν, ne conseguirà $\frac{1}{rp} = \frac{cos^2 i}{a^2 - \nu^2} + \frac{sen^2 i}{a^2 - \mu^2}$; ed a motivo di $rp = d^2$ e della surriferita espressione di p si conchiude

$$(10) \quad \mu^2 cos^2 i + \nu^2 sen^2 i = a^2 - \frac{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{p^2 d^2},$$

formula di Chasles per le geodetiche (*Journal de Liouville*, tomo XI, pag. 105).

Dalle relazioni (6), $\mu^2 + \nu^2 = r^2 + b^2 + c^2 - a^2$, $\mu\nu = \frac{bcx}{a}$, si deducono $\mu \pm \nu = \left(r^2 + b^2 + c^2 - a^2 \pm \frac{2bcx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; ora le tangenti condotte dall'ellissoide a due sfere descritte con lo stesso raggio α, con i centri alla distanza $\pm \delta$ dall'origine, e simmetrici rispetto a questo punto, si esprimono per $\frac{t}{t'} = [(x + \delta)^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2]^{\frac{1}{2}} = (r^2 + \delta^2 - \alpha^2 \pm 2\delta x)^{\frac{1}{2}}$; confrontando queste con le precedenti eguaglianze si osserva i secondi membri divenire identici per $\delta = \frac{bc}{a}$, $\alpha = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$; quindi risultano $t = \mu + \nu$, $t' = \mu - \nu$, cioè $t + t' = 2\mu$, $t - t' = 2\nu$; dunque, *se da ciascun punto di una linea di curvatura dell'ellissoide si tira*

una coppia di tangenti alle sfere focali, sarà costante la loro somma o differenza, secondochè si consideri $\mu =$ costante, *oppure* $\nu =$ costante.

Si avverta il raggio α coincidere con la parte della normale tirata dall'umbilico dell' ellissoide fino ad incontrare l'asse Ox. Le suddette formule (6) contengono le coordinate cartesiane dei punti della linea di curvatura ed i semiassi a, μ, ν delle tre quadriche omofocali, segantisi due a due secondo linee di curvatura per ciascuna superficie. È ben noto come l'illustre Monge dimostrò esser coniche le proiezioni di queste linee sopra i piani coordinati, e si verifica agevolmente eliminando una delle x, y, z fra l'equazione (2) ed una delle altre quadriche ortogonali; per esempio la linea $\mu = costante$ si proietta sui piani xOz, yOz secondo le rispettive ellissi

$$\frac{b^2 x^2}{a^2 \mu^2} + \frac{(c^2 - b^2) z^2}{(a^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = 1, \quad \frac{c^2 x^2}{a^2 \mu^2} + \frac{(c^2 - b^2) y^2}{(a^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} = 1.$$

Or poichè le sezioni cicliche dell'ellissoide (2) fanno col piano xOy l'angolo θ determinato da $\cos\theta = \pm \frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}}$, sostituendo $x = X\cos\theta$, $y = Y$, si trova la proiezione della linea di curvatura $\mu = costante$ sul piano parallelo ad una sezione ciclica simboleggiarsi per $\frac{X^2}{\mu^2} + \frac{Y^2}{\mu^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}$; similmente $\frac{X^2}{\nu^2} - \frac{Y^2}{b^2 - \nu^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}$ è la proiezione della linea di curvatura $\nu = costante$ sopra il medesimo piano: i due sistemi di coniche hanno gli stessi fuochi nelle proiezioni degli umbilichi, i respettivi semiassi dell'ellisse e dell'iperbole sono $\mu_0 = \mu\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}}$, $\nu_0 = \nu\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}}$, coordinate ellittiche di un punto del piano XOY.

Il prof. Aoust, nei *Comptes-Rendus* dell'anno 1859, diè il teorema: *Per ogni linea di curvatura dell'ellissoide passano tre superficie quadriche di rotazione che hanno gli assi coincidenti con quelli dell'ellissoide:* così, eliminando ν fra la prima e l'ultima delle (6), pag. 226, si ottiene $\mu^2(y^2 + z^2) + x^2\left(\mu^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}\right) = \mu^2(\mu^2 + a^2 - b^2 - c^2)$, che significa un'ellissoide di rotazione avente per asse il coordinato Ox; e posto $z = 0$ risulta l'ellisse meridiana $\mu^2 y^2 + x^2(\mu^2 - \delta^2) = \mu^2(\mu^2 + \alpha^2 - \delta^2)$, la quale si può scrivere sotto la forma

$$\sqrt{y^2 + (x - \delta)^2 - \alpha^2} + \sqrt{y^2 + (x + \delta)^2 - \alpha^2} = 2\mu;$$

dunque la somma delle distanze di ciascun punto della curva dai due cerchi focali di raggio α è la costante 2μ, proprietà comune alla linea di curvatura dell' ellissoide giacente sopra la suddetta superficie di rotazione.

Nel paraboloide ellittico (11) $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2z}{c}\right)=0$ la normale ha per equazioni $x-x_1 : \frac{x}{a^2} = y-y_1 : \frac{y}{b^2} = z-z_1 : -\frac{1}{c} = \frac{r}{h} = \lambda$; da cui derivansi le ragioni $dx : \frac{x}{a^2-\lambda} = dy : \frac{y}{b^2-\lambda} = dz : -\frac{1}{c} = d\lambda$, e la condizione $\Sigma\, dx \frac{df}{dx} = 0$ si converte in

$$(12) \quad \frac{x^2}{a^2(a^2-\lambda)} + \frac{y^2}{b^2(b^2-\lambda)} + \frac{1}{c^2} = 0,$$

dove λ ha per radici i quadrati dei semiassi μ, ν della sezione parallela al piano tangente condotto nel punto (x, y, z) del paraboloide; ne discendono le relazioni

$$\mu^2+\nu^2 = a^2+b^2+2cz, \quad \mu^2\nu^2 = a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right) = a^2b^2h^2.$$

Se questa sezione giaccia nel piano $\frac{cXx}{a^2}+\frac{cYy}{b^2}-Z-z-l=0$, verrà $h=\frac{l}{p}$, in cui p misura la distanza dei piani paralleli; e perciò $\pi p \mu \nu = \pi a b l$, ovvero *il volume del cilindro avente per base la sezione ellittica e per altezza la distanza fra i due piani paralleli è costante*: proposizione dell'illustre geometra Domenico Chelini, delle Scuole Pie (nato in Gragnano lucchese ai 18 ottobre 1802 e morto in Roma il 16 novembre 1878). I raggi principali di curvatura corrispondenti ai due valori di λ sono (13) $r_\mu = \frac{\mu^2 l}{p} = \frac{\mu^3\nu}{ab}$, $r_\nu = \frac{\nu^2 l}{p} = \frac{\nu^3\mu}{ab}$. Aggiungendo la (11) con l'equazione del paraboloide scritta sotto la forma $\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2z}{c}\right)=0$ si ottiene (14) $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{\lambda}{c^2}=\frac{2z}{c}$; la quale per i valori μ^2, ν^2 di λ rispetto ad un punto dato (x, y, z) del paraboloide rappresenta due superficie omofocali al paraboloide ed ortogonali fra loro. Indicando con i l'angolo che una direzione fa con la linea di curvatura $\mu = costante$, la sezione ellittica si esprimerà con $\frac{d^2 \cos^2 i}{\mu^2}+\frac{d^2 \operatorname{sen}^2 i}{\nu^2}=1$, da cui risulta $\mu^2 \operatorname{sen}^2 i + \nu^2 \cos^2 i = \left(\frac{\mu\nu}{d}\right)^2 = \alpha^2$; dove α significa la perpendicolare menata sul diametro $2d$ per un estremo del suo coniugato.

In generale, se pongasi u in luogo di λ, l'equazione (14) ridotta a forma intera diverrà

$$u(u-a^2)(u-b^2)-2cz(u-a^2)(u-b^2)-c^2x^2(u-b^2)-c^2y^2(u-a^2)=0;$$

che nell'ipotesi di $a > b$ ha le tre radici reali $\lambda < \mu < \nu$ rispettivamente comprese fra gl'intervalli $-\infty \dots b^2$, $b^2 \dots a^2$, e $a^2 \dots +\infty$; sostituendole nella (13) si conchiude per ogni punto (x, y, z) dello spazio passare tre paraboloidi ortogonali fra loro, due ellittici dati per le radici λ, ν e l'altro iperbolico. Eguagliando il primo membro della cubica al prodotto $(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)$ e attribuendo ad u i valori a^2, b^2 avremo

$$(15)\quad x^2 = -\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{c^2(a^2-b^2)}, \quad y^2 = -\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{c^2(a^2-b^2)};$$

identificando i coefficienti della u^2 verrà $z = \frac{1}{2c}(\lambda+\mu+\nu-a^2-b^2)$, formule determinanti i punti comuni alle tre superficie: le variabili λ, μ, ν si dicono *coordinate paraboliche*. Per $\lambda = 0$ si ha la superficie simboleggiata dalla (11); le sue linee di curvatura vengono espresse per μ ovvero ν, pari ad una costante; mediante i valori $\mu = \nu = a^2$, le formule (15) daranno le coordinate dei due umbilichi.

80. — Il professor Michael Roberts, investigando la teoria degl'integrali iperellittici, giunse a determinare in quali casi le linee di curvatura delle quadriche a centro siano rettificabili per integrali ellittici (*), e fondò le sue eleganti disquisizioni sulla seguente verità di Jacobi:

L'integrale iperellittico (1) $\displaystyle\int_0^z \frac{f(z^2)\,dz}{\sqrt{Z}}$,

dove $Z = (1-z^2)(1-k^2z^2)(1-k_1^2z^2)(1-k_2^2z^2)$ *ed* $f(z^2)$ *è una funzione razionale di* z^2, *riducesi alla somma algebrica d'integrali ellittici, quando uno dei moduli* k, k_1, k_2 *positivi e minori di uno eguaglia il prodotto degli altri due.*

Infatti nel polinomio Z facciasi $z^2 = \lambda x^2$ e nel trasformato X identificando i coefficienti estremi e gli equidistanti dagli estremi si troveranno $k k_1 k_2 \lambda^2 = 1$, $(k k_1 k_2 + k k_1 + k_1 k_2 + k_2 k)\lambda^2 = k + k_1 + k_2 + 1$; eliminando λ fra queste risulta la condizione $k k_1 k_2 (k + k_1 + k_2 + 1)^2 = (k k_1 k_2 + k k_1 + k_1 k_2 + k_2 k)^2$; da cui si traggono per k i valori $k_1 k_2$, $\frac{k_1}{k_2}$, $\frac{k_2}{k_1}$. Per la prima radice viene $\lambda = \frac{1}{k_1 k_2}$, $\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}}\frac{dx}{\sqrt{X}}$, dove $X = 1 - \alpha x^2 + \beta x^4 - \alpha x^6 + x^8$ ha i coefficienti

$$\alpha = \frac{1}{k_1 k_2}(1+k_1^2)(1+k_2^2), \quad \beta = 2 + (1+k_1^2 k_2^2)\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right).$$

Ora il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ fu da Legendre decomposto in due differenziali ellittici di prima specie, perchè scrivendo $x + \frac{1}{x} = y$ si rica-

(*) *A tract on the addition of elliptic and hyperelliptic integrals.* Dublin, 1871.

vano $\frac{2}{x} = y + \sqrt{y^2 - 4}$, $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{Y}}\left(\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-4}} + dy\right)$, in cui $Y = y^4 - (\alpha + 4) y^2 + 2 + 2\alpha + \beta$, e ponendo $y^2 - 4 = t^2$, $T = t^4 - (\alpha - 4) t^2 + 2 - 2\alpha + \beta$, il suddetto differenziale assume la forma

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{\sqrt{T}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}}\right).$$

I polinomi biquadratici Y, T racchiudono soltanto le potenze di grado pari delle variabili respettive y, t, ed il loro discriminante essendo $\alpha^2 - 4\beta + 8 = \frac{1}{(k_1 k_2)^2}(1 - k_1^2)^2 (1 - k_2^2)^2$ hanno per radici

$$y_1^2 = \frac{1}{k_1 k_2}(1 + k_1 k_2)^2, \quad y_2^2 = \frac{1}{k_1 k_2}(k_1 + k_2)^2,$$
$$t_1^2 = \frac{1}{k_1 k_2}(1 - k_1 k_2)^2, \quad t_2^2 = \frac{1}{k_1 k_2}(k_1 - k_2)^2.$$

Eseguite le sostituzioni $y = \frac{y_1}{sen\,\varphi_1}$, $t = \frac{t_1}{sen\,\varphi_2}$, $\frac{y_2}{y_1} = h_1 = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2}$, $\frac{t_2}{t_1} = h_2 = \frac{k_1 - k_2}{1 - k_1 k_2}$ nel precedente differenziale, sendo φ_1, φ_2 variabili, si avrà integrando

$$(2) \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{F(h_1, \varphi_1)}{2(1 + k_1 k_2)} + \frac{F(h_2, \varphi_2)}{2(1 - k_1 k_2)},$$

avvertendo essere $k = k_1 k_2$ nel polinomio Z insieme alle relazioni

$$k_1 k_2 z + \frac{1}{z} = \frac{1 + k_1 k_2}{sen\,\varphi_1}, \quad t = \frac{1}{x} - x, \quad -k_1 k_2 z + \frac{1}{z} = \frac{1 - k_1 k_2}{sen\,\varphi_2}.$$

In simil modo per l'eguaglianze $2x = y - \sqrt{y^2 - 4}$, $\sqrt{X} = x^2 \sqrt{Y}$ si ricava (3) $\int_0^z \frac{z^2 dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{2 k_1 k_2}\left[\frac{F(h_2, \varphi_2)}{1 - k_1 k_2} - \frac{F(h_1, \varphi_1)}{1 + k_1 k_2}\right]$; a motivo dell'identità $x^2 dx = \frac{1}{2}(y^2 - 1)\,dy - \frac{y(y^2 - 3)\,dy}{2\sqrt{y^2 - 4}}$ risulta

$$\frac{z^4 dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{(k_1 k_2)^{\frac{5}{2}}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{(k_1 k_2)^{\frac{5}{2}}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{2(k_1 k_2)^{\frac{5}{2}}}\left[\frac{dy(y^2 - 1)}{\sqrt{Y}} - \frac{dt(t^2 + 1)}{\sqrt{T}}\right];$$

la quale, per i surriferiti integrali $\int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, $\int_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{T}}$ e dei seguenti

$$\int_y^{\infty} \frac{y^2 dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1+k_1 k_2}{\sqrt{k_1 k_2}} [F(h_1, \varphi_1) - E(h_1, \varphi_1) - cot\, \varphi_1 \, \Delta(h_1, \varphi_1)],$$

$$\int_t^{\infty} \frac{t^2 dt}{\sqrt{T}} = \frac{1-k_1 k_2}{\sqrt{k_1 k_2}} [F(h_2, \varphi_2) - E(h_2, \varphi_2) - cot\, \varphi_2 \, \Delta(h_2, \varphi_2)],$$

conduce all' espressione

$$(4) \int_0^z \frac{z^4 dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{2(k_1 k_2)^3} \Big[(1+k_1 k_2)\Big(cot\,\varphi_1 \, \Delta(h_1, \varphi_1) + E(h_1, \varphi_1)\Big) - \frac{1+k_1 k_2 + k_1^2 k_2^2}{1+k_1 k_2} F(h_1, \varphi_1)\Big] - (1-k_1 k_2)\Big[cot\,\varphi_2 \, \Delta(h_2, \varphi_2) + E(h_2, \varphi_2) + \frac{1-k_1 k_2 + k_1^2 k_2^2}{1-k_1 k_2} F(h_2, \varphi_2)\Big].$$

Se nel differenziale iperellittico $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$

con $Z = (1-z^2)(1-k^2 z^2)(1-k_1^2 z^2)(1-k_2^2 z_2^2)$

si operi la sostituzione $z^2 = \frac{1-u^2}{1-\alpha u^2}$, e nel differenziale trasformato

$$\frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}(1-\alpha u^2)\, du}{\sqrt{(1-k^2)(1-k_1^2)(1-k_2^2)\, U}},$$

con $U = (1-u^2)(1-\alpha u^2)\left(1-\frac{\alpha-k^2}{1-k^2}u^2\right)\left(1-\frac{\alpha-k_1^2}{1-k_1^2}u^2\right)\left(1-\frac{\alpha-k_2^2}{1-k_2^2}u^2\right)$,

si attribuisca all' indeterminata α il valore k^2, il precedente differenziale riducesi alla stessa classe del primo, ed i quadrati dei suoi moduli scritti in ordine decrescente saranno k^2, $\frac{k^2-k_2^2}{1-k_2^2}$, $\frac{k^2-k_1^2}{1-k_1^2}$; dunque applicando il teorema di Jacobi si conchiude questa seconda proposizione: *nell' ipotesi* $\frac{k^2-k_1^2}{1-k_1^2} = k^2\left(\frac{k^2-k_2^2}{1-k_2^2}\right)$, *ovvero* $k = k_1\sqrt{\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}}$, *gl' integrali iperellittici* $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, $\int_0^z \frac{z^2 dz}{\sqrt{Z}}$ *sono convertibili in ellittici.*

Nel differenziale $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-h^2 sen^2 \varphi}}$ si sostituisca a φ la variabile u collegata per $tang\, \varphi = \frac{(1-m)\, u}{1+m u^2}$, sendo h ed m numeri arbitrari; ne risulterà l'espressione $\frac{d\varphi}{\Delta(h, \varphi)} = (1-m)(1-m u^2)\frac{du}{\sqrt{U}}$, in cui

$$U = (1+u^2)(1+m^2 u^2)\Big[1+\Big(1+m^2-h^2(1-m)^2\Big)u^2+m^2 u^4\Big],$$

e posto $m = -k_1 k_2$, $1 + m^2 - h^2(1-m)^2 = k_1^2 + k_2^2$ si ricaveranno

$$h^2 = \frac{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}{(1+k_1 k_2)^2}, \quad tang\, \varphi = \frac{(1+k_1 k_2)\, u}{1 - k_1 k_2 u^2},$$
$$\frac{d\varphi}{\Delta(h, \varphi)} = (1+k_1 k_2)(1+k_1 k_2 u^2)\frac{du}{\sqrt{U}},$$

dove $U = (1+u^2)(1+k_1^2 k_2^2 u^2)(1+k_1^2 u^2)(1+k_2^2 u^2)$; mutando il segno alle costanti k_1 e k_2, detti h' il modulo e φ' l'angolo corrispondente allo stesso valore di u, verrà

$$\frac{d\varphi'}{\Delta(h', \varphi')} = (1-k_1 k_2)(1-k_1 k_2 u^2)\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Sottraendo ed aggiungendo questi due differenziali membro a membro, e poi integrando le nuove eguaglianze, si avranno

$$F(h, \varphi) - F(h', \varphi') = 2 k_1 k_2 \int_o^u (1+u^2)\frac{du}{\sqrt{U}},$$
$$F(h, \varphi) + F(h', \varphi') = 2 \int_o^u (1+k_1^2 k_2^2 u^2)\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Queste, per il cambiamento di k_1^2, k_2^2 nelle rispettive differenze $1-k_1^2$, $1-k_2^2$ e per la sostituzione $u = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, si trasformano negl'integrali

$$(5) \quad \int_o^z \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{F(h, \varphi) - F(h', \varphi')}{2\sqrt{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}},$$
$$(6) \quad \int_o^z (1-k^2 z^2)\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{2}\left[F(h, \varphi) + F(h', \varphi')\right],$$

dove $Z = (1-z^2)(1-k^2 z^2)(1-k_1^2 z^2)(1-k_2^2 z^2)$ e $k^2 = k_1^2 + k_2^2 - k_1^2 k_2^2$; dunque *gl' integrali iperellittici* $\int_o^z \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, $\int_o^z \frac{z^2 dz}{\sqrt{Z}}$ *sono riducibili alla somma algebrica d' integrali ellittici di prima specie, se fra i quadrati dei loro moduli* k, k_1, k_2 *sussista la relazione* $1-k^2 = (1-k_1^2)(1-k_2^2)$. Possiamo pur dimostrare che *l' integrale*

$$I = \int_o^t (1-t^2)(1-k^2 t^2)\frac{dt}{\sqrt{T}} \quad con \quad T = (1-t^2)(1-k^2 t^2)(1-k_1^2 t^2)(1-k_2^2 t^2)$$

è riducibile alla somma algebrica di due ellittici di 2ª specie nell'ipotesi di $k = k_1 k_2$. Infatti, scrivendo $t = \frac{u}{\sqrt{k_1 k_2}}$, il detto integrale si tras-

forma in $I = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \int_0^u du \left[\frac{1 - u^2 \left(k_1 k_2 + \frac{1}{k_1 k_2}\right) + u^4}{1 - u^2 \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right) + u^4} \right]^{\frac{1}{2}}$, e mediante la sostituzione $u + \frac{1}{u} = v$, ovvero $2u = v \pm \sqrt{v^2 - 4}$, dove il segno del radicale si prende negativo o positivo secondochè u sia minore o maggiore di uno, l' integrale si converte in

$$\frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \int \left(dv \pm \frac{v\,dv}{\sqrt{v^2 - 4}}\right) \left(\frac{\alpha^2 - v^2}{\beta^2 - v^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

sendo $\alpha = \sqrt{k_1 k_2} + \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$. Infine, facendo $v = \beta\, sen\, \varphi$, $h = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2}$, $v^2 - 4 = w^2$, $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} - \sqrt{k_1 k_2}$, $\beta_1 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$, $w = \beta_1\, sen\, \varphi'$, $h' = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{k_1 - k_2}{1 - k_1 k_2}$, si troverà il valore (7) $I = \frac{1 + k_1 k_2}{2\, k_1 k_2} E(h, \varphi) \pm \left(\frac{1 - k_1 k_2}{2\, k_1 k_2}\right) E(h', \varphi')$.

81. — L' elemento ds della linea di curvatura $\mu = costante$ si può esprimere in funzione delle coordinate ellittiche, perchè dalle formule (7), pag. 226, si hanno i differenziali

$$dx = \frac{a\,\mu}{b\,c}\,d\nu, \quad dy = -\frac{\nu\,d\nu}{b} \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}},$$

$$dz = -\frac{\nu\,d\nu}{c} \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{(c^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

e quindi verrà $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = d\nu \sqrt{\frac{(a^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}$; posto $\nu = b\, sen\, \theta$, l' infinitesimo dell' arco s acquista la forma

$$ds = \frac{d\theta\,[a^2 \mu^2 - b^2 (a^2 + \mu^2)\, sen^2 \theta + b^4\, sen^4 \theta]}{\sqrt{(a^2 - b^2 sen^2 \theta)(\mu^2 - b^2 sen^2 \theta)(c^2 - b^2 sen^2 \theta)}},$$

differenziale iperellittico di primo genere con i moduli $\frac{b}{\mu} > \frac{b}{c} > \frac{b}{a}$; ed affinchè si riduca ellittico, per il teorema di Jacobi si scriverà $\frac{b}{a} = \frac{b}{\mu} \cdot \frac{b}{c}$, cioè $\mu = \frac{ab}{c} < c$, ovvero $c > \sqrt{ab}$. Altrimenti, ammettendo la condizione $1 - k^2 = (1 - k_1^2)(1 - k_2^2)$, con $k = \frac{b}{\mu}$, si ottiene il valore $\mu = \frac{a\,c}{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}$, sempre compreso fra b e c.

Anche la condizione $k = k_1 \sqrt{\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}}$, ove $k = \frac{b}{\mu}$, $k_1 = \frac{b}{c}$, conduce al terzo valore $\mu = a \sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}$ più piccolo di c, e non sorpasserà b quando sia verificata la diseguaglianza $b^2 > a^2 - a\sqrt{a^2-c^2}$; dunque *le linee d' intersezione dell' ellissoide*

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{a^2-c^2} = 1,$$

con ciascuno dei tre iperboloidi ad una falda

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2 b^2} + \frac{y^2}{(a^2-c^2)\,b^2} - \frac{z^2}{c^4-a^2 b^2} = \frac{1}{c^2},$$

$$(3)\quad \frac{x^2}{a^2 c^2} + \frac{y^2}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)} - \frac{z^2}{c^2(c^2-b^2)} = \frac{1}{a^2+c^2-b^2},$$

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2(c^2-b^2)} + \frac{y^2}{a^2c^2-2a^2b^2+b^4} - \frac{z^2}{b^2(a^2-c^2)} = \frac{1}{a^2-b^2},$$

sono rettificabili per integrali ellittici.

Per la linea (1), (2) posto $k_1 = \frac{b}{\mu} = \frac{c}{a}$, $k_2 = \frac{b}{c}$, $z = sen\,\theta = \frac{\nu}{b}$ nelle formule (2), (3), (4) del num. 80, si ottiene

$$s = \frac{b}{2c^2}(a^2-c^2)\left[F(h,\varphi)+F(h',\varphi')\right] + \frac{a+b}{2}\left[cot\,\varphi\,\Delta(h,\varphi)+E(h,\varphi)\right] - \\ - \frac{a-b}{2}\left[cot\,\varphi'\,\Delta(h',\varphi')+E(h',\varphi')\right],$$

con i moduli $h = \frac{c^2+ab}{c(a+b)}$, $h' = \frac{c^2-ab}{c(a-b)}$ e le amplitudini espresse per $sen\,\varphi = \frac{(a+b)\nu}{ab+\nu^2}$, $sen\,\varphi' = \frac{(a-b)\nu}{ab-\nu^2}$; ora, i limiti di ν essendo 0 e b, ed i corrispondenti delle φ, φ' pari a 0 e $\frac{\pi}{2}$, il quadrante della linea di curvatura verrà misurato da

$$\frac{b(a^2-c^2)}{2c^2}\left[F\left(h,\frac{\pi}{2}\right)+F\left(h',\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{a+b}{2}E\left(h,\frac{\pi}{2}\right) - \frac{(a-b)}{2}E\left(h',\frac{\pi}{2}\right),$$

attesochè la parte algebrica di s divenga nulla ai detti limiti, ed invero $\frac{(a+b)}{2}cot\,\varphi\,\Delta(h,\varphi) - \frac{(a-b)}{2}cot\,\varphi'\,\Delta(h',\varphi')$ tradotto in funzione di ν equivale a $-\frac{\nu\sqrt{(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)(c^2\nu^2-a^2b^2)}}{c(ab+\nu^2)(ab-\nu^2)}$, che si annulla per $\nu = 0$, $\nu = b$, ...

Se prendiamo $\nu = costante$ e μ variabile, il differenziale della linea di curvatura s', comune all'ellissoide (1) ed all'iperboloide a due falde $\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2-\nu^2} - \frac{z^2}{c^2-\nu^2} = 1$, viene espresso per $ds' = d\mu \sqrt{\frac{(a^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}$, e si può dedurre dal surriferito ds per lo scambio delle lettere μ, ν. Ora, ponendo $\mu = \nu t$, si ha $ds' = \frac{\nu^2 dt (1-t^2)(a^2-\nu^2 t^2)}{\sqrt{(1-t^2)(a^2-\nu^2 t^2)(b^2-\nu^2 t^2)(c^2-\nu^2 t^2)}}$,

e per l'ipotesi $a > c > b$ risulteranno i moduli $\frac{\nu}{b} > \frac{\nu}{c} > \frac{\nu}{a}$; affinchè ds' si riduca ad un differenziale ellittico, dovrà sussistere una delle tre condizioni $\nu = \frac{bc}{a}$, $\nu = \frac{1}{b}\sqrt{(a^2+c^2)b^2-a^2c^2}$, $\nu = a\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}$; per la prima si verifica $\nu < b$, l'iperboloide corrispondente è $\frac{x^2}{b^2c^2} - \frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2-b^2)} = \frac{1}{a^2}$ ed il differenziale dell'arco di curvatura assume la forma $ds' = \frac{bc}{a}\frac{dt}{\sqrt{T}}(1-t^2)\left(1-\frac{b^2c^2}{a^4}t^2\right)$; onde, fatto $k_1 = \frac{c}{a}$, $k_2 = \frac{b}{a}$, $t = \frac{a\mu}{bc}$, $u = \frac{\mu}{\sqrt{bc}}$, rettificasi mediante la formula (7) del n. 80 facendo $k = \frac{bc}{a^2}$, $k_1 = \frac{c}{a}$, $k_2 = \frac{b}{a}$, e ne risulta

$$s' = \frac{a^2+bc}{2a} E(h, \varphi) \pm \frac{a^2-bc}{2a} E(h', \varphi'),$$

dove $sen\,\varphi = \frac{\mu^2+bc}{\mu(b+c)}$, $sen\,\varphi' = \pm\frac{(bc-\mu^2)}{\mu(c-b)}$, $h = \frac{a(c+b)}{a^2+bc}$, $h' = \frac{a(c-b)}{a^2-bc}$, ed il secondo termine di s' prendesi negativo o positivo, secondochè u sia minore o maggiore di uno, cioè μ più piccolo o più grande di $\sqrt{bc}$.

Affinchè le coordinate siano reali, la variabile μ deve esser compresa fra b e c, ed a questi limiti corrispondono due punti R, R' giacenti nei piani coordinati xOz, xOy, ed il punto R è un umbilico dell'ellissoide, gli angoli φ, φ' sono retti; indicando con M un punto della linea di curvatura determinato da un certo valore di $u < 1$ si trova

$$\grave{R M} = \frac{a^2+bc}{2a}\left[E(h,\varphi) - E\left(h, \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{a^2-bc}{2a}\left[E(h',\varphi') - E\left(h', \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Al punto P, in cui $\mu = \sqrt{bc}$, si avrà $\varphi = arc\ sen\ \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}$, $\varphi' = 0$, e quindi $RP = \frac{a^2+bc}{2a}\left[E(h,\varphi) - E\left(h, \frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{a^2-bc}{2a} E\left(h', \frac{\pi}{2}\right)$.

Per il valore $\mu = c$ si ha $u = \sqrt{\frac{c}{b}} > 1$, gli angoli φ, φ' sono retti, e rappresentando con M' un punto della medesima linea di curvatura compreso fra P ed R' si troveranno

$$\widehat{M'R'} = \frac{a^2 + bc}{2a}\left[E\left(h, \frac{\pi}{2}\right) - E(h, \varphi)\right] + \frac{a^2 - bc}{2a}\left[E\left(h', \frac{\pi}{2}\right) - E(h', \varphi')\right],$$

$$\widehat{PR'} = \frac{a^2 + bc}{2a}\left[E\left(h, \frac{\pi}{2}\right) - E(h, \varphi)\right] + \frac{a^2 - bc}{2a} E\left(h', \frac{\pi}{2}\right).$$

Aggiungendo gli archi RP, PR' si ottiene il quadrante

$$\widehat{RR'} = \frac{a^2 - bc}{a} E\left(h', \frac{\pi}{2}\right),$$

cioè *il perimetro di questa linea di curvatura pareggia quello dell'ellisse avente per semiasse maggiore* $\mathrm{a} - \frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{a}}$ *e per semidistanza focale* $\mathrm{c} - \mathrm{b}$. I punti M, M' diconsi associati se le variabili verifichino l'eguaglianza $\mu\mu' = bc$, e poichè vi corrispondono i valori $t' = \frac{\mu'}{\nu} = \frac{a}{\mu}$, $u' = \frac{t'}{a}\sqrt{bc} = \frac{1}{\mu}\sqrt{bc}$, ne discendono le relazioni

$$\widehat{RM} + \widehat{M'R'} = \frac{a^2 - bc}{a}\left[E\left(h', \frac{\pi}{2}\right) - E(h', \varphi')\right],$$

$$\widehat{RM} - \widehat{M'R'} = \frac{a^2 + bc}{a}\left[E(h, \varphi) - E\left(h, \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

E sottraendo la prima dal quadrante RR', il professor Roberts conchiuse l'elegante proposizione $\widehat{MM'} = \frac{a^2 - bc}{a} E(h', \varphi')$.

82. — *Linee geodetiche.* Sia definita una superficie per le coordinate ortogonali $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$, $z = \varphi_3(u, v)$, funzioni delle variabili indipendenti u, v, e per brevità s'introducano i simboli

$$E = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \quad G = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2;$$

nel rettangolo infinitesimo $MPM'P'$ racchiuso dalle curve determinate per le grandezze u, $u + du$, v, $v + dv$, la diagonale $MM' = ds$ faccia l'angolo θ col lato MP; avremo le relazioni

(1) $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$, (2) $du\sqrt{E} = ds\cos\theta$, $dv\sqrt{G} = ds\,\mathrm{sen}\,\theta$,

ed ancora (3) $ds = du\sqrt{E}\cos\theta + dv\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Affinchè la linea s risulti la più breve nell'unire i due punti fissi M_0, M_1 dati per i numeri (u_0, v_0), (u_1, v_1) dovrà annullarsi la variazione δs dell'integrale $s = \int_{u_0}^{u_1} (du \sqrt{E} \cos\theta + dv \sqrt{G} \operatorname{sen}\theta)$, quando si consideri variare di grandezza la sola v (oppure la u); perciò si trae la condizione

$$\int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{d}{dv} (\cos\theta \sqrt{E}\, du + \operatorname{sen}\theta \sqrt{G}\, dv)\, \delta v + \operatorname{sen}\theta \sqrt{G}\, d\, \delta v \right] = 0.$$

Integrando per parti l'ultimo termine ed avvertendo esser nullo δv agli estremi M_0, M_1 troveremo $\frac{d}{dv} (\cos\theta \sqrt{E}) = \frac{d}{du} (\operatorname{sen}\theta \sqrt{G})$, che in virtù delle (2) e della formula $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{du}\frac{du}{ds} + \frac{d\theta}{dv}\frac{dv}{ds}$ si riduce all'eguaglianza

$$(4) \quad \frac{\cos\theta}{E\sqrt{G}} \frac{dE}{dv} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{G\sqrt{E}} \frac{dG}{du} = \frac{2\, d\theta}{ds};$$

eliminando $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ mediante le stesse (2) si giunge all'equazione di Gauss

$$(5) \quad 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{E}\frac{dE}{dv}\frac{dv}{ds} \cos^2\theta + \frac{1}{G}\frac{dG}{du}\frac{du}{ds} \operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

Le lettere U, U_1, V, V_1 simboleggino funzioni delle rispettive variabili u, v e suppongansi $E = U_1^2 (U - V)$, $G = V_1^2 (U - V)$; vedremo la (5) divenire

$$2\, U \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{d\theta}{ds} + \frac{dU}{du}\frac{ds}{du} \operatorname{sen}^2\theta - 2\, V \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{d\theta}{ds} + \frac{dV}{dv}\frac{dv}{ds} \cos^2\theta = 0,$$

che fu integrata da Liouville sotto la forma (6) $U \operatorname{sen}^2\theta + V \cos^2\theta = m$, esprimendo m una costante. Si deducono

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{U - m}{U - V}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{m - V}{U - V}},$$

e quindi le formule (2) si convertono nelle seguenti

$$(7) \quad \frac{U_1\, du}{\sqrt{U - m}} = \frac{V_1\, dv}{\sqrt{m - V}} = \frac{ds}{U - V},$$

$$(8) \quad ds = V_1\, dv \sqrt{m - V} + U_1\, du \sqrt{U - m} = \frac{U U_1\, du}{\sqrt{U - m}} - \frac{V V_1\, dv}{\sqrt{m - V}}.$$

Così nell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1$ chiamando u, v le coordinate ellittiche ed α^2 la costante m, si avranno i valori

$$E = \frac{(u^2 - a^2)(u^2 - v^2)}{(u^2 - b^2)(u^2 - c^2)}, \quad G = \frac{(v^2 - a^2)(v^2 - u^2)}{(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)};$$

onde ponendo

$$U=u^2,\ \ U_1^2=\frac{u^2-a^2}{(u^2-b^2)(u^2-c^2)},\ \ V=v^2,\ \ V_1^2=-\frac{v^2-a^2}{(v^2-b^2)(v^2-c^2)},$$
$$\varphi(u)=(u^2-a^2)(u^2-b^2)(u^2-c^2)(u^2-\alpha^2),$$

in virtù dell'eguaglianze (7), (8) risultano per la geodetica dell'ellissoide l'equazione differenziale $\frac{(u^2-a^2)\,d\,u}{\sqrt{\varphi(u)}}=\frac{(v^2-a^2)\,d\,v}{\sqrt{\varphi(v)}}$, e per integrali iperellittici pure misurata la lunghezza del suo arco,

$$s=\int(u^2-v^2)(u^2-a^2)\frac{d\,u}{\sqrt{\varphi(u)}}=\int u^2(u^2-\alpha^2)\frac{d\,u}{\sqrt{\varphi(u)}}\pm\int v^2(v^2-\alpha^2)\frac{d\,v}{\sqrt{\varphi(v)}},$$

esposte da Jacobi nel tomo XIX del Giornale di Crelle, anno 1839; quando sia $b=0$ l'ellissoide è di rotazione, e i precedenti integrali si riducono ellittici.

Supponendo $E=1$, la (5) ammette per integrale (9) $G\,sen^2\theta=costante$; per esempio, si prenda la superficie $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ descritta da una linea ruotante intorno all'asse Oz; facendo $x=r\cos v$, $y=r\,sen\,v$, ne conseguirà $z=f(r)$, dove r significa il raggio di un parallelo; a motivo delle derivate $\frac{dx}{dv}=-r\,sen\,v$, $\frac{dy}{dv}=r\cos v$, $\frac{dz}{dv}=0$ si trova $G=r^2$. Se la variabile u determini i meridiani e si ponga (10) $d\,u=d\,r\sqrt{1+f'^2(r)}$ verrà $E=1$ e la (9) esprimerà il teorema di Clairaut (11) $r\,sen\,\theta=c$, ovvero *in ogni punto della linea geodetica di una superficie di rotazione, il raggio del suo cerchio parallelo moltiplicato per il seno dell'angolo che il meridiano ivi forma con la geodetica, dà un prodotto costante* (*). E le formule (1), (2) conducono ai differenziali (12) $ds=(du^2+r^2dv^2)^{\frac{1}{2}}$, $dv=\frac{c\,d\,u}{r\sqrt{r^2-c^2}}$, ed anche (13) $d\,s=\frac{r\,d\,u}{\sqrt{r^2-c^2}}$; applichiamole alle superficie quadriche.

Nello sferoide $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ coi semiassi $b<a$ si dice *latitudine* di un suo punto M l'inclinazione della normale MN sull'equatore; ponendo $r=a\cos\lambda$ la variabile λ vien chiamata *latitudine geocentrica o ridotta,* e si ha pure $z=\pm b\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}=\pm b\,sen\,\lambda$; indichiamo con λ_0 la geocentrica latitudine del punto M_0, in cui la curva geodetica dello sferoide tocca il parallelo, e θ diviene $\frac{\pi}{2}$; onde per la (11) sarà la costante $c=a\cos\lambda_0$, e la medesima equazione (11) si convertirà in (14) $\cos\lambda\,sen\,\theta=\cos\lambda_0$.

(*) *Mémoires de l'Académie des sciences.* Paris, 1733.

E poichè $f'(r) = \frac{b\, r}{a\sqrt{a^2 - r^2}}$, l'elemento della geodetica per la (13) si esprimerà con $d\, s = \frac{r\, d\, r}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\, r^2}{(a^2 - r^2)\,(r^2 - c^2)}}$; questa, mediante le sostituzioni $r = a\cos\lambda$, $c = a\cos\lambda_0$, $\cos\lambda = \sqrt{1 - sen^2\lambda_0 \cos^2\varphi}$, si traduce nel differenziale ellittico

$$d\, s = d\,\varphi\,\sqrt{a^2 sen^2\lambda_0 + b^2\cos^2\lambda_0 - (a^2 - b^2)\, sen^2\lambda_0\, sen^2\varphi}\,;$$

dunque *nello sferoide l'arco della geodetica eguaglia in lunghezza l'arco dell'ellisse avente per semiassi* b *e* $\sqrt{\mathrm{a}^2 \mathrm{sen}^2\lambda_0 + \mathrm{b}^2\cos^2\lambda_0}$.

Le geodetiche degl' iperboloidi ad una e due falde si possono rettificare con le funzioni iperboliche; il raggio del parallelo sia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; nell'equazione $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, col fare $r = a\cos h\lambda$ trovasi $z = b\, sen\, h\lambda$, e nell'elemento dell'arco $d\, s = \frac{r\, d\, r}{a}\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\, r^2 - a^4}{(r^2 - a^2)\,(r^2 - c^2)}}$ dato per la (13) in luogo di r, c, ponendo i respettivi valori $a\cos h\lambda$, $a\cos h\lambda_0$ deducesi $d\, s = \cos h\lambda\, .\, d\lambda\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\cos h^2\lambda - a^2}{\cos h^2\lambda - \cos h^2\lambda_0}}$, che per la sostituzione $\cos h^2\lambda = 1 + sen\, h^2\lambda_0\cos h^2 t$ si trasformerà in

$$d\, s = d\, t\,\sqrt{b^2 + (a^2 + b^2)\, sen\, h^2\lambda_0\cos h^2 t}\,.$$

Parimente nell'iperboloide $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$, essendo $z = b\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}$, $d\, s = \frac{r\, d r}{a}\sqrt{\frac{a^4 + (a^2 + b^2)\, r^2}{(a^2 + r^2)\,(r^2 - c^2)}}$, scriveremo $r = a\, sen\, h\lambda$, $c = a\, sen\, h\lambda_0$ e si otterrà $d\, s = sen\, h\lambda\, .\, d\lambda\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\, sen\, h^2\lambda + a^2}{sen\, h^2\lambda - sen\, h^2\lambda_0}}$; la quale, mediante la sostituzione $sen\, h^2\lambda = sen\, h^2\lambda_0 + \cos h^2\lambda_0\, sen\, h^2 t$, diviene

$$d\, s = d\, t\,\sqrt{a^2\cos h^2\lambda_0 + b^2 sen\, h^2\lambda_0 + (a^2 + b^2)\cos h^2\lambda_0\, sen\, h^2 t}\,;$$

dunque *negl' iperboloidi di rotazione gli archi delle geodetiche pareggiano in lunghezza gli archi iperbolici descritti coi semiassi*

$$\mathrm{b}\,,\ \sqrt{\mathrm{a}^2 \mathrm{sen\, h}^2\lambda_0 + \mathrm{b}^2\cos \mathrm{h}^2\lambda_0}\,,\ \textit{oppure}\ \mathrm{b}\ \textit{e}\ \sqrt{\mathrm{a}^2\cos \mathrm{h}^2\lambda_0 + \mathrm{b}^2 \mathrm{sen\, h}^2\lambda_0}\,.$$

Se poniamo $k^2 = \frac{1}{1 + e^2}$, $\cos h\, t = \frac{1}{\cos\varphi}$, risulterà facilmente

$$\int d\, t\,\sqrt{e^2\cos h^2 t + 1} = \frac{1}{k}\int\frac{d\varphi\,\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{k}\left[\Delta\varphi\, tang\,\varphi + F(k,\varphi) - E(k,\varphi)\right].$$

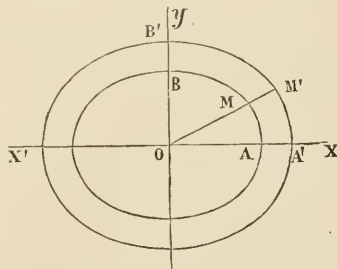
Infine il paraboloide $x^2 + y^2 = 2\, a\, z$ ha per elemento dell'arco geodetico $d\, s = \frac{r\, d r}{a}\sqrt{\frac{a^2 + r^2}{r^2 - c^2}}$, che mediante la sostituzione $r = \sqrt{c^2 + t^2}$ provasi rettificabile per archi parabolici.

Capo Settimo.

PERIODICITÀ DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

83. — Euler e Legendre avean considerato l'integrale ellittico di prima specie $u = \int_0^\varphi \frac{d\,\varphi}{\Delta\,\varphi}$ qual funzione del suo limite superiore φ, mentre il norvegiano Abel (nato a Findö il 5 agosto 1802 e morto a Froland il 6 aprile 1829), tenendo il metodo inverso, definiva l'ampiezza φ una funzione dello stesso integrale. Attesochè da una lettera di Abel, scritta il 24 giugno dell'anno 1823 al professore Holmboe, apparisca essere stato il primo a discoprire la doppia periodicità delle funzioni ellittiche seno, coseno e delta amplitudine, ed al 13 giugno del 1827 cominciasse nel Giornale di Crelle a pubblicare le sue celebri *Recherches sur les fonctions elliptiques*, dove introducendo il simbolo $i = \sqrt{-1}$ dimostrava l'esistenza dei periodi immaginari, come era noto per le funzioni esponenziali, e dei periodi reali che dipendono dal modulo k, riducentisi per $k = 0$ ai periodi π e 2π delle funzioni goniometriche o circolari.

Fig. 34ª.

Sia φ l'angolo che il raggio centrale $OM = r$ dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ fa con l'asse minore OB; in virtù della formula $r = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2 cos^2 \varphi + b^2 sen^2 \varphi}} = \frac{b}{\Delta\,\varphi}$, col modulo $k = \frac{c}{a}$ ed il complementare $k' = \frac{b}{a}$, l'integrale $a^2 u = a^2 \int_0^\varphi \frac{d\,\varphi}{\Delta\,\varphi}$ esprime l'area compresa fra le rette OB', OM' e l'arco $B'M'$ della quartica ovale $\rho^2 = \frac{2\,a^2}{b}\, r = \frac{2\,a^2}{\Delta\,\varphi}$ rappresentata per le coordinate polari ρ, φ. Le funzioni ellittiche di $u = \frac{1}{a^2}$ settore $B'OM'$ vengono definite dai rapporti $s\,n\,u = \frac{x}{r}$, $c\,n\,u = \frac{y}{r}$, $d\,n\,u = \frac{b}{r}$, sendo x, y le coordinate di M ed $r = OM$ sempre positivo; come pure soddisfano all' eguaglianze $s\,n^2 u + c\,n^2 u = 1$, $d\,n^2 u + k^2 s\,n^2 u = 1$. Al valore $\varphi = \frac{\pi}{2}$ corrisponde

il quadrante dell'ovale $A'OB' = a^2 K = a^2 F\frac{\pi}{2}$, ed indicata con $\frac{\omega}{4}$ la costante K, resultano $am\frac{\omega}{4} = \frac{\pi}{2}$, $am\frac{\omega}{2} = \pi$. Applicando il principio dei segni si deducono le seguenti variazioni:

$$(1)\begin{cases} sn0=0,\ sn\frac{\omega}{4}=1,\ sn\frac{\omega}{2}=0, & sn(-u)=-snu,\ sn\left(\frac{\omega}{2}+u\right)=-snu, \\ cn0=1,\ cn\frac{\omega}{4}=0,\ cn\frac{\omega}{2}=-1, & cn(-u)=cnu,\quad cn\left(\frac{\omega}{2}+u\right)=-cnu, \\ dn0=1,\ dn\frac{\omega}{4}=k',\ dn\frac{\omega}{2}=1, & dn(-u)=dnu,\quad dn\left(\frac{\omega}{2}+u\right)=dnu, \end{cases}$$

insieme ad $am(-u) = -amu$; e per m intero si traggono le formule

$$(2)\begin{cases} sn\left(m\frac{\omega}{2}+u\right) = (-1)^m snu, \\ cn\left(m\frac{\omega}{2}+u\right) = (-1)^m cnu, \\ dn\left(m\frac{\omega}{2}+u\right) = dnu. \end{cases}$$

Dunque *la funzione* snu *è impari, le funzioni* cnu, dnu *sono pari, le prime due hanno il periodo reale* $\omega = 4K$, *e la terza* dnu *il periodo reale* $\frac{\omega}{2} = 2K$ (*).

Due punti associati dell'ellisse hanno le ampiezze φ, φ' congiunte da $tang\,\varphi\, tang\,\varphi' = \frac{1}{k'}$; onde si ricavano le relazioni $\Delta\varphi\,.\,\Delta\varphi' = k'$, $sen\,\varphi' = \frac{cos\,\varphi}{\Delta\varphi}$, $cos\,\varphi' = \frac{k'\,sen\,\varphi}{\Delta\varphi}$, $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = 0$. Ai limiti 0 e φ dell'una corrispondono i limiti $\frac{\pi}{2}$, φ' dell'altra, od $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = -\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$; aggiungendo ai due membri l'integrale completo si conchiude

$$\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\omega}{4} - u,$$

(*) In ogni funzione periodica $f(u)$, se a indica il periodo, dall'eguaglianza $f(a+u) = f(u)$ per $u = 0$ resulta $f(0) = f(a)$; nel caso di una funzione impari si trae $f(a-u) = -f(u)$ e per $u = \frac{a}{2}$ si avranno $f\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{a}{2}+u\right) = -f\left(\frac{a}{2}-u\right)$, $f(a) = -f(0) = 0$; quando poi la funzione sia pari $f(a-u) = f(u)$, $f\left(\frac{a}{2}+u\right) = f\left(\frac{a}{2}-u\right)$.

da cui si deduce $\varphi' = am\left(\frac{\omega}{4} - u\right)$, e poichè $\varphi = am\,u$ risultano

$$(3)\quad dn\left(\frac{\omega}{4} - u\right) = \frac{k'}{dn\,u},\quad sn\left(\frac{\omega}{4} - u\right) = \frac{cn\,u}{dn\,u},\quad cn\left(\frac{\omega}{4} - u\right) = k'\frac{sn\,u}{dn\,u};$$

mutando poi u in $-u$ verranno

$$(4)\quad dn\left(\frac{\omega}{4} + u\right) = \frac{k'}{dn\,u},\quad sn\left(\frac{\omega}{4} + u\right) = \frac{cn\,u}{dn\,u},\quad cn\left(\frac{\omega}{4} + u\right) = -k'\frac{sn\,u}{dn\,u}.$$

In particolare, per $u = \frac{\omega}{8}$, si ottengono

$$(5)\quad dn\frac{\omega}{8} = \sqrt{k'},\quad sn\frac{\omega}{8} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}},\quad cn\frac{\omega}{8} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}.$$

Il seno amplitudine aumenta da zero ad 1 quando la variabile u cresca da 0 ad $\frac{\omega}{4}$, e l'eguaglianza $sn\left(\frac{\omega}{4} + u\right) = sn\left(\frac{\omega}{4} - u\right)$ prova, come al crescere di u da $\frac{\omega}{4}$ ad $\frac{\omega}{2}$ il seno amplitudine decresca da 1 a zero e riprenda i medesimi valori in ordine inverso; dalla relazione $sn\left(\frac{\omega}{2} + u\right) = -sn\,u$ deducesi, crescendo l'ampiezza da $\frac{\omega}{2}$ ad ω, il seno amplitudine esser negativo ed acquistare gli stessi valori numerici presi per u crescente da 0 ad $\frac{\omega}{2}$.

Si consideri $u = \int_0^x \frac{dx}{\Delta x}$ con $\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, ed all'indice M della variabile x si faccia percorrere sovra l'asse delle ascisse i successivi segmenti, dall'origine al punto 1, da questo ad $\frac{1}{k}$, indi torni indietro descrivendo i medesimi segmenti da $\frac{1}{k}$ ad 1 e da 1 al punto M rappresentativo di $x < 1$. Fissando l'unità positiva per il valore del radicale Δx all'origine, si convenga di cambiare il segno ai fattori $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-k^2x^2}$, quando la variabile x crescendo in modo continuo passa per ciascuna delle loro radici reali ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, e di attribuire a Δx il segno indeterminato $\pm$, allorchè il suo valore divenga immagi-

nario, o d'immaginario ritorni reale. Per la sostituzione $x = sen\,\varphi$ si trova $\int_0^1 \frac{dx}{\Delta x} = K = \frac{\omega}{4}$, e parimente l'integrale

$$(6)\quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\Delta x} = -\,i \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

col porvi $\sqrt{1-k^2x^2} = k'\,sen\,\varphi$, si converte in

$$i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\,sen^2\varphi}} = i\,K' = \frac{\omega'}{2},$$

dove $i = \sqrt{-1}$ e K' è l'integrale ellittico complementare di K. Ora nell' identità

$$(7)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\Delta x} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\Delta x} + \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dx}{\Delta x} + \int_1^x \frac{dx}{\Delta x} = \int_0^x \frac{dx}{\Delta x}$$

è facile osservare come i due primi termini siano rispettivamente $\frac{\omega}{4}$, $\pm\frac{\omega'}{2}$; il terzo abbia pure il valore $\pm\frac{\omega'}{2}$, poichè decrescendo x da $\frac{1}{k}$ ad 1, l'elemento dx e $\sqrt{1-k^2x^2}$ sono negativi e reali, ma il fattore $\sqrt{1-x^2}$ divenga immaginario; ed infine chiamando u l'integrale del secondo membro si trova $\int_1^x \frac{dx}{\Delta x} = u - \frac{\omega}{4}$, che nell'identità deve esser preso col segno indeterminato, ritornando $\sqrt{1-x^2}$ a prender valori reali; dunque la somma degl'integrali contenuti nel primo membro della surriferita identità viene espressa da $\frac{\omega}{4} \pm \frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega'}{2} \pm \left(u - \frac{\omega}{4}\right)$. Scegliendo i segni superiori resulta l'ampiezza $\omega' + u$, onde ne conseguono le formule

$$(8)\quad sn(\omega'+u) = snu,\quad dn(\omega'+u) = -\,dnu,\quad cn(\omega'+u) = -\,cnu.$$

Cambiando u in $u+\omega'$, le ultime due relazioni divengono

$$dn(2\omega'+u) = dnu,\quad cn(2\omega'+u) = cnu;$$

dunque *il periodo immaginario della funzione seno ampiezza è* $\omega' = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{K}'$, *delle funzioni coseno e delta ampiezza è* $2\,\omega' = 4\,\mathrm{i}\,\mathrm{K}'$. Per $u = 0$ si hanno $sn\,\omega' = 0$, $cn\,\omega' = dn\,\omega' = -1$.

Dall'identità $\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\Delta x} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta x} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\Delta x}$ discendono le relazioni

$$(9)\quad sn\left(\frac{\omega}{4} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k},\quad dn\left(\frac{\omega}{4} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = 0,\quad cn\left(\frac{\omega}{4} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{k'}{k}.$$

Significando con m, h due interi positivi o negativi, per le (8) si deducono

$$sn(m\omega' + u) = sn u,\quad cn(m\omega' + u) = (-1)^m cn u,$$
$$dn(m\omega' + u) = (-1)^m dn u,$$

ed in queste sostituendo ad u l'espressione $u + h\frac{\omega}{2}$, a motivo delle (2) risultano le formule generali

$$(10)\quad \begin{cases} sn\left(m\omega' + h\frac{\omega}{2} + u\right) = (-1)^h sn u, \\ cn\left(m\omega' + h\frac{\omega}{2} + u\right) = (-1)^{m+h} cn u, \\ dn\left(m\omega' + h\frac{\omega}{2} + u\right) = (-1)^m dn u. \end{cases}$$

Così l'equazione $sn u = sn a$ ammette radici della forma $u = m\frac{\omega'}{2} + h\frac{\omega}{2} + (-1)^h a$, essendo a un dato argomento diverso da ciascun periodo, ed m, h interi qualunque positivi o negativi; parimente l'equazioni $cn u = cn a$, $dn u = dn a$ sono verificate per $u = m\omega + h(\omega + \omega') \pm a$.

Supponendo $sn u = \alpha$ numero positivo minore dell'unità, si consideri l'eguaglianza $\int_0^1 \frac{dx}{\Delta x} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\Delta x} + \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k\alpha}} \frac{dx}{\Delta x} = \int_0^{\frac{1}{k\alpha}} \frac{dx}{\Delta x}$; la somma dei due primi integrali è $\frac{\omega}{4} \pm \frac{\omega'}{2}$; il valore del terzo integrale si troverà mediante la sostituzione $x = \frac{1}{ky}$, e ne conseguirà la trasformata

$$-\int_1^{\alpha} \frac{dy}{\Delta y} = \int_0^1 \frac{dy}{\Delta y} - \int_0^{\alpha} \frac{dy}{\Delta y} = \frac{\omega}{4} - u;$$

onde la surriferita eguaglianza conduce alla relazione

$$\frac{1}{k\, sn u} = sn\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{2} - u\right) = sn\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right),$$

e in generale si possono stabilire le formule

$$(11)\begin{cases} sn\left(u+h\,\frac{\omega}{2}\pm(2\,m+1)\,\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{(-1)^h}{k\,sn\,u}, \\ cn\left(u+h\,\frac{\omega}{2}\pm(2\,m+1)\,\frac{\omega'}{2}\right)=\pm\,i\,(-1)^{h+m+1}\,\frac{dn\,u}{k\,sn\,u}, \\ dn\left(u+h\,\frac{\omega}{2}\pm(2\,m+1)\,\frac{\omega'}{2}\right)=\pm\,i\,(-1)^{m+1}\,\frac{cn\,u}{sn\,u}; \end{cases}$$

dunque *i valori che riducono infinite le funzioni ellittiche si ottengono aggiungendo* $\pm\frac{\omega'}{2}$ *ai valori dell'argomento per i quali si annulla il seno ampiezza, e sono compresi nella formula* $u=h\,\frac{\omega}{2}+(2\,m+1)\,\frac{\omega'}{2}$, *con* m *ed* h *interi arbitrari, positivi o negativi.*

84. — L'ampiezza φ dell'integrale $u=F\varphi$ considerata qual funzione della u ha per differenziale $d\varphi=du\,\Delta\varphi$, cioè

$$(1)\quad d\,(am\,u)=du\,.\,dn\,u,$$

ed applicando il principio della derivata di una funzione di funzione si deducono le formule

$$(2)\quad \frac{d\,sn\,u}{d\,u}=cn\,u\,.\,dn\,u,\quad \frac{d\,cn\,u}{d\,u}=-\,sn\,u\,.\,dn\,u,\quad \frac{d\,dn\,u}{d\,u}=-\,k^2\,sn\,u\,.\,cn\,u;$$

così *la derivata di ciascuna funzione ellittica* snu, cnu, dnu, *rispetto alla variabile ampiezza* u, *eguaglia il prodotto delle altre due per le rispettive costanti* 1, —1, k². Inoltre le radici di ciascuna equazione $sn\,u=0$, $cn\,u=0$, $dn\,u=0$ sono semplici, poichè non annullano la derivata della funzione contenuta nel loro primo membro.

Il quadrato della derivata di ogni funzione ellittica si esprime con un polinomio quartico rispetto alla stessa funzione e privo di termini di grado impari, per esempio $\left(\frac{d\,sn\,u}{d\,u}\right)^2=1-(1+k^2)\,sn^2u+k^2\,sn^4u$. Da cui si traggono le derivate successive

$$(3)\begin{cases} \frac{d^2sn\,u}{du^2}=-\,(1+k^2)\,sn\,u+2\,k^2s\,n^3u, \\ \frac{d^3sn\,u}{du^3}=[-\,(1+k^2)+6\,k^2s\,n^2u]\,cn\,u\,.\,dn\,u, \\ \frac{d^4sn\,u}{du^4}=[1+14\,k^2+k^4-20\,k^2\,(1+k^2)\,s\,n^2u+24\,k^4s\,n^4u]\,sn\,u, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Lo sviluppo della funzione impari $sn\,u$ in serie ordinata secondo le potenze crescenti di u ha la forma $a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + \ldots$; sostituendo questa nella surriferita eguaglianza che esprime la derivata seconda di $sn\,u$, e poi identificando i coefficienti delle potenze omonime di u si determinano le quantità a_1, a_3, a_5, ..., e si otterrà

$$(4)\quad sn\,u = u - \frac{1+k^2}{3!}u^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}u^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!}u^7 + \ldots,$$

dove il simbolo $n!$ significa il fattoriale di n; parimente, supponendo

$$cn\,u = b_0 + b_2 u^2 + b_4 u^4 + \ldots,\quad dn\,u = c_0 + c_2 u^2 + c_4 u^4 + \ldots,$$

in virtù delle relazioni $cn^2 u = 1 - sn^2 u$, $dn^2 u = 1 - k^2 sn^2 u$ e della (4), oppure con lo stesso metodo tenuto per $sn\,u$, risulteranno le serie

$$(5)\quad cn\,u = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1+4k^2}{4!}u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!}u^6 + \ldots,$$

$$(6)\quad dn\,u = 1 - \frac{k^2}{2}u^2 + \frac{4k^2+k^4}{4!}u^4 - \frac{16k^2+44k^4+k^6}{6!}u^6 + \ldots,$$

$$(7)\quad am\,u = \int_0^u dn\,u\,.\,du = u - \frac{k^2}{3!}u^3 + \frac{4k^2+k^4}{5!}u^5 - \frac{16k^2+44k^4+k^6}{7!}u^7 + \ldots,$$

convergenti per *modulo* $u < K'$, ed esposte da Jacobi alla pagina 114 delle sue *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* (Regiomonti, anno 1829). In quest'opera il sommo autore dimostrò la doppia periodicità, mediante la sostituzione $sen\,\varphi = i\,tang\,\psi$ fatta nel differenziale ellittico $du = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$. Nel caso di $k=0$ le serie (4) e (5) si ridurranno ai noti sviluppi delle funzioni circolari $sen\,u$, $cos\,u$, e per $k=1$ la serie (4) dà la tangente iperbolica della variabile u.

Applicando i logaritmi neperiani alle funzioni ellittiche, e differenziandoli due volte di seguito rispetto ad u ricaviamo

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 \log sn\,u}{du^2} = \dfrac{1}{sn\,u}\dfrac{d^2 sn\,u}{du^2} - \dfrac{1}{sn^2 u}\left(\dfrac{d\,sn\,u}{du}\right)^2 = k^2 sn^2 u - \dfrac{1}{sn^2 u}, \\[2ex] \dfrac{d^2 \log cn\,u}{du^2} = k^2 sn^2 u - \dfrac{dn^2 u}{cn^2 u} = -k^2 cn^2 u - \dfrac{k'^2}{cn^2 u}, \\[2ex] \dfrac{d^2 \log dn\,u}{du^2} = k^2 sn^2 u - \dfrac{k^2 cn^2 u}{dn^2 u} = -dn^2 u + \dfrac{k'^2}{dn^2 u}. \end{cases}$$

Per due integrazioni successive fatte coi limiti u, $\frac{\omega}{4}$ si ottiene

$$log\, sn\, u = \int_u^{\frac{\omega}{4}} du \int_u^{\frac{\omega}{4}} k^2\, sn^2 u\, du - \int_u^{\frac{\omega}{4}} du \int_u^{\frac{\omega}{4}} \frac{du}{sn^2 u},$$

sendo u diverso da zero, altrimenti i due membri sarebbero infiniti; or a causa di $\int_0^u k^2\, sn^2 u\, du = \int_0^\varphi k^2\, sen^2 \varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F\varphi - E\varphi$ avremo $\int_0^{\frac{\omega}{4}} k^2 sn^2 u\, du = K - E$, e per conseguenza $\int_u^{\frac{\omega}{4}} (K-E)\, du = (K-E)(K-u)$; onde, introdotti per brevità i simboli

$$b = E - K, \quad a = -bK - \int_0^{\frac{\omega}{4}} du \int_0^u k^2\, sn^2 u\, du,$$

$$(9) \begin{cases} y = -\int_0^u du \int_0^u k^2 sn^2 u\, du, & y_1 = a + bu - \int_u^{\frac{\omega}{4}} du \int_u^{\frac{\omega}{4}} \frac{du}{sn^2 u}, \\ y_2 = -\int_0^u du \int_0^u \frac{dn^2 u}{cn^2 u} du, & y_3 = -\int_0^u du \int_0^u \frac{k^2 cn^2 u}{dn^2 u} du, \end{cases}$$

dalle formule (8) giungeremo alle seguenti $log\, sn\, u = y_1 - y$, $log\, cn\, u = y_2 - y$, $log\, dn\, u = y_3 - y$: dunque *le funzioni ellittiche si esprimono con frazioni aventi il denominator comune* e^y *ed i respettivi numeratori* e^{y_1}, e^{y_2}, e^{y_3}. Queste quattro funzioni *alle* (od *abeliane*), scoperte da Weierstrass, notansi coi simboli $Al(u) = e^y = s$, $Al_1(u) = e^{y_1} = p$, $Al_2(u) = e^{y_2} = q$, $Al_3(u) = e^{y_3} = r$. Dalle relazioni (9) deduciamo l'equazioni differenziali

$$(10) \begin{cases} \frac{d^2}{du^2} log\, Al(u) + k^2 sn^2 u = 0, & \frac{d^2}{du^2} log\, Al_1(u) + \frac{1}{sn^2 u} = 0, \\ \frac{d^2}{du^2} log\, Al_2(u) + \frac{dn^2 u}{cn^2 u} = 0, & \frac{d^2}{du^2} log\, Al_3(u) + \frac{k^2 cn^2 u}{dn^2 u} = 0. \end{cases}$$

Ciascuna delle medesime funzioni verifica un' equazione alle derivate parziali, come nell'anno 1855 ha dimostrato l'illustre inventore (*). Poichè,

---

(*) *Theorie der Abel'schen Functionen*, pag. 285 del tomo LII del Giornale di Crelle.

sendo $z = s\,n\,u$ pure funzione del modulo k, dalla $\left(\frac{d\,z}{d\,u}\right)^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2)$ si traggono le derivate

$$\frac{d^2\,z}{d\,u^2} = -(1+k^2)\,z + 2\,k^2\,z^3,$$

$$\frac{d\,z}{d\,u}\,\frac{d^2\,z}{d\,u\,d\,k} = [-(1+k^2)\,z + 2\,k^2\,z^3]\,\frac{d\,z}{d\,k} - k\,z^2(1-z^2);$$

onde ne risulta $\frac{d}{d\,u}\left(\frac{d\,z}{d\,k} : \frac{d\,z}{d\,u}\right) = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1-k^2\,z^2} - 1\right)$, che moltiplicata per $k\,k'^2$ ed integrata rispetto ad u diviene

$$k\,k'^2\,\frac{d\,z}{d\,k} + \frac{d\,z}{d\,u}\int\frac{k'^2\,d\,u}{1-k^2\,z^2} - k'^2\,u\,\frac{d\,z}{d\,u} = 0.$$

Ora mediante la prima delle (10), $\frac{d^2\,y}{d\,u^2} = -k^2\,z^2$, e l'ultima delle (8), $\frac{d^2\,log\,d\,n\,u}{d\,u^2} = k^2\,z^2 - \frac{k^2(1-z^2)}{1-k^2\,z^2} = -\frac{d^2\,y}{d\,u^2} + \frac{k'^2}{1-k^2\,z^2} - 1$, si otterrà $\frac{d\,log\,d\,n\,u}{d\,u} = -\frac{d\,y}{d\,u} - u + \int\frac{k'^2\,d\,u}{1-k^2\,z^2}$, e perciò l'equazione differenziale surriferita si traduce nella forma

$$(11)\quad k\,k'^2\,\frac{d\,z}{d\,k} + k^2\,u\,\frac{d\,z}{d\,u} + \frac{d\,z}{d\,u}\,\frac{d\,y}{d\,u} - k^2\,z\,(1-z^2) = 0.$$

Moltiplicandola per $4\,k^2 z$ ed eliminando z con la prima delle (10) e le sue derivate $\frac{d^3\,y}{d\,u^3} = -2\,k^2 z\,\frac{d\,z}{d\,u}$, $\frac{d^3\,y}{d\,u^2\,d\,k} = -2\,k^2 z\,\frac{d\,z}{d\,k} - 2k\,z^2$, convertesi in $2\,k\,k'^2\,\frac{d^3\,y}{d\,u^2\,d\,k} + 2\,k^2\,u\,\frac{d^3\,y}{d\,u^3} + 2\,\frac{d\,y}{d\,u}\,\frac{d^3\,y}{d\,u^3} - 4\,\frac{d^2\,y}{d\,u^2} - 4\left(\frac{d^2\,y}{d\,u^2}\right)^2 = 0.$
Se osserviamo aversi le relazioni

$$2\,k^2\,u\,\frac{d^3\,y}{d\,u^3} = \frac{d^2}{d\,u^2}\left(2\,k^2\,u\,\frac{d\,y}{d\,u}\right) - 4\,k^2\,\frac{d^2\,y}{d\,u^2},$$

$$2\,\frac{d\,y}{d\,u}\,\frac{d^3\,y}{d\,u^3} = \frac{d^2}{d\,u^2}\left(\frac{d\,y}{d\,u}\right)^2 - 2\left(\frac{d^2\,y}{d\,u^2}\right)^2,$$

$$-4\,(1+k^2)\,\frac{d^2\,y}{d\,u^2} - 6\left(\frac{d^2\,y}{d\,u^2}\right)^2 = 2\,k^2 + \frac{d^4\,y}{d\,u^4},$$

dedurremo la trasformata

$$\frac{d^2}{d\,u^2}\left[2\,k\,k'^2\,\frac{d\,y}{d\,k} + 2\,k^2\,u\,\frac{d\,y}{d\,u} + \left(\frac{d\,y}{d\,u}\right)^2\right] + \frac{d^4\,y}{d\,u^4} + 2\,k^2 = 0;$$

la quale, per due successive integrazioni, conduce alla più semplice

$$\frac{d^2 y}{d u^2} + 2 k^2 u \frac{d y}{d u} + 2 k k'^2 \frac{d y}{d k} + \left(\frac{d y}{d u}\right)^2 + k^2 u^2 = 0,$$

ed eseguendo la sostituzione $y = log\, s$ troviamo

$$(12) \quad \frac{d^2 s}{d u^2} + 2 k^2 u \frac{d s}{d u} + 2 k k'^2 \frac{d s}{d k} + k^2 u^2 s = 0.$$

Con questa e la (11) ricavansi l'equazioni differenziali per le p, q, r; infatti, a motivo di $p = s z$, ottengonsi $\frac{d p}{d u} = s \frac{d z}{d u} + z \frac{d s}{d u}$, $\frac{d^2 p}{d u^2} = s \frac{d^2 z}{d u^2} + 2 \frac{d s}{d u} \frac{d z}{d u} + z \frac{d^2 s}{d u^2}$, $\frac{d p}{d k} = s \frac{d z}{d k} + z \frac{d s}{d k}$, e quindi per la (12) risulterà $\frac{d^2 p}{d u^2} + 2 k k'^2 \frac{d p}{d k} + 2 k^2 u \frac{d p}{d u} + k^2 u^2 p =$ $= s \frac{d^2 z}{d u^2} + 2 \frac{d s}{d u} \frac{d z}{d u} + 2 k k'^2 s \frac{d z}{d k} + 2 k^2 u s \frac{d z}{d u}$; ora nella (11) sostituendo a $\frac{d y}{d u}$ l'eguale $\frac{1}{s} \frac{d s}{d u}$ avremo da essa il termine $2 \frac{d z}{d u} \frac{d s}{d u} = - 2 s k k'^2 \frac{d z}{d k} - 2 s k^2 u \frac{d z}{d u} + 2 k^2 p \left(1 - \frac{p^2}{s^2}\right)$, e nell'espressione della $\frac{d^2 z}{d u^2}$ ponendo $z = \frac{p}{s}$ abbiamo $s \frac{d^2 z}{d u^2} =$ $= -(1 + k^2) p + 2 k^2 \frac{p^3}{s^2}$; onde a causa delle precedenti è facile stabilire

$$(13) \quad \frac{d^2 p}{d u^2} + 2 k^2 u \frac{d p}{d u} + 2 k k'^2 \frac{d p}{d k} + p (k^2 u^2 + k'^2) = 0.$$

Le funzioni q ed r sono legate alle p, s per l'eguaglianze $s^2 = p^2 + q^2 =$ $= k^2 p^2 + r^2$; dalle differenziali (10) si traggono

$$(14) \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{d s}{d u}\right)^2 = s \frac{d^2 s}{d u^2} + k^2 p^2, & \left(\frac{d p}{d u}\right)^2 = p \frac{d^2 p}{d u^2} + s^2, \\ \left(\frac{d q}{d u}\right)^2 = q \frac{d^2 q}{d u^2} + r^2, & \left(\frac{d r}{d u}\right)^2 = r \frac{d^2 r}{d u^2} + k^2 q^2; \end{array} \right.$$

inoltre si hanno le derivate

$$s \frac{d s}{d u} = p \frac{d p}{d u} + q \frac{d q}{d u}, \quad s \frac{d s}{d k} = p \frac{d p}{d k} + q \frac{d q}{d k},$$

$$s \frac{d^2 s}{d u^2} + \left(\frac{d s}{d u}\right)^2 = p \frac{d^2 p}{d u^2} + q \frac{d^2 q}{d u^2} + \left(\frac{d p}{d u}\right)^2 + \left(\frac{d q}{d u}\right)^2,$$

o, per le (14), $s \frac{d^2 s}{d u^2} = p \frac{d^2 p}{d u^2} + q \frac{d^2 q}{d u^2} + k'^2 p^2 + q^2$, e ne discenderà

$$(15) \quad \frac{d^2 q}{d u^2} + 2 k^2 u \frac{d q}{d u} + 2 k k'^2 \frac{d q}{d k} + q (1 + k^2 u^2) = 0.$$

Infine dalla $s^2 = k^2 p^2 + r^2$ deduciamo $s \frac{d s}{d u} = k^2 p \frac{d p}{d u} + r \frac{d r}{d u}$, $s \frac{d s}{d k} = k^2 p \frac{d p}{d k} + r \frac{d r}{d k} + k p^2$ ed $s \frac{d^2 s}{d u^2} = k^2 p \frac{d^2 p}{d u^2} + r \frac{d^2 r}{d u^2} + k^2 q^2$, riducendo mediante le formule (14); onde con l'aiuto dell'equazioni dimostrate (12) e (13) conchiuderemo

$$(16) \quad \frac{d^2 r}{d u^2} + 2 k^2 u \frac{d r}{d u} + 2 k k'^2 \frac{d r}{d k} + k^2 r (1 + u^2) = 0.$$

L'equazioni (12), (13), (14), (16) servono a determinare le formule ricorrenti per gli sviluppi in serie delle funzioni *alle;* così, facendo $s = A\, l(u) = 1 - \frac{a_2 u^4}{2} + \frac{a_3 u^6}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a_n u^{2n}}{n!} + \ldots$ nella (12), prendendovi il coefficiente della potenza u^{2n-2} otteniamo

$$2 n (2 n - 1) \frac{a_n}{n!} - 4 (n - 1) \frac{k^2 a_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{k^2 a_{n-2}}{(n-2)!} + \frac{2 k k'^2}{(n-1)!} \frac{d a_{n-1}}{d k} = 0,$$

e per $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ resultano $a_2 = 2 k^2$, $a_3 = 8 k^2 (1 + k^2)$, $a_4 = 32 k^2 (1 + k^4) + 68 k^6$, $a_5 = 128 k^2 (1 + k^6) + 480 k^4 (1 + k^2)$, ...

Nello stesso modo si avranno

$$A\, l_1 (u) = u - b_1 \frac{u^3}{3!} + b_2 \frac{u^5}{5!} - b_3 \frac{u^7}{7!} + \ldots,$$

dove $b_1 = 1 + k^2$, $b_2 = 1 + 4 k^2 + k^4$, $b_3 = 1 + k^6 + 9 k^2 (1 + k^2)$,
$b_4 = 1 + k^8 + 16 k^2 (1 + k^4) - 6 k^4$,
$b_5 = 1 + k^{10} + 25 k^2 (1 + k^6) - 494 k^2 (1 + k^4)$, ...

$$A\, l_2 (u) = 1 - c_1 \frac{u^2}{2!} + c_2 \frac{u^4}{4!} - c_3 \frac{u^6}{6!} + \ldots,$$

con $c_1 = 1$, $c_2 = 1 + 2 k^2$, $c_3 = 1 + 6 k^2 + 8 k^4$,
$c_4 = 1 + 12 k^2 + 60 k^4 + 32 k^6$,
$c_5 = 1 + 20 k^2 + 348 k^4 + 448 k^6 + 128 k^8$, ...

$$A\, l_3 (u) = 1 - d_1 \frac{u^2}{2!} + d_2 \frac{u^4}{4!} - d_3 \frac{u^6}{6!} + \ldots,$$

con $d_1 = k^2$, $d_2 = 2 k^2 + k^4$, $d_3 = 8 k^2 + 6 k^4 + k^6$,
$d_4 = 32 k^2 + 60 k^4 + 12 k^6 + k^8$,
$d_5 = 128 k^2 + 448 k^4 + 348 k^6 + 20 k^8 + k^{10}$, ...

CAPO OTTAVO.

LE FUNZIONI $p(u)$, $\sigma(u)$ DI WEIERSTRASS (*).

85. — L'eminente geometra di Berlino Carlo Weierstrass, in luogo delle funzioni snu, cnu, dnu, adoperò la z variabile inversa dell'integrale

$$(1)\quad u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

sendo $\quad Z = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$,

num. 22, osservaz. 1ª, in cui le radici $e_1 > e_2 > e_3$ verificano l'eguaglianze

$$(2)\quad e_1 + e_2 + e_3 = 0,\quad e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{1}{4} g_2,\quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3.$$

Ora, eseguendo la sostituzione $z = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{t^2}$, la (1) riducesi all'integrale ellittico di prima specie $u = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$, con $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$, e per $t = sen\,\varphi$ diviene (3) $u = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} F(k, \varphi)$.

Indicata la z col simbolo $p(u)$, la precedente formula di sostituzione equivale a (4) $p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{sen^2 \varphi} = e_1 + (e_1 - e_3) \cot^2 \varphi$. Mutando il segno alla variabile φ, cambierà il segno di u, mentre la funzione inversa $p(u)$ rimanendo la stessa è pari; per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ l'argomento u ha per valore $\frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \omega_1$, onde $p(\omega_1) = e_1$, e siccome $\varphi = am(u\sqrt{e_1 - e_3})$, la (4) scrivendosi (5) $p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{sn^2(u\sqrt{e_1 - e_3})}$ ne consegue (6) $p(2\omega_1 + u) = p(u)$.

(*) *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass, bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz.* Göttingen, 1883.

Scambiando le radici e_1, e_3, ovvero facendo la sostituzione $z = e_1 + \frac{e_3 - e_1}{t^2}$ nell' integrale (1), si trova

$$u = \frac{1}{i\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2 t^2)}},$$

dove $i = \sqrt{-1}$, $k_1^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 1 - k^2$, e posto $t = sen\,\theta$ avremo

$$(7)\ u = \frac{F(k_1, \theta)}{i\sqrt{e_1 - e_3}},\quad (8)\ p(u) = e_3 - (e_1 - e_3)\cot^2\theta = e_1 + \frac{e_3 - e_1}{sn^2(u\,i\sqrt{e_1 - e_3})};$$

per $\theta = \frac{\pi}{2}$ resultano (9) $\frac{K'}{i\sqrt{e_1 - e_3}} = \omega_3$, $p(\omega_3) = e_3$, $\frac{\omega_3}{i\,\omega_1} = \frac{K'}{K}$.
All' ampiezza $\theta + \pi$ vi corrisponde l'argomento $2\omega_3 + u$, e per la (8) si deduce la formula (10) $p(2\omega_3 + u) = p(u)$.

Nei punti associati essendo le ampiezze φ, φ' legate dall' equazione (11) $tang\,\varphi \,.\, tang\,\varphi' = \frac{1}{k_1} = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}}$, o dalla trascendente $F\varphi' + F\varphi = K$, divisa questa per $\sqrt{e_1 - e_3}$ a motivo delle (4), (11) si ottiene

$$p(\omega_1 - u) = e_1 + (e_1 - e_3)\cot^2\varphi' = e_1 + (e_1 - e_2)\,tang^2\varphi;$$

e siccome dalla stessa (4) si ricava $tang^2\varphi = \frac{e_1 - e_3}{p(u) - e_1}$, verremo a conchiudere (12) $p(\omega_1 \pm u) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(u) - e_1}$; dunque *la funzione* p (u) *è pari, decresce dall' infinito positivo al minimo* $p(\omega_1) = e_1$ *quando l'ampiezza aumenta da zero a* $\frac{\pi}{2}$, *poi torna a crescere riprendendo gli stessi valori in ordine inverso, ha il periodo reale* $2\omega_1$ *e l'immaginario* $2\omega_3$, *e diviene infinita per i valori* $2m\omega_1$, $2n\omega_3$, *sendo* m, n *interi arbitrari*. Ponendo $u = \omega_3$ nella formula (12) si trova $p(\omega_1 + \omega_3) = e_2$.

La derivata $p'(u) = \frac{du}{dz} = \sqrt{Z}$ sarà negativa o positiva, secondochè $p(u)$ decresca od aumenti, e si annullerà per ciascuna radice di Z; allorchè z divenga infinita od $u = 0$, il vero valore del prodotto $u\sqrt{p(u)}$ è $\lim_{u=0} \frac{p'(u)}{2\sqrt{p^3(u)}} = 1$; dunque $u\sqrt{p(u)} = 1 + \varepsilon$, dove $\lim \varepsilon = 0$

per $u=0$, ed essendo $p(u)$ funzione pari, n' emerge la possibilità di svilupparla in una serie della forma $\frac{1}{u^2}+a_1u^2+a_2u^4+\ldots+a_nu^{2n}+\ldots$ Alla pagina 62, notando con I ed J le rispettive costanti g_2, g_3, furono svolte le successive derivate della funzione $p(u)$. In virtù della relazione $p'''(u)=12\,p(u)\,p'(u)$ si giunge alla formula ricorrente

$$(13)\quad a_n=\frac{3}{(n-3)(2n+1)}(a_2a_{n-2}+a_3a_{n-3}+\ldots+a_{n-3}a_3+a_{n-2}a_2);$$

mediante la nota eguaglianza

(14) $(p'u)^2=4p^3u-g_2pu-g_3$ si trovano $a_2=\frac{g_2}{2^2.5}$, $a_3=\frac{g_3}{2^2.7}$ e la serie

$$(15)\quad pu=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{2^2.5}u^2+\frac{g_3}{2^2.7}u^4+\frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}u^6+\frac{3\,g_2g_3}{2^4.5.7.11}u^8+\ldots;$$

per brevità scrivendo pu, $p'u$, $p''u$, ..., senza metter l'argomento u in parentesi.

Nell'integrale di Lagrange (pagina 47) facciasi $c=e=0$, $d=4$, $b=-g_2$, $a=-g_3$, ed il polinomio X si ridurrà a $4x^3-g_2x-g_3$; ponendo inoltre $du=\frac{dx}{\sqrt{X}}$, $dv=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, $x=pu$, $y=pv$ avremo $\sqrt{X}=p'u$, $\sqrt{Y}=p'v$ e la (VII) diverrà $\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-(pu+pv)=C$. Sostituendo alla costante C la grandezza z funzione di una variabile w, come x, y dipendono dagli argomenti u, v; ovvero ponendo $z=pw$, $dw=\frac{dz}{\sqrt{Z}}$; a motivo del n. 19 scaturisce l'equazione $du+dv+dw=0$, cioè l'integrale particolare $u+v+w$; ne discende la formula di addizione

$$(16)\quad pu+pv+pw=\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2,\quad \text{e}\quad pw=p(u+v).$$

Nel caso di $u=v$ il secondo membro presenta l'indeterminata forma $\frac{0}{0}$; ma in virtù della relazione (14) ricavasi

$$\frac{p'u-p'v}{pu-pv}=\frac{4(p^2u+pu\,pv+p^2v)-g_2}{p'u+p'v};$$

da cui viene $\lim\limits_{v=u}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)=\frac{12\,p^2u-g_2}{2\,p'u}=\frac{p''u}{p'u}$;

onde si ha (17) $p\,2u=\frac{1}{4}\left(\frac{p''u}{p'u}\right)^2-2\,pu=pu-\frac{1}{4}\frac{d^2}{du^2}\log p'u$.

Se nella (16) mutiamo il segno alla variabile v e poi sottraggasi il risultato dalla (16), a motivo di $p'(-v) = -p'v$ deduciamo

$$(18)\quad p(u+v) - p(u-v) = -\frac{p'u\, p'v}{(pu - pv)^2}.$$

La formula di addizione delle pu esprimesi in altre guise; ponendo $\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = t$ si trova $\frac{dt}{du} = \frac{p''u - t\,p'u}{pu - pv} = \frac{p''u - t\,p'v}{pu - pv} - t^2$; oppure $t^2 + \frac{dt}{du} = \frac{p''u - t\,p'v}{pu - pv}$; che aggiunta membro a membro con la precedente acquista la forma $t^2 + \frac{2\,dt}{du} = \frac{2\,p''u - t\,(p'u + p'v)}{pu - pv}$. Ora essendo $2\,p''u = 12\,p^2u - g_2$ si deduce $2\,p''u - t\,(p'u + p'v) =$ $= 12\,p^2u - g_2 - \left(\frac{p'^2u - p'^2v}{pu - pv}\right) = 12\,p^2u - 4\,(p^2u + pu\,pv + p^2v) =$ $= 4\,(pu - pv)(2\,pu + pv)$, e quindi la relazione $\frac{1}{4}\,t^2 + \frac{1}{2}\,\frac{dt}{du} = 2\,pu + pv$; adunque la (16) si trasforma nella (19) $p(u+v) = pu - \frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)$ e nella simile risultante per lo scambio delle variabili u, v. La medesima (16) conduce all' eguaglianza

$$p(u+v) + p(u-v) = \frac{(p'u)^2 + (p'v)^2}{2\,(pu - pv)^2} - 2\,(pu + pv);$$

eliminandovi le derivate $p'u$, $p'v$ mercè la (14), giungesi all' equazione

$$(20)\quad p(u+v) + p(u-v) = \frac{(pu + pv)\left(2\,pu\,pv - \frac{1}{2}\,g_2\right) - g_3}{(pu - pv)^2}.$$

Possiamo ricavarne una formula per la moltiplicazione dell' argomento; facendo $v = nu$, $pu = z$, $pnu - pu = y_n$ è facile ottenere

$$(21)\quad y_{n+1} = \frac{1}{y_n^2}\,(\psi_2^2 - y_n\,\psi'_2) - y_{n-1},$$

dove $\psi_2 = -p'u$, $\psi'_2 = -p''u$ ed $y_1 = 0$; così dalla (17) avendosi $y_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{p''u}{p'u}\right)^2 - 3\,z$, a motivo di $\psi_2^2 = 4\,z^3 - g_2\,z - g_3$, $p''u = 6\,z^2 - \frac{1}{2}\,g_2$ si trae $y_2 = -\frac{\psi_3}{\psi_2^2}$, dove $\psi_3 = 3\,z^4 - \frac{3}{2}\,g_2\,z^2 - 3\,g_3\,z - \frac{1}{16}\,g_2^2 =$ $= 3\,z\,\psi_2^2 - \frac{1}{4}\,\psi_2'^2 = \frac{1}{4}\,(\psi_2\,\psi_2'' - \psi_2'^2)$ e $\psi_3' = -3\,\psi_2^3$. Parimente

dalla (21) viene $y_3 = -\frac{\psi_2 \psi_4}{\psi_3^2}$, insieme a $\psi_4 = -\psi_2(\psi_3 \psi_2' + \psi_2^4) =$ $= p'u\left(-2z^6 + \frac{5}{2} g_2 z^4 + 10 g_3 z^3 + \frac{5}{8} g_2 z^2 + \frac{1}{2} g_2 g_3 z + g_3^2 + \frac{1}{32} g_2^3\right)$; per $n=3$ trovasi $y_4 = \frac{1}{y_3^2}(\psi_2^2 - y_3 \psi_2') - y_2 = \frac{\psi_3}{\psi_4^2}\left[\psi_3\left(\psi_3^2 + \frac{\psi_4 \psi_2'}{\psi_2}\right) + \frac{\psi_4^2}{\psi_2^2}\right]$; entro la qual parentesi, sostituito il valore di ψ_4, avremo $y_4 = -\frac{\psi_3 \psi_6}{\psi_4^2}$, con $\psi_5 = -(\psi_3^3 + \psi_2^4 \psi_2' \psi_3 + \psi_2^8) = \psi_2^3 \psi_4 - \psi_3^3$. Nello stesso modo dalla (21) si ottiene $y_5 = \frac{1}{y_4^2}(\psi_2^2 - y_4 \psi_2') - y_3 = -\frac{\psi_4 \psi_6}{\psi_5^2}$, dove $\psi_6 = -\frac{1}{\psi_3^2}(\psi_4^3 \psi_2^2 + \psi_4 \psi_3 \psi_5 \psi_2' + \psi_2 \psi_5^2) = \psi_2 \psi_3\left(\psi_5 - \frac{\psi_4^2}{\psi_2^2}\right)$ in virtù delle relazioni surriferite, e proseguendo si troverebbero $y_6, y_7, \ldots$; avvertiamo di avere sempre scritto per brevità ψ_i invece di $\psi_i(u)$.

Il valoroso ufficiale Giorgio Enrico Halphen (nato a Rouen il 30 ottobre 1844 e morto a Parigi il 21 maggio 1889), nella sua grande opera sulle funzioni ellittiche, ha svolta la teoria della moltiplicazione per le pu.

L'equazione $pnu = p\alpha = a$, con n intero e positivo, e gli argomenti a noto ed u incognito, ammette per $z = pu$ tutte le n^2 radici che corrispondono ai valori $u = \frac{1}{n}(\alpha + 2h\omega_1 + 2h'\omega_3)$, in cui ad h ed h' si attribuiscono gl'interi $0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, poichè prendendo h od h' maggiore di n equivarrà a sostituire ad essi $nq + r$ od $nq' + r'$, dove r ed r' simboleggiano interi inferiori ad n, e la funzione pu non varia col sopprimere i multipli $2q\omega_1$, $2q'\omega_3$ dei periodi. I suddetti n^2 valori di u forniscono radici diverse fra loro, altrimenti due qualunque u, u' degli argomenti avrebbero la somma o la differenza multipla di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ma $u + u'$ racchiude il termine $\frac{2\alpha}{n}$ che in generale non è multiplo di alcun periodo, ed $u - u'$ ha la forma $2\left(\frac{h - h_1}{n}\right)\omega_1 + 2\left(\frac{h' - h_1'}{n}\right)\omega_3$ con le differenze intere $h - h_1$, $h' - h_1'$ minori di n. Mutando il segno ad α risultano gli argomenti $v_1 = \frac{1}{n}(-\alpha + 2l\omega_1 + 2l'\omega_3)$, ma facendo $l = n - h$, $l' = n - h'$, ne conseguono $u + v_1 = 2(\omega_1 + \omega_3)$, $pu_1 = pu$. La quantità $y_n = pnu - pu$ è una frazione irriducibile $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ a termini razionali rispetto a $pu = z$ contenenti le sole potenze pari di $p'u = \frac{dz}{du}$, attesochè y_n resta invariabile col mutare il segno ad u. Le radici di $\varphi(z)$ riducono infinita la funzione pnu, e perciò hanno gli argomenti $v_{h,h'} = \frac{2h}{n}\omega_1 + \frac{2h'}{n}\omega_3$; esse radici sono due a due eguali a motivo di $v_{h,h'} + v_{n-h,n-h'} = 2(\omega_1 + \omega_3)$, ma nel caso di n pari esi-

stono tre radici semplici, poichè attribuendo ad h e h' i valori 0 ed $\frac{n}{2}$ vengono i semiperiodi ω_1, ω_3, $\omega_1+\omega_3=-\omega_2$ annullanti il trinomio $4z^3-g_2z-g_3=(p'u)^2$. In tutti i casi il numero delle radici di $\varphi(z)=\psi_n{}^2(u)$ eguaglia n^2-1, o quante sono le disposizioni con ripetizione dei numeri $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, eccetto la prima 00. Dunque per n impari il grado del polinomio $\psi_n(u)$ è $\frac{1}{2}(n^2-1)$, e per n pari la funzione $\frac{\psi_n{}^2(u)}{(p'u)^2}$ avendo la dimensione n^2-1-3, la sua radice $\frac{\psi_n(u)}{p'u}$ è del grado $\frac{1}{2}(n^2-4)$. Il numeratore $f(z)$ ha n^2 radici che corrispondono ai valori di u determinati dall'eguaglianza $pnu=pu$, ovvero $nu=\pm u+2h\omega_1+2h'\omega_3$; ne ricaviamo le due serie $u=\frac{2h\omega_1}{n+1}+\frac{2h'\omega_3}{n+1}$, $u'=\frac{2h\omega_1}{n-1}+\frac{2h'\omega_3}{n-1}$, che sono somme di argomenti multipli delle $(n+1)^{sime}$ ed $(n-1)^{sime}$ parti dei periodi, diversi nel caso di n pari, in quanto che $n+1$ ed $n-1$ siano primi fra loro, onde il polinomio $f(z)$ conterrà il prodotto $\psi_{n+1}(u)\,\psi_{n-1}(u)$ avente il grado $\frac{(n-1)^2-1}{2}+\frac{(n+1)^2-1}{2}=n^2$. Infine, per n impari i semiperiodi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sono termini comuni alle due serie u, u', il prodotto delle $\frac{\psi_{n-1}(u)}{p'u}$, $\frac{\psi_{n+1}(u)}{p'u}$ è una funzione intera di z, ed il suo grado è $\frac{1}{2}[(n-1)^2-4]+\frac{1}{2}[(n+1)^2-4]=n^2-3$; dunque il prodotto $\psi_{n-1}(u)\,\psi_{n+1}(u)$ rispetto a $pu=z$ è del grado n^2 e con la $f(z)$ avrà la ragione -1, come si è veduto per induzione; si dimostra in generale prendendo u infinitesimo, ed ammettendo il più alto termine di $\psi_n(u)$ avere la forma $nz^{\frac{n^2-1}{2}}$, ovvero $-\frac{1}{2}nz^{\frac{n^2-4}{2}}\frac{dz}{du}$, secondochè n sia impari o pari.

Il problema di calcolare i valori della funzione pu quando l'argomento sia la n^{sima} parte di un periodo ω_i consiste nel risolvere l'equazione $\psi_n(u)=0$; per $n=5$ sarebbe del dodicesimo grado, ma si riduce al sesto scegliendo le incognite $p\frac{2\omega_i}{5}=a$, $p\frac{4\omega_i}{5}=b$; per brevità adoperando i simboli $\varphi a=\left(p'\frac{2\omega_i}{5}\right)^2=4a^3-g_2a-g_3$, $\varphi b=\left(p'\frac{4\omega_i}{5}\right)^2=4b^3-g_2b-g_3$, e nella formula di addizione $pu+pv+p(u+v)=\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2$ facendo prima $u=\frac{2\omega_i}{5}$, $v=\frac{4\omega_i}{5}$, poi $u=\frac{4\omega_i}{5}$, $v=\frac{8\omega_i}{5}$, si ricaveranno

$$(2a+b)(a-b)^2=\frac{1}{4}(\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi b})^2,\quad (2b+a)(a-b)^2=\frac{1}{4}(\sqrt{\varphi a}+\sqrt{\varphi b})^2,$$

e per conseguenza $(a-b)^3 = \sqrt{\varphi a \, \varphi b}$. Le prime due eguaglianze, mediante le incognite ausiliarie $a+b=x$, $ab=y$, si trasformano in

$$12xy = 2x^3 + g_2 x + 2g_3, \quad 16(y+2x^2)(x^2-4y) = (4x^2-4y-g_2)^2,$$

che per l'eliminazione della y conducono alla sestica

$$x^6 - 5g_2 x^4 - 40 g_3 x^3 - 5 g_2^2 x^2 - 8 g_2 g_3 x - 5 g_3^2 = 0;$$

ad ogni radice x corrisponde un valore per y, ed ognuna delle sei coppie a, b verrà determinata dalla quadrica $t^2 - tx + y = 0$.

La moltiplicazione delle funzioni ellittiche fu trattata per la prima volta da Abel nel tomo II del Giornale di Crelle; egli dimostrò risolversi algebricamente $sn\frac{u}{n}$ in funzione di $sn\,u$, $sn\frac{\omega}{n}$, $sn\frac{\omega'}{n}$, e delle radici n^{sime} dell'unità, applicando il metodo tenuto da Gauss per sciogliere l'equazioni binomie, e la medesima proposizione conchiuse per $cn\frac{u}{n}$ e $dn\frac{u}{n}$; nel caso di $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed $n=2^p+1$ numero primo espresse $sn\frac{\omega}{n}$ per radicali quadrici.

86. — Se consideriamo $-pu$ qual derivata di una certa funzione ζu, le due relazioni $p(2\omega_1+u)=pu$, $p(2\omega_3+u)=pu$ moltiplicate per du ed integrate, forniscono le formule

$$(1)\ \zeta(u+2\omega_1)-\zeta u = 2\zeta\omega_1, \quad (2)\ \zeta(u+2\omega_3)-\zeta u = 2\zeta\omega_3,$$

avendo ottenuto le costanti col fare $u=-\omega_1$ nell'integrale della prima ed $u=-\omega_3$ in quello della seconda, ed avvertito essere impari la funzione ζu. Integrando lo sviluppo in serie di $-pu$, si trova

$$(3)\ \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{2^2.5}\frac{u^3}{3} - \frac{g_3}{2^2.7}\frac{u^5}{5} - \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}\frac{u^7}{7} - \dots$$

Le costanti $\zeta\omega_1$, $\zeta\omega_2$, $\zeta\omega_3$ si notano pure con i respettivi simboli η_1, η_2, η_3; or ponendo $u=\omega_2$ nelle (1) e poi aggiungendole, a motivo di $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$ resulta $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$; con successive m, n ripetizioni dei periodi ω_1, ω_3 otterremo la proprietà generale $\zeta(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = \zeta u + 2m\eta_1 + 2n\eta_3$.

È facile provare l'eguaglianze $d\varphi\,\Delta(k,\varphi) = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}(1-k^2 sen^2\varphi) =$

$$= du\sqrt{e_1-e_3}\left(1-\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}sen^2\varphi\right) = du\left(1-\frac{e_2-e_3}{pu-e_3}\right)\sqrt{e_1-e_3} =$$

$= du\,\frac{[e_1-p(u+\omega_3)]}{\sqrt{e_1-e_3}}$ applicando le formule (3), (4) del num. 85 e la

$p(\omega_3 + u) = e_1 + \frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_3)}{pu - e_3}$ analoga alla (12), pag. 253; preso l'integrale dell'antecedente fra i limiti $0, \frac{\pi}{2}$ abbiamo $E = \frac{e_1\omega_1 + \eta_1}{\sqrt{e_1 - e_3}}$.

In modo simile dall' identità $d\varphi\,\Delta(k_1, \varphi) = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}(1 - k_1^2\,sen^2\varphi) =$
$= i\,du\left(1 - \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}\,sen^2\varphi\right)\sqrt{e_1 - e_3} = i\,du\left(1 - \frac{e_1 - e_2}{pu - e_1}\right)\sqrt{e_1 - e_3} =$
$= i\,du\,\frac{e_3 - p(\omega_1 + u)}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ discende l'integrale $E' = \frac{i(e_3\omega_3 + \eta_3)}{\sqrt{e_1 - e_3}}$, e siccome $K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3}$, $K' = \frac{\omega_3}{i}\sqrt{e_1 - e_3}$, il teorema di Legendre (pag. 132) espresso da $EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$ si traduce nella $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$.

Dalla formula di addizione delle pu si ricava

$$(4)\quad \zeta(u+v) - \zeta u = \frac{1}{2}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right) + C,$$

e la costante C non dipende dalla u; col mutare il segno alla u e sottrarre la nuova equazione dalla medesima (4) si conchiude

$$(5)\quad \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = \frac{p'u}{pu - pv}.$$

Scambiando le variabili u, v resulta una simile alla (5) e aggiungendola a questa deduciamo

$$(6)\quad \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v = \frac{1}{2}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right).$$

Si noti con σu la funzione impari avente per sua derivata logaritmica la ζu; è chiaro potersi scrivere la (5) sotto la forma

$$\frac{d}{du}\left[\log\sigma(u+v) + \log(\sigma - u) - 2\log\sigma u\right] = \frac{d}{du}\log(pu - pv);$$

or significando con c una quantità indipendente da u ne conseguirà $\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u} = c(pu - pv)$. Anche qui lo scambio delle variabili u, v dà l' eguaglianza $\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 v} = c'(pu - pv)$, con c' indipendente da v; per il confronto si ridurranno identiche ponendo $c = \sigma^2 v$, $c' = \sigma^2 u$, e quindi ciascuna diviene

$$(7)\quad \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = pu - pv.$$

Lo sviluppo in serie della funzione $log\, \sigma u$ si ricava dalla $\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u$ col sostituirvi la serie (3); onde integrando verrà

$$(8)\quad log\, \sigma u = log\, u - \frac{g_2}{2^2.5.3.4} u^4 - \frac{g_3}{2^2.7.5.6} u^6 - \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2.7.8} u^8 - \ldots,$$

da cui discende $\lim_{u=0} log \left(\frac{\sigma u}{u}\right) = 0$, ovvero (9) $\lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = 1$; come pure la funzione impari $\sigma u = u + s_1 u^3 + s_2 u^5 + s_3 u^7 + s_4 u^9 \ldots$, moltiplicata per la serie (3), dà per prodotto la serie derivata $\sigma' u = 1 + 3 s_1 u^2 + 5 s_2 u^4 + 7 s_3 u^6 + 9 s_4 u^8 \ldots$; identificando i termini dello stesso grado risultano i coefficienti $s_1 = 0$, $s_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_2}{5!}$, $s_3 = -\frac{6.g_3}{7!}$, $s_4 = -\frac{9}{4} \cdot \frac{g_2^2}{9!}$, ..., e per conseguenza

$$(10)\quad \sigma u = u - \frac{1}{2} \cdot \frac{g_2}{5!} u^5 - \frac{6.g_3}{7!} u^7 - \frac{9}{4} \cdot \frac{g_2^2}{9!} u^9 - \ldots..$$

dove $n!$ simboleggia il fattoriale di n.

Se nella relazione (7) si ponga $v = u + h$ e si prenda il limite per $h = 0$, troveremo (11) $-p' u = \frac{\sigma 2 u}{\sigma^4 u}$; il primo membro eguaglia la quantità ψ_2; in generale sussiste la formula (12) $\psi_n = \frac{\sigma n u}{(\sigma u)^{n^2}}$, poichè sendo vera per $n = 1, = 2$ ed ammettendola fino all' indice n, si proverà esatta per l' indice successivo $n + 1$, sostituendo $\sigma (n-1) u = \psi_{n-1} . (\sigma u)^{(n-1)^2}$, $\sigma n u = \psi_n . (\sigma u)^{n^2}$ nell' eguaglianza $p n u - p u = \frac{\sigma (n+1) u\, \sigma (n-1) u}{\sigma^2 n u\, \sigma^2 u}$, ed osservando essere il primo membro identico a $-\frac{\psi_{n-1}\, \psi_{n+1}}{\psi_n^2}$. Dalla medesima relazione (7) si deduce $p (n+1) u - p n u = -\frac{\sigma (2n+1) u . \sigma u}{\sigma^2 (n+1) u . \sigma^2 n u}$; a motivo della (12) ottenendosi $\sigma (2n+1) u = \psi_{2n+1}\, \sigma^{(2n+1)^2} u$, $\sigma_{n+1} u = \psi_{n+1}\, \sigma^{(n+1)^2} u$, $\sigma_n u = \psi_n\, \sigma^{n^2} u$, ed inoltre $p n u = p u - \frac{\psi_{n-1}\, \psi_{n+1}}{\psi_n^2}$, facilmente ricaveremo (13) $\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\, \psi_n^3 - \psi_{n-1}\, \psi^3_{n+1}$; con simile dimostrazione, per le (7), (11) avendosi $p(n+1) u - p(n-1) u = \frac{\sigma 2 n u . p' u . \sigma^4 u}{\sigma^2 (n+1) u . \sigma^2 (n-1) u}$, conchiuderemo (14) $\psi_{2n} = \frac{\psi_n}{p' u} (\psi_{n-2}\, \psi^2_{n+1} - \psi_{n+2}\, \psi^2_{n-1})$, formule utili a calcolare per via ricorrente i polinomi ψ_{2n+1}, ψ_{2n} del numero 85.

Dall' eguaglianze $\frac{d \log \sigma u}{d u} = \zeta u$, $\zeta(u+2\omega_i) = \zeta u + 2\eta_i$ deduciamo $\log \sigma(u+2\omega_i) = \log \sigma u + 2\eta_i(u+c)$; per il valore $c=\omega_i$ consegue la relazione (15) $\sigma(u+2\omega_i) = -\sigma u\, e^{2\eta_i(u+\omega_i)}$, dove $i=1,2,3$; nel secondo membro si è posto il fattore -1, affinchè l'identità sia verificata per $u=-\omega_i$.

87. — La funzione σu soddisfa un'equazione di second'ordine a derivate parziali; omettendo per brevità di scriver l'argomento u, deriviamo le p, $p' = \frac{d p}{d u} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}$ rispetto alle g_2, g_3 ed avremo

$$\frac{d^2 p}{du\, dg_2} = p'' \frac{d p}{d g_2} - \frac{p}{2p'}, \quad \frac{d^2 p}{du\, dg_3} = p'' \frac{d p}{d g_3} - \frac{1}{2p'},$$

dalle quali facilmente si deducono

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{p'}\frac{d p}{d g_2}\right) = -\frac{p}{2p'^2}, \quad \frac{d}{du}\left(\frac{1}{p'}\frac{d p}{d g_3}\right) = -\frac{1}{2p'^2};$$

moltiplicandole per le rispettive costanti $-2a$, $-2b$ e poi aggiungendole membro a membro si trae $\frac{d}{du}\left(-\frac{2a}{p'}\frac{dp}{dg_2} - \frac{2b}{p'}\frac{dp}{dg_3}\right) = \frac{ap+b}{p'^2}$, trasformabile in $\frac{d}{du}\left(\frac{p'+c}{p'}\right) + f.p$ purchè si attribuiscano i valori $a=-9g_3$, $b=-\frac{1}{2}g_2^2$, $c=-\frac{1}{2}g_2$, $f=-3$, come è facile provare. Osservando essere $\frac{d\zeta}{du} = -p$ troviamo subito l'equazione integrale $18 g_3 \frac{dp}{dg_2} + g_2^2 \frac{dp}{dg_3} = p'' - \frac{1}{2}g_2 + 3p'\zeta$, e siccome $p'' = 6p^2 - \frac{1}{2}g_2$, $p = -\frac{d\zeta}{du}$, la precedente diviene

$$(1)\quad 12 g_3 \frac{dp}{dg_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{dp}{dg_3} = 4p^2 - \frac{2}{3}g_2 + 2p'\zeta =$$
$$= \frac{2}{3}p'' - \frac{1}{3}g_2 + 2p'\zeta = -\frac{2}{3}\frac{d^3\zeta}{du^3} - 2\zeta\frac{d^2\zeta}{du^2} - \frac{1}{3}g_2;$$

da cui eliminando il termine $2\zeta\frac{d^2\zeta}{du^2}$, mercè l'identità

$$\frac{d^2(\zeta^2)}{du^2} = 2\zeta\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 = 2\zeta\frac{d^2\zeta}{du^2} - \frac{1}{3}\frac{d^3\zeta}{du^3} + \frac{1}{6}g_2,$$

vedremo la (1) convertirsi nella

$$-12\, g_3 \frac{d\,p}{d\,g_2} - \frac{2}{3}\, g_2^2 \frac{d\,p}{d\,g_3} = \frac{d^3\,\zeta}{d\,u^3} + \frac{d^2\,(\zeta^2)}{d\,u^2} + \frac{1}{6}\, g_2 .$$

Questa, per due successive integrazioni, conduce a

$$(2)\quad 12\, g_3 \frac{d\,log\,\sigma}{d\,g_2} + \frac{2}{3}\, g_2^2 \frac{d\,log\,\sigma}{d\,g_3} = \frac{d^2 log\,\sigma\, u}{d\,u^2} + \left(\frac{d\,log\,\sigma\, u}{d\,u}\right)^2 + \frac{1}{12}\, g_2 u^2 =$$

$$= \zeta^2\,(u) - p\,(u) + \frac{1}{12}\, g_2\, u^2,$$

che a motivo dell'identità $\frac{d^2 log\,\sigma\, u}{d\,u^2} + \left(\frac{d\,log\,\sigma\, u}{d\,u}\right)^2 = \frac{1}{\sigma}\frac{d^2\,\sigma}{d\,u^2}$ si esprime ancora per

$$(3)\quad \frac{d^2\,\sigma}{d\,u^2} - \left(12\, g_3 \frac{d\,\sigma}{d\,g_2} + \frac{2}{3}\, g_2^2 \frac{d\,\sigma}{d\,g_3}\right) + \frac{1}{12}\, g_2\, u^2 \sigma = 0,$$

equazione trovata da Weierstrass.

Ponendovi $\sigma\, u = \Sigma\, b_n \frac{u^{2n+1}}{(2\,n+1)\,!}$ dedurremo la formula ricorrente

$$b_n = 12\, g_3 \frac{d\,b_{n-1}}{d\,g_2} + \frac{2}{3}\, g_2^2 \frac{d\,b_{n-1}}{d\,g_3} - \frac{1}{6}\,(n-1)\,(2\,n-1)\, g_2\, b_{n-2}$$

utile a calcolare i coefficienti b_n della serie $\sigma\, u$.

Indicando con $\varphi\,(x)$ il binomio $12\, g_3 \frac{d\,x}{d\,g_2} + \frac{2}{3}\, g_2^2 \frac{d\,x}{d\,g_3}$, mutando l'argomento u in $n\,u$ e posto $\sigma\, n\, u = y$, l'equazione (3) diverrà

$$(4)\quad \frac{1}{n^2\, y}\frac{d^2\, y}{d\,u^2} - \frac{1}{y}\,\varphi\,(y) + \frac{1}{12}\, g_2\, n^2\, u^2 = 0.$$

Eseguendo la sostituzione $y = v\,(\sigma\, u)^{n^2}$, in virtù delle derivate $\frac{1}{y}\frac{d\,y}{d\,u} = \frac{1}{v}\frac{d\,v}{d\,u} + n^2\,\zeta u$, $\frac{1}{y}\frac{d^2\,y}{d\,u^2} = \frac{1}{v}\frac{d^2\,v}{d\,u^2} + \frac{2\,n^2}{v}\,\zeta u\,\frac{d\,v}{d\,u} + n^4\,\zeta^2 u - n^2 p$, dell'espressione $\frac{1}{y}\,\varphi\,(y) = \frac{1}{v}\,\varphi\,(v) + n^2 \varphi\,(log\,\sigma\, u)$, e delle formule (2), (3), l'eguaglianza (4) riducesi alla

$$(5)\quad \frac{1}{n^2}\frac{d^2\, v}{d\,u^2} + 2\,\zeta\, u\,\frac{d\,v}{d\,u} + (n^2-1)\, v\, p - \varphi\,(v) = 0 .$$

Cambiando la variabile indipendente u nella $p\,u = z$, a causa delle derivate parziali $\frac{d\,v}{d\,u} = p'\frac{d\,v}{d\,z}$, $\frac{d^2\,v}{d\,u^2} = p'\frac{d^2\,v}{d\,z^2} + p''\frac{d\,v}{d\,z}$, della $\varphi(v)$ che

aumenta del termine $\frac{dv}{dz}\varphi(z)$, del differenziale $dv = \frac{dv}{du}du + \frac{dv}{dz}dz$, ed avvertendo aversi, per la (1), $\varphi(z) = 4z^2 + 2p'\zeta u - \frac{2}{3}g_2$, conchiuderemo l' equazione

$$(6)\quad p'^2\frac{d^2v}{dz^2} - \left[(4n^2-6)z^2 - (4n^2-3)\frac{g_2}{6}\right]\frac{dv}{dz} - n^2\varphi(v) + n^2(n^2-1)vz = 0.$$

Per l' ipotesi fatta, la funzione v coincide con la $\psi_n(u)$; onde la precedente (6) si applica a determinare i successivi coefficienti della ψ_n ordinata secondo le potenze della variabile z; è chiaro l'operazione $\varphi(v)$ doversi eseguire sopra i coefficienti di ψ_n. Nel caso di n impari, fatto $m = \frac{n^2-1}{2}$ si scrive $\psi_n(u) = n\,z^m + a_1 z^{m-2} + a_2 z^{m-3} + a_3 z^{m-4} + \ldots$, e per n pari sostituendo $v = p'w$ nella (6), a causa delle derivate $\frac{dv}{dz} = p'\frac{dw}{dz} + w\frac{dp'}{dz}$, $\frac{d^2v}{dz^2} = p'\frac{d^2w}{dz^2} + 2\frac{dp'}{dz}\frac{dw}{dz} + w\frac{d^2p'}{dz^2}$, dell'eguaglianze $p'^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$, $2p'\frac{dp'}{dz} = 12z^2 - g_2$, $\varphi(p'w) = p'\varphi(w) + w\varphi(p')$, $\varphi(p') = -\frac{1}{p'}\left(6g_3 z + \frac{1}{3}g_2^2\right)$, con facili riduzioni si trova l' equazione corrispondente

$$(7)\quad p'^2\frac{d^2w}{dz^2} - \left[(4n^2-18)z^2 - (4n^2-9)\frac{g_2}{6}\right]\frac{dw}{dz} - n^2\varphi(w) + (n^2-3)(n^2-4)\,z\,w = 0,$$

in cui $w = -\psi_n(u) = n\,z^m + b_1 z^{m-2} + b_2 z^{m-3} + \ldots$ con n pari ed $m = \frac{n^2-4}{2}$.

Per maggiore sviluppo si consulti la prima parte del *Traité des fonctions elliptiques*, par G. H. Halphen. Paris, 1886.

Capo Nono.

IL TEOREMA DI ABEL.

88. — Euler dimostrò il limite superiore dell'integrale somma di due integrali ellittici della medesima specie e dello stesso modulo esprimersi algebricamente per i loro limiti, in quella guisa che ogni funzione goniometrica della somma di due angoli si determina con operazioni algebriche eseguite sulle funzioni goniometriche degli addendi. Invano Euler, Legendre, Lagrange .... travagliaronsi per estendere la detta proposizione ad n integrali, simili o d'ordine più elevato: spettava al genio della Norvegia lo svelare gli ascosi veri, e poi qual fulgida stella ascesa sul polo dell'orizzonte disparire con rapido tramonto! La grande Memoria di Abel *Sur une propriété générale d'une classe très étendue des fonctions transcendantes* fu, l'anno 1826, presentata all'Istituto di Francia e soltanto edita dopo un trilustre nel tomo VII delle *Mémoires des Savants étrangers*, sebbene alcune parti del lavoro si fossero divulgate nei volumi III e IV del Giornale di Crelle.

Prima di esporre il teorema Abeliano è d'uopo accennare alcune proprietà algebriche dovute ad Euler. Siano le funzioni razionali intere

$$f(z) \quad \text{ed} \quad F(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \dots + a_p = \\ = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p);$$

per la teoria della decomposizione di una frazione razionale in frazioni semplici sussiste la identità (1) $\frac{f(z)}{F(z)} = E(z) + \Sigma \frac{f(z_i)}{F'(z_i)} \frac{1}{z - z_i}$, dove $E(z)$ sta a significare la parte intera del quoziente e z_i una radice di $F(z)$; ora nello sviluppo delle frazioni in serie ordinate secondo le potenze decrescenti di z, il coefficiente di z^{-1} eguaglia $\Sigma \frac{f(z_i)}{F'(z_i)}$; dunque se il numeratore $f(z)$ sia di grado $p-2$, la parte intera $E(z)$ si annulla, onde moltiplicando la precedente identità per $F(z)$ e dopo eguagliando nei due membri i coefficienti dei termini di grado $p-1$ rispetto a z, si conchiude (2) $\Sigma \frac{f(z_i)}{F'(z_i)} = 0$; parimente avendosi

$$F'(z) = p\, a_0 z^{p-1} + (p-1)\, a_1 z^{p-2} + \dots + a_{p-1}$$

si ottiene $\frac{z^{p-1}}{F'(z)} = \frac{1}{p\,a_0} - \frac{f_1(z)}{F'(z)}$, in cui $f_1(z)$ simboleggia una funzione intera del grado $p-2$; aggiungendo l'equazioni risultanti per la sostituzione delle p radici, in virtù della (2) si ricava (3) $\Sigma \frac{z_i^{p-1}}{F'(z_i)} = \frac{1}{a_0}$; come pure notando con $f_2(z)$ un polinomio intero di grado $p-2$, dalla equazione $\frac{z^p}{F'(z)} = \frac{z}{p\,a_0} - \frac{(p-1)\,a_1}{p^2 a_0^2} - \frac{f_2(z)}{F'(z)}$, $a_1 = -a_0 \Sigma z_i$ discende la

$$(4) \quad \Sigma \frac{z_i^p}{F'(z_i)} = -\frac{a_1}{a_0^2} = \frac{1}{a_0}(z_1 + z_2 + \ldots + z_p),$$

e per h intero e minore di $p-1$ dalla (3) verrà (5) $\Sigma \frac{z_i^h}{F'(z_i)} = 0$.

Prendendo nell' identità (1) il numeratore costante ed eguale ad uno, per $z = \alpha$ si trova $-\frac{1}{F(\alpha)} = \Sigma \frac{1}{F'(z_i)} \frac{1}{z_i - \alpha}$, e chiamando $\psi(z)$ una funzione intera della z, $\psi_1(z)$ il quoziente intero di essa divisa per $z - \alpha$; a motivo di $\frac{\psi(z)}{z-\alpha} = \psi_1(z) + \frac{\psi(\alpha)}{z-\alpha}$ ne consegue

$$\Sigma \frac{\psi(z_i)}{(z_i - \alpha) F'(z_i)} = \Sigma \frac{\psi_1(z_i)}{F'(z_i)} + \psi(\alpha) \Sigma \frac{1}{(z_i - \alpha) F'(z_i)} = \Sigma \frac{\psi_1(z_i)}{F'(z_i)} - \frac{\psi(\alpha)}{F(\alpha)};$$

poichè il primo termine di questo secondo membro eguaglia il coefficiente di z^{-1} nello sviluppo della frazione $\frac{\psi_1(z)}{F(z)}$, identica a $\frac{\psi(z) - \psi(\alpha)}{(z-\alpha) F(z)}$, ordinata secondo le potenze decrescenti di z, ed inoltre lo svolgimento in serie della parte $\frac{\psi(\alpha)}{(z-\alpha) F(z)}$ non possa contenere la potenza z^{-1}, enuncieremo: *l'espressione* $\Sigma \frac{\psi(z_i)}{(z_i - \alpha) F'(z_i)}$ *pareggiare la costante* $-\frac{\psi(\alpha)}{F(\alpha)}$ *accresciuta del coefficiente di* z^{-1} *nello sviluppo in serie della frazione* $\frac{\psi(z)}{(z-\alpha) F(z)}$.

89. — Teorema Abeliano (*): *La somma d' integrali simili ellittici od iperellittici è riducibile ad una quantità algebrico-logaritmica, purchè fra le variabili si cerchi di stabilire una o più relazioni algebriche.*

(*) Vedi pag. 145 del tomo I delle *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel; nouvelle édition publiée aux frais de l'État norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie.* Christiania, 1881.

Nell' integrale $\int_c^z \frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha)\sqrt{\varphi(z)}}$ siano $f(z)$ e $\varphi(z)$ funzioni intere della variabile z ed α, c costanti; suppongasi la $\varphi(z)$ decomposta nel prodotto delle due funzioni intere $\varphi_1 z$, $\varphi_2 z$ con noti coefficienti, e mediante i polinomi

$$\psi_1 z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m, \quad \psi_2 z = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n,$$

dove le $m+n+2$ costanti a_i, b_i sono arbitrarie, si costruisca la funzione (1) $Fz = (\psi_1 z)^2 \varphi_1 z - (\psi_2 z)^2 \varphi_2 z$ avente le p radici $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{p-1}, z_p$. Se z rappresenti una qualunque di esse, ad un' infinitesima variazione dei coefficienti indeterminati a_i, b_i corrisponderà un' infinitesima variazione della z ed un incremento δFz della Fz; or siccome questa si annulla, anche il suo differenziale sarà pure nullo, ovvero $F'z\,dz + \delta Fz = 0$, da cui si deduce (2) $F'z\,dz = 2\psi_2 z\,\varphi_2 z\,\delta\psi_2 z - 2\psi_1 z\,\varphi_1 z\,\delta\psi_1 z$. Eliminiamo i fattori $\varphi_1 z$, $\varphi_2 z$ mediante l'eguaglianza $\psi_1 z\sqrt{\varphi_1 z} = \varepsilon\psi_2 z\sqrt{\varphi_2 z}$ derivante dalla (1) per l' ipotesi di z radice e di $\varepsilon = \pm 1$; attesochè risultino le identità $\varepsilon\psi_1 z\sqrt{\varphi z} = \psi_2 z\,\varphi_2 z$, $\varepsilon\psi_2 z\sqrt{\varphi z} = \psi_1 z\,\varphi_1 z$, la (2) si potrà scrivere sotto la forma $\frac{\varepsilon\,dz}{\sqrt{\varphi z}} = 2\,\frac{(\psi_1 z\,\delta\psi_2 z - \psi_2 z\,\delta\psi_1 z)}{F'z}$, e quindi integrando fra i limiti c, z n' emergerà la relazione

$$\int_c^z \frac{\varepsilon f(z)\,dz}{(z-\alpha)\sqrt{\varphi(z)}} = 2\int_c^z f(z)\,\frac{\psi_1 z\,\delta\psi_2 z - \psi_2 z\,\delta\psi_1 z}{F'(z)} + \textit{costante}.$$

Sostituendo in luogo di z ciascuna delle radici z_i di Fz, simboleggiando con ε_i l'unità positiva o negativa, per l'addizione di tutte l'eguaglianze che ne conseguono, troveremo

$$\Sigma\,\varepsilon_i \int_c^{z_i} \frac{f(z_i)\,dz_i}{(z_i-\alpha)\sqrt{\varphi(z_i)}} = 2\int_c^{z_i} \Sigma\, f(z_i)\,\frac{\psi_1 z_i\,\delta\psi_2 z_i - \psi_2 z_i\,\delta\psi_1 z_i}{(z_i-\alpha)\,F'(z_i)}.$$

Ora la quantità racchiusa sotto il simbolo sommatorio nel secondo membro non dipende dagli incrementi infinitesimi delle radici, ma è funzione razionale delle variazioni dei coefficienti indeterminati a_h, b_h; onde per l'ultimo lemma di algebra surriferito eguaglia la somma della quantità $f(\alpha)\,\frac{[\psi_1\alpha\,\delta\psi_2\alpha - \psi_2\alpha\,\delta\psi_1\alpha]}{(\psi_1\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\psi_2\alpha)^2\varphi_2\alpha}$ e del coefficiente di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo della frazione $\frac{f(z)\,[\psi_1 z\,\delta\psi_2 z - \psi_2 z\,\delta\psi_1 z]}{(z-\alpha)[(\psi_1 z)^2\varphi_1 z - (\psi_2 z)^2\varphi_2 z]}$ ordinato secondo le potenze decrescenti di z. Le quali espressioni hanno la forma

$A\,\frac{(u\,dv - v\,du)}{Bu^2 - Cv^2}$, rappresentando A, B, C note funzioni di α o di z, e significando u, v funzioni razionali dei coefficienti indeterminati a_i, b_i; onde i loro integrali si esprimono con $\frac{A}{2\sqrt{BC}}\,log\left(\frac{v\sqrt{C}+u\sqrt{B}}{v\sqrt{C}-u\sqrt{B}}\right)$, ovvero possono ridursi a formule algebriche.

Il teorema abeliano comprende un'infinità di casi particolari: supposta divisa l'equazione $F(z)=0$ per uno dei coefficienti arbitrari, il numero di questi diverrà $h=m+n+1$, ed a motivo di p maggiore di h si potranno calcolare in funzione delle prime h radici $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_h$ mediante il sistema $\psi_1 z_1 \sqrt{\varphi_1 z_1} = \varepsilon_1 \psi_2 z_1 \sqrt{\varphi_2 z_1}$, $\psi_1 z_2 \sqrt{\varphi_1 z_2} = \varepsilon_2 \psi_2 z_2 \sqrt{\varphi_2 z_2}$, ..., $\psi_1 z_h \sqrt{\varphi_1 z_h} = \varepsilon_h \psi_2 z_h \sqrt{\varphi_2 z_h}$; i segni delle unità $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ saranno arbitrari; non così per le rimanenti $p-h$ equazioni simili, poichè avendo sostituiti i valori dei coefficienti in funzione delle prime h radici, dovranno essere identici i segni dei due membri in ciascuna equazione, ed inoltre il prodotto $a_0(z-z_{h+1})(z-z_{h+2})\ldots(z-z_p) = \frac{F(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_h)}$ sia esprimibile razionalmente per le prime h radici.

90. — Applichiamo il teorema abeliano agl'integrali ellittici. Si prendano $\varphi z = z(1-z)(1-k^2 z)$, $\varphi_1 z = z$, $\varphi_2 z = (1-z)(1-k^2 z)$, $\psi_1 z = a+z$, $\psi_2 z = b$; ne risulterà $Fz = (a+z)^2 z - b^2(1-z)(1-k^2 z)$ avente le radici z_1, z_2, z_3 legate dalle relazioni algebriche

$$(1)\quad \Sigma z_1 = b^2k^2 - 2a, \quad \Sigma z_1 z_2 = a^2 + b^2(1+k^2), \quad z_1 z_2 z_3 = b^2,$$

per le quali ne consegue (2) $(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3) = (a+1)^2$. I coefficienti a, b verranno determinati per due dell'equazioni

$$(3)\quad \begin{cases} (a+z_1)\sqrt{z_1} = \varepsilon_1 b\sqrt{(1-z_1)(1-k^2 z_1)}, \\ (a+z_2)\sqrt{z_2} = \varepsilon_2 b\sqrt{(1-z_2)(1-k^2 z_2)}, \\ (a+z_3)\sqrt{z_3} = \varepsilon_3 b\sqrt{(1-z_3)(1-k^2 z_3)}. \end{cases}$$

I lemmi di Euler danno le tre identità

$$(4)\quad \Sigma\frac{1}{F'(z_i)} = 0, \quad \Sigma\frac{z_i}{F'(z_i)} = 0, \quad \Sigma\frac{z_i^2}{F'(z_i)} = 1;$$

supponendo $f(z) = z - \alpha$, $c = 0$ e C una costante, l'equazione di Abel si riduce, in virtù delle (4), a $\Sigma z_i \int_0^{z_i} \frac{d\,z_i}{\sqrt{z_i(1-z_i)(1-k^2 z_i)}} = C$; fat-

tovi $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, e considerando z_3 qual valore di z_2 per $z_1 = 0$, dovrà prendersi $C = 0$, $\varepsilon_3 = -1$; eliminando a fra le prime due delle (3) si trova

$$b = -\sqrt{z_1 z_2}\,\frac{[\sqrt{z_2(1-z_1)(1-k^2 z_1)} + \sqrt{z_1(1-z_2)(1-k^2 z_2)}]}{1-k^2 z_1 z_2};$$

le variabili z_1, z_2 sono minori di uno, $b = -\sqrt{z_1 z_2 z_3}$ che paragonato alla precedente e per $z_1 = sen^2\varphi$, $z_2 = sen^2\varphi'$, $z_3 = sen^2\mu$ fornisce la nota relazione $sen\,\mu = \dfrac{sen\,\varphi' \cos\varphi\,\Delta\varphi + sen\,\varphi\cos\varphi'\,\Delta\varphi'}{1-k^2 sen^2\varphi\, sen^2\varphi'}$; i valori dei coefficienti saranno $b = -sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\, sen\,\mu$, $a+1 = \cos\varphi\cos\varphi'\cos\mu$; così le (3) equivalgono alle note formule di Lagrange

$$\cos\varphi'\cos\mu + sen\,\varphi'\, sen\,\mu\,\Delta\varphi = \cos\varphi\,, \;\ldots\ldots$$

Invece, ponendo $f(z) = \dfrac{z-\alpha}{2}(1-k^2 z)$, $c=0$, il primo membro della relazione abeliana diverrà la somma degl' integrali ellittici di seconda specie $\displaystyle\int_0^z \frac{(1-k^2 z)\,dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}} = E\varphi$, il secondo membro si tradurrà in $\displaystyle\int_0^z \Sigma\,\frac{[(a+z_i)\,db - b\,da]}{F'(z_i)}(1-k^2 z_i)$, che a motivo delle identità (4) si riduce a $-\displaystyle\int k^2\,db = -k^2 b + C$ e ne scaturirà la nota proposizione del Fagnani $E\varphi + E\varphi' - E\mu = k^2\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'\, sen\,\mu$. Infine, prendendo $f(z) = -\dfrac{1}{2}z$, il primo membro della relazione abeliana conterrà la somma di tre integrali ellittici della terza specie simili ad $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^z \frac{z\,dz}{(z-\alpha)\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}$, ed il secondo membro eguaglierà $\displaystyle\int\left[\Sigma\,\frac{(a\,db - b\,da)\,z_i}{(z_i-\alpha)\,F'(z_i)} + \Sigma\,\frac{z_i^2\,db}{(z_i-\alpha)\,F'(z_i)}\right]$, che in virtù delle identità (4) e della relazione $\displaystyle\Sigma\,\frac{1}{(z_i-\alpha)\,F'(z_i)} = -\frac{1}{F(\alpha)}$, per i surriferiti valori di a, b, si converte nella forma

$$\int \alpha\,\frac{(a+\alpha)\,db - b\,da}{(a+\alpha)^2\alpha - b^2(1-\alpha)(1-k^2\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}}\,\log\frac{(a+\alpha)\sqrt{\alpha} + b\sqrt{(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}}{(a+\alpha)\sqrt{\alpha} - b\sqrt{(1-\alpha)(1-k^2\alpha)}}.$$

Anche la somma delle funzioni $p(u)$ resulta un corollario del teorema abeliano; infatti, pongasi $f(z)=z-\alpha$, $\varphi(z)=(p'u)^2=4z^3-g_2 z-g_3$, $z_i=p(u_i)$, $\varphi_1(z)=1$, $\varphi_2(z)=(p'u)^2$, a causa del differenziale $dz_i=p'u_i.du_i$ si trova $\Sigma\, du_i = 2\int \Sigma \frac{\psi_1 z_i\, \delta\, \psi_2 z_i - \psi_2 z_i\, \delta\, \psi_1 z_i}{F'(z_i)}$; ora, prendendo per grado di $F(z)$ il maggiore dei due numeri $2m$, $2n+3$, se il primo supera l'altro, si trae $m+n \leq (2m)-2$, e nel caso di $2n+3>2m$ viene $m\leq n+1$ e quindi $m+n\leq(2n+3)-2$; dunque in ciascuna delle frazioni addende il grado del denominatore superando di due unità quello del respettivo numeratore, per il lemma di Euler la lor somma si annulla, onde $\Sigma\, du_i=0$, ovvero $\Sigma\, u_i=$ *costante*. La funzione $A_0+A_1 pu+A_2 p'u+A_3 p''u+\ldots+A_i p^{(i-1)}u=0$, intera rispetto a pu e $p'u$, ammetta gli argomenti $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_i$; sarà pur verificata da $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_i$; eliminando i coefficienti $A_0, A_1, \ldots, A_i$ si ottiene per formula di addizione il determinante

$$\begin{vmatrix} 1\; pu\; p'u \;\ldots p^{(i-1)}u \\ 1\; pu_1\; p'u_1 \;\ldots p^{(i-1)}u_1 \\ 1\; pu_2\; p'u_2 \;\ldots p^{(i-1)}u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\; pu_i\; p'u_i \;\ldots p^{(i-1)}u_i \end{vmatrix} = 0$$

insieme ad $u+u_1+u_2+\ldots+u_i=0$.

91. — Jacobi, in una sua lettera all'Hermite, indicò una rappresentazione geometrica del teorema di Abel, ed il prof. Genocchi (nato a Piacenza il 5 marzo 1817 e morto a Torino il 7 marzo 1889) dimostrava negli *Annali di matematica*, tomo I, serie 2ª: *Se una retta mobile* r *sega una curva* s *del grado* n *e tocca un'altra* s', *i punti* rs *d'intersezione forniscono i limiti degl'integrali addendi.* Simboleggino

$$(1)\ f(x, y)=0, \quad (2)\ ux+vy+w=0$$

l'equazioni delle linee r, s in coordinate ortogonali, $\psi(x, y)$ una funzione intera del grado $n-1$, e $f_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$ le somme dei termini aventi i respettivi gradi n, $n-1$ nelle $f(x,y)$, $\psi(x,y)$; le ascisse dei punti rs sono date dalla equazione (3) $f\left(x, -\frac{ux+w}{v}\right)=0$, e siccome $f_0(x,y)=\Sigma\, a_h x^\alpha y^\beta$, dove per ipotesi $\alpha+\beta=n$, il coefficiente della potenza x^n eguaglierà nella (3) il polinomio

$$\Sigma\, a_h \left(-\frac{u}{v}\right)^\beta = \Sigma\, a_h u^n \left(-\frac{1}{v}\right)^\beta \left(\frac{1}{u}\right)^\alpha = u^n f_0\left(\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}\right);$$

in simil modo il coefficiente di x^{n-1} nella $\psi\left(x, -\frac{ux+w}{v}\right)$ sarà $u^{n-1}\psi_0\left(\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}\right)$. Or la prima derivata della funzione (1) riducen-

dosi a $f'_x - \frac{u}{v} f'_y$ a motivo di $\frac{u}{v} = -\frac{dy}{dx}$ tratto dalla (2), in virtù del lemma di algebra citato al numero 86 conchiudiamo

$$(4) \quad \Sigma \frac{\psi(x, y)}{v f'_x - u f'_y} = \frac{1}{uv} \frac{\psi_0\left(\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}\right)}{f_0\left(\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}\right)},$$

dove la sommatoria del primo membro estendesi a tutti i punti rs. In virtù delle ragioni eguali $\frac{dx}{-f'_y} = \frac{dy}{f'_x} = \frac{ds}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}$ ricaveremo

$$(5) \quad v f'_x - u f'_y = \frac{(v\,dy + u\,dx)}{ds} \sqrt{f'^2_x + f'^2_y};$$

in secondo luogo la posizione r' della retta mobile successiva alla r si ottiene sostituendo $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ nella (2), e ne conseguirà l'eguaglianza $x\,du + y\,dv + dw = 0$, onde il punto M comune alle rette r, r' definito dalle coordinate $x_1 = \frac{v\,dw - w\,dv}{u\,dv - v\,du}$, $y_1 = \frac{w\,du - u\,dw}{u\,dv - v\,du}$ apparterrà all'inviluppo s'; chiamando δ la distanza di questo M da uno qualunque (x, y) dei punti rs, per la relazione $\delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ verrà $\delta^2 (u\,dv - v\,du)^2 = [(ux + w)\,dv - vx\,dv - v\,dw]^2 + [(vy + w)\,du - uy\,dv - u\,dw]^2 = [vx\,du + vy\,dv + v\,dw]^2 + [ux\,du + uy\,dv + u\,dw]^2$ a causa della (2), e riducendo con l'equazione differenziale della stessa (2) troveremo l'eguaglianza

$$\delta(u\,dv - v\,du) = (x\,du + y\,dv + dw)\sqrt{u^2 + v^2} = -(u\,dx + v\,dy)\sqrt{u^2 + v^2};$$

dunque avendosi $v f'_x - u f'_y = \frac{\delta(u\,dv - v\,du)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{f'^2_x + f'^2_y}$, la (4) assumerà la forma

$$(6) \quad \Sigma \frac{\psi(x, y)\,ds}{\delta\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} = \frac{(u\,dv - v\,du)}{uv\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\psi_0\left(\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}\right)}{f_0\left(\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}\right)};$$

nel caso che la $\psi(x, y)$ si scelga del grado $n - 2$, il secondo membro si annulla e la (6) coincide con una formula di Jacobi.

92. — *I poligoni di Poncelet.* Il fascio delle coniche descritte per i punti comuni alle (1) $U = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, (2) $V = x^2 + y^2 + z^2 = 0$

viene simboleggiato da $U+\lambda V=0$ con λ parametro variabile. Se h, m siano due valori di λ, le rette

$$(3)\quad \begin{cases} (a+h)\,x\,x_0+(b+h)\,y\,y_0+(c+h)\,z\,z_0=0, \\ (a+m)\,x\,x_1+(b+m)\,y\,y_1+(c+m)\,z\,z_1=0 \end{cases}$$

toccheranno le respettive coniche nei punti $H(x_0, y_0, z_0)$, $M(x_1, y_1, z_1)$ e coincideranno quando sussistano le condizioni

$$(a+m)\,x_1 : (a+h)\,x_0 = (b+m)\,y_1 : (b+h)\,y_0 = (c+m)\,z_1 : (c+h)\,z_0.$$

Da questi rapporti ricavando quelli delle x_1, y_1, z_1 e sostituendoli nella (4) $U+m\,V=0$ si troverà

$$\frac{(a+h)^2\,x_0^2}{a+m}+\frac{(b+h)^2\,y_0^2}{b+m}+\frac{(c+h)^2\,z_0^2}{c+m}=0,$$

che insieme alla (5) $U+h\,V=0$ forniscono le ragioni

$$(6)\quad x_0 : y_0 : z_0 = \sqrt{\frac{(a+m)(b-c)}{a+h}} : \sqrt{\frac{(b+m)(c-a)}{b+h}} : \sqrt{\frac{(c+m)(a-b)}{c+h}};$$

onde ne deriva tradursi ciascuna delle (3) nella equazione

$$(7)\quad x\sqrt{(a+m)(a+h)(b-c)}+y\sqrt{(b+m)(b+h)(c-a)}+z\sqrt{(c+m)(c+h)(a-b)}=0,$$

che rappresenta la tangente MH comune alle due coniche (4), (5). Moltiplicando per $\sqrt{h}$ i radicali contenuti nelle (6) e poi facendo $h=\infty$, $m=\theta$ avremo le coordinate

$$(8)\quad x : y : z = \sqrt{(a+\theta)(b-c)} : \sqrt{(b+\theta)(c-a)} : \sqrt{(c+\theta)(a-b)}$$

di un punto P situato sulla conica (2), attesochè il parametro di questa sia ∞. Sostituendo alle x, y, z della (7) le precedenti quantità proporzionali si ottiene la condizione (9) $(b-c)\sqrt{(a+m)(a+h)(a+\theta)}+$ $+(c-a)\sqrt{(b+m)(b+h)(b+\theta)}+(a-b)\sqrt{(c+m)(c+h)(c+\theta)}=0$, significante il punto P giacere sulla retta MH; e ridotta a forma razionale diviene

$$(10)\quad (ab+bc+ca-hm-h\theta-m\theta)^2=(a+b+c+h+m+\theta)\,(abc+hm\theta),$$

funzione simmetrica dei parametri h, m, θ o delle costanti a, b, c e quadrica rispetto a ciascuna di queste sei grandezze; così le due radici θ, θ' della (10) sono i parametri dei punti P, P' d'intersezione della MH con la conica V. Si noti con Δt il prodotto $(a+t)(b+t)(c+t)$, discriminante della quadrica $U+Vt$; se nella (9) si scambiano le lettere a, b, c colle rispettive θ, m, h troveremo il determinante (11) $\begin{vmatrix} 1 & h & \sqrt{\Delta h} \\ 1 & m & \sqrt{\Delta m} \\ 1 & \theta & \sqrt{\Delta \theta} \end{vmatrix} = 0$, che sviluppato e ridotto a forma razionale coincide con l'equazione (10). Pel teorema d'Euler sull'addizione degl'integrali ellittici $\Pi\, t = \int_\infty^t \frac{dt}{\sqrt{\Delta t}}$, si deduce i parametri θ, θ' esser pure legati con i due m, h per le relazioni trascendenti $\Pi\,\theta = \Pi\, m - \Pi\, h$, $\Pi\,\theta' = \Pi\, m + \Pi\, h$; inversamente l'equazione $\Pi\,\theta' - \Pi\,\theta = 2\,\Pi\, h$ esprime la retta PP' toccare la conica $U + h\,V = 0$.

Suppongasi il triangolo $P\,P'P''$ iscritto nella $V=0$ e con i lati respettivamente tangenti alle coniche $U+h\,V=0$, $U+h'\,V=0$, $U+h''\,V=0$; per il principio surriferito i parametri θ, θ', θ'' dei vertici P, P', P'' sono congiunti per l'eguaglianze $\Pi\,\theta - \Pi\,\theta' = 2\,\Pi\, h''$, $\Pi\,\theta' - \Pi\,\theta'' = 2\,\Pi\, h$, $\Pi\,\theta'' - \Pi\,\theta = 2\,\Pi\, h'$, e quindi ne discende $\Pi\, h + \Pi\, h' + \Pi\, h'' = 0$, insieme alla formula algebrica $\begin{vmatrix} 1 & h & \sqrt{\Delta h} \\ 1 & h' & \sqrt{\Delta h'} \\ 1 & h'' & \sqrt{\Delta h''} \end{vmatrix} = 0$. Ora, essendo

$$\Delta h = a\,b\,c + (a\,b + b\,c + c\,a)\,h + (a + b + c)\,h^2 + h^3,$$

se poniamo $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4\,\alpha$, $\frac{1}{a\,b} + \frac{1}{b\,c} + \frac{1}{c\,a} = 4\,\beta$, $\frac{1}{a\,b\,c} = 4\,\gamma$

risulterà $\sqrt{\Delta h} = \sqrt{a\,b\,c}\,\sqrt{1 + 4\,\alpha\,h + 4\,\beta\,h^2 + 4\,\gamma\,h^3} =$

$$= (a\,b\,c)^{\frac{1}{2}}\,[1 + 2\,\alpha\,h + 2\,(\beta - \alpha^2)\,h^2 + 2\,(\gamma - 2\,\alpha\,\beta + 2\,\alpha^3)\,h^3 + \ldots];$$

per questo valore di $\sqrt{\Delta h}$ e gli altri simili di $\sqrt{\Delta h'}$, $\sqrt{\Delta h''}$, il suddetto determinante si riduce a $\begin{vmatrix} 1 & h & 2\,(\beta - \alpha^2)\,h^2 + \ldots \\ 1 & h' & 2\,(\beta - \alpha^2)\,h'^2 + \ldots \\ 1 & h'' & 2\,(\beta - \alpha^2)\,h''^2 + \ldots \end{vmatrix} = 0$, e siccome esso è divisibile per $\begin{vmatrix} 1 & h & h^2 \\ 1 & h' & h'^2 \\ 1 & h'' & h''^2 \end{vmatrix}$ trovasi per quoziente il polinomio

$$2\,(\beta - \alpha^2) + 2\,(\gamma - 2\,\alpha\,\beta + 2\,\alpha^3)\,(h + h' + h'') + \ldots = 0.$$

Il limite per $h = h' = h'' = 0$ dà la condizione $\beta = \alpha^2$, affinchè il triangolo $P P' P''$ iscritto nella conica V sia pur circoscritto alla U, e si esprime ancora per $a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 - 2\,a\,b\,c\,(a + b + c) = 0$, ovvero $\sqrt{a\,b} \pm \sqrt{b\,c} \pm \sqrt{c\,a} = 0$. L'esposta dimostrazione è del sommo Cayley, che nella sua *Note on the Porism of the In—and—Circumscribed Polygon,* stampata nel tomo VI del *Philosophical Magazine,* anno 1853-54, estese il metodo ad un *n-agono* iscritto in una conica V e con gli n lati respettivamente tangenti alle coniche $U + h_1 V = 0$, $U + h_2 V = 0$, ..., $U + h_n V = 0$. Imperocchè, dicendo θ_1, θ_2, θ_3, ..., θ_n i parametri dei vertici, dalle relazioni $\Pi\,\theta_2 - \Pi\,\theta_1 = 2\,\Pi\,h_1$, $\Pi\,\theta_3 - \Pi\,\theta_2 = 2\,\Pi\,h_2$, ... si ricava $\Pi\,h_1 + \Pi\,h_2 + \Pi\,h_3 + \ldots + \Pi\,h_n = 0$, ma per il teorema di Abel a questa somma di n integrali ellittici corrisponde l'equazione algebrica $\varphi^2 t - \psi^2 t \,.\, \Delta\,t = A\,(t - h_1)\,(t - h_2)\,(t - h_3) \ldots (t - h_n)$; dove φt, ψt significano funzioni razionali ed intere della variabile t ed hanno i respettivi gradi $\frac{1}{2}\,n$, $\frac{1}{2}\,(n - 4)$, oppure $\frac{1}{2}\,(n - 1)$, $\frac{1}{2}\,(n - 3)$, secondochè n sia pari od impari. Inoltre dal sistema $\varphi\,h_1 + \psi\,h_1 \sqrt{\Delta\,h_1} = 0$, $\varphi\,h_2 + \psi\,h_2 \sqrt{\Delta\,h_2} = 0$, ..., $\varphi\,h_n + \psi\,h_n \sqrt{\Delta\,h_n} = 0$, lineare rispetto ai coefficienti, otterremo per l'eliminazione di questi un determinante, nel quale, sostituendo a ciascun $\sqrt{\Delta\,h_i}$ l'equivalente sviluppo $a_1 + a_2\,h_i + a_3\,h_i^2 + a_4\,h_i^3 + a_5\,h_i^4 + \ldots$, e diviso poi il determinante per

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1 & h_1^2 & \ldots & h_1^{n-1} \\ 1 & h_2 & h_2^2 & \ldots & h_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & h_n & h_n^2 & \ldots & h_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

col cercare il limite del quoziente quando $h_1 = h_2 = h_3 = \ldots = h_n = 0$, si ricaveranno le condizioni $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0$, ..., relative ai poligoni di 3, 4, 5, 6, ... lati; cioè per il quadrangolo $\gamma - 2\,\alpha\,\beta + 2\,\alpha^3 = 0$, per il pentagono $(\beta - \alpha^2)^3 - 2\,\alpha\,\gamma\,(\beta - \alpha^2) + \gamma^2 = 0$, ec.

L'integrale $M_1 x^2 + 2\,N_1 x + L_1 = M_2 y^2 + 2\,N_2 y + L_2 = 0$ esposto alla pagina 56 è una relazione doppiamente quadratica fra i parametri x, y, idonea a rappresentare gli estremi di una corda variabile iscritta in una conica e tangente ad un'altra, poichè un valore di x determinando l'estremo comune P_1 delle corde successive $P\,P_1$, $P_1 P_2$, i due valori corrispondenti di y stabiliranno i punti di contatto fra l'inviluppo e le corde medesime. Dall'integrale scritto sotto la forma $M_2\,y + N_2 = \pm \sqrt{N_2^2 - M_2 L_2} = \pm \sqrt{X}$ si deduce il parametro y ammettere quattro radici doppie y_1, y_2, y_3, y_4 per ciascuna delle radici x_1, x_2, x_3, x_4 di X; viceversa vi sono quattro radici doppie x_i per ogni radice di $Y = N_1^2 - M_1 L_1$. Il doppio rapporto $r = \dfrac{(x_3 - x_1)\,(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)\,(x_4 - x_1)}$ è una funzione degl'invarianti I ed J (pag. 59) e può rappresentare

il rapporto anarmonico delle rette congiungenti il punto P coi quattro punti comuni alle due coniche circoscritta ed iscritta alla linea poligonale $P P_1 P_2 \ldots . P_n \ldots .$; al numero 22 provammo l'integrale $\int^x \frac{dx}{\sqrt{X}}$ ridursi al più semplice $\int^\tau \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$ mediante una sostituzione lineare; con questa si verifica il detto rapporto convertirsi nel quadrato del modulo, cioè $r = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$, dove e_1, e_2, e_3 indicano le radici della cubica $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$. Le due tangenti condotte all'inviluppo da ciascuno dei quattro punti comuni ad esso ed alla conica circoscritta coincideranno, perchè ad ogni radice di X corrispondono radici doppie per y; onde il rapporto anarmonico $s = \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_1)}{(y_3 - y_2)(y_4 - y_2)}$ esprime il fascio delle rette che uniscono i detti punti comuni con un punto qualunque dell'inviluppo. Nell'eguaglianze trovate da Cayley ponendo $a = -e_1$, $b = -e_2$, $c = -e_3$, $m = pu$, $h = pv$, $\theta = pw$ vedremo la relazione (10) divenire $\left(pu\,pv + pu\,pw + pv\,pw + \frac{1}{4}g_2\right)^2 = $ $= (pu + pv + pw)\left(pu\,pv\,pw + \frac{1}{4}g_3\right)$, da cui risultano due valori di pv corrispondenti ad ogni valore di pu e viceversa; ora, essendo $\sqrt{\Delta m} = \frac{1}{2}p'u$, il determinante (11) esprimerà la formula di addizione per le pu; quindi la somma $u + v + w$ dovrà esser zero, o multipla di un periodo $2\omega_i$, ed a causa degli argomenti $\pm u$ di pu saranno $p(u \pm w)$ i due valori della funzione pv.

Le coniche $U = e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2 = 0$, $V = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ si segano secondo le coppie di rette $(e_2 - e_1)x^2 + (e_2 - e_3)z^2 = 0$, $(e_1 - e_2)y^2 + (e_1 - e_3)z^2 = 0$, $(e_3 - e_1)x^2 + (e_3 - e_2)y^2 = 0$ formanti il quadrangolo comune $A_1 A_2 A_3 A_4$, i cui vertici sono definiti dalle coordinate $x = \pm\rho\sqrt{e_2 - e_3}$, $y = \pm\rho\sqrt{e_1 - e_3}$, $z = \pm\rho\sqrt{e_2 - e_1}$ con ρ parametro arbitrario. La conica $U = \theta V$ si può scrivere $\frac{(e_1 - e_2)y^2 + (e_1 - e_3)z^2}{e_1 - \theta} = \frac{(e_2 - e_1)x^2 + (e_2 - e_3)z^2}{e_2 - \theta}$, da cui apparisce il rapporto anarmonico s delle rette congiungenti un suo punto coi vertici del detto quadrangolo potersi indicare con $\mu\left(\frac{\theta - e_1}{\theta - e_2}\right)$; la costante μ dipende dai numeri e_1, e_2, e_3 e dagli angoli del triangolo di riferimento; siccome per $\theta = \infty$ la conica si riduce alla V, il numero μ diviene il rapporto r, onde risulta in generale $s = r\left(\frac{pw - e_1}{pw - e_2}\right)$; dunque se ai vertici del quadrangolo comune si facciano corrispondere gli argomenti 0, ω_1, ω_2, ω_3, od alla funzione pu i valori ∞, e_1, e_2, e_3, ogni valore di pw determina insieme ad s una conica descritta per i punti A_1, A_2, A_3, A_4

ed il punto M definito dall'argomento w. Dati i numeri r, s potremo assegnare grandezze proporzionali alle g_2, g_3; infatti, indicando con l un numero arbitrario, dall'eguaglianze $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $r = \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1}$ si traggono le ragioni $\frac{e_1}{r-2} = \frac{e_2}{1-2r} = \frac{e_3}{1+r} = l$, e quindi le formule

$$\frac{1}{4} g_2 = 3\, l^2 (1 - r + r^2), \quad \frac{1}{4} g_3 = -\, l^3 (1+r)(2-r)(1-2r),$$

$$p\, w = -\frac{l}{s-r}\left(r^2 + 2r(s-1) - s\right);$$

così l'equazione surriferita, doppiamente quadratica rispetto alle pu, pv, vien determinata per le grandezze r, s, w, e conduce ad esprimere analiticamente la linea poligonale $P P_1 P_2 P_3 \ldots P_n P_{n+1} \ldots$ iscritta nella conica V e circoscritta alla U; attesochè, indicati con u, $u + w$ gli argomenti per i vertici P, P_1, dalla stessa equazione si deduce essere $u + 2w$, $u + 3w$, ..., $u + (n-1)w$, $u + nw$, ... i respettivi argomenti dei vertici P_2, P_3, ..., P_n, P_{n+1}, ...; dunque per un poligono chiuso di n lati dovrà P_{n+1} coincidere con l'iniziale P, onde sarà $p(u + nw) = pu$ e la differenza $(u + nw) - u$ pareggerà un periodo $2\omega_i$, ovvero $w = \frac{2\omega_i}{n}$, qualunque sia l'argomento u dell'origine P; si conchiude *esprimersi la condizione di chiusura col sostituire il valore di* $\mathrm{p w}$ *nell'equazione* $\psi_n(\mathrm{w}) = 0$. Per i quadrilateri avendosi $w = \frac{\omega_1}{2}$, in virtù della formula (12) riferita alla pagina 253 si ottiene $\left(p\frac{\omega_1}{2} - e_1\right)^2 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$, e confrontando questa con la $s = r\left(\frac{p\frac{\omega_1}{2} - e_1}{p\frac{\omega_1}{2} - e_2}\right)$ risulta la semplice condizione $1 - r = (1-s)^2$.

Se l'equazioni delle coniche abbiano le forme generali $f = \Sigma\, a_{ih} x_i x_h$, $\varphi = \Sigma\, b_{ih} x_i x_h$, dove $a_{ih} = a_{hi}$, $b_{ih} = b_{hi}$, ed agl'indici i, h si attribuiscano valori eguali o diversi fra i numeri 1, 2, 3, osserveremo come le respettive polari di un punto del piano coincidano quando coesistano l'eguaglianze lineari $\frac{df}{dx_1} = \lambda \frac{d\varphi}{dx_1}$, $\frac{df}{dx_2} = \lambda \frac{d\varphi}{dx_2}$, $\frac{df}{dx_3} = \lambda \frac{d\varphi}{dx_3}$; eliminando le x_1, x_2, x_3 si troverà il determinante cubico $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0$, di cui le tre radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ provano l'esistenza del comune triangolo polare; fissandone i lati per assi di riferimento l'equazioni delle coniche si potranno ridurre alle

precedenti forme $V = x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $U = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$. Sviluppando il determinante ordinato secondo le potenze di λ si ottiene $\Delta \lambda^3 + \Theta \lambda^2 + \Theta_1 \lambda + \Delta_1 = 0$, di cui i coefficienti simboleggiano gl'invarianti

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Theta = a_{11} \frac{d\Delta}{d b_{11}} + a_{22} \frac{d\Delta}{d b_{22}} + a_{33} \frac{d\Delta}{d b_{33}} + a_{12} \frac{d\Delta}{d b_{12}} + a_{13} \frac{d\Delta}{d b_{13}} + a_{23} \frac{d\Delta}{d b_{23}},$$

$$\Theta_1 = b_{11} \frac{d\Delta_1}{d a_{11}} + b_{22} \frac{d\Delta_1}{d a_{22}} + b_{33} \frac{d\Delta_1}{d a_{33}} + b_{12} \frac{d\Delta_1}{d a_{12}} + b_{13} \frac{d\Delta_1}{d a_{13}} + b_{23} \frac{d\Delta_1}{d a_{23}}.$$

Con la sostituzione $\lambda = \frac{3z - \Theta}{3\Delta}$ la precedente cubica si trasforma in $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$, dove $\frac{1}{4} g_2 = \frac{1}{3}(\Theta^2 - 3\Delta\Theta_1)$, $-\frac{1}{4} g_3 = \Delta^2 \Delta_1 - \frac{1}{3}\Theta\Theta_1\Delta + \frac{2}{27}\Theta^3$, e le radici si notano con e_1, e_2, e_3; perciò l'inviluppo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$ si esprime ancora per l'eguaglianza $e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2 - \frac{1}{3}\Theta(x^2 + y^2 + z^2) = 0$; facendo $p w = \frac{\Theta}{3}$ ricaveremo $(p'w)^2 = \frac{4}{27}\Theta^3 - \frac{1}{3} g_2 \Theta - g_3 = 4\Delta^2\Delta_1$, ovvero $p'w = 2\Delta\sqrt{\Delta_1}$, $p''w = 3 p w - \frac{1}{2} g_2 = 2\Delta\Theta_1$. Dunque per ottenere le condizioni di chiusura ricorreremo alle formule della pagina 255, e facilmente resulteranno $\psi_3 = 3 p w \, \psi_2^2 - \frac{1}{4}\psi_2' = \Delta^2 (4\Theta\Delta_1 - \Theta_1^2)$, $\psi_4 = -\psi_2(\psi_3 \psi_2' + \psi_2^4) = 4\Delta^4 \sqrt{\Delta_1}(\Theta_1^3 - 4\Theta\Theta_1\Delta_1 + 8\Delta\Delta_1^2)$; introducendo per brevità i simboli $\delta = \Theta_1^2 - 4\Theta\Delta_1$, $\delta_1 = 8\Delta\Delta_1^2 + \delta\Theta_1$, a causa di $\psi_2 = -p'w$, $\psi'_2 = -p''w$ si avranno le successive eguaglianze

$$\psi_4 = 4\Delta^4 \delta_1 \sqrt{\Delta_1}, \quad \psi_5 = \psi_2^3 \psi_4 - \psi_3^3 = \Delta^6 (\delta^3 - 32\,\delta_1 \Delta \Delta_1^2),$$

$$\psi_6 = \psi_2 \psi_3 \left(\psi_5 - \frac{\psi_4^2}{\psi_2^2}\right) = 2\Delta^9 \sqrt{\Delta_1}\,\delta\,(\delta^3 - 32\,\delta_1 \Delta\Delta_1^2 - 4\,\delta_1^2),$$

$$\psi_7 = \psi_5 \psi_3^3 - \psi_2 \psi_4^3 = -\Delta^{12} (\delta^6 - 32\,\delta^3 \delta_1 \Delta\Delta_1^2 - 128\,\delta_1^3 \Delta\Delta_1^2), \text{ ec.};$$

annullando i secondi membri ne derivano le respettive condizioni $\delta = 0$, $\delta_1 = 0$, $\delta^3 - 32\,\delta_1\Delta\Delta_1^2 = 0$, $\delta^3 - 32\,\delta_1\Delta\Delta_1^2 - 4\,\delta_1^2 = 0$, $\delta^6 - 32\,\delta^3\delta_1\Delta\Delta_1^2 - 128\,\Delta\Delta_1^2\delta_1^3 = 0$, ... per i poligoni di 3, 4, 5, 6, 7, ... lati iscritti nella conica V e circoscritti alla U; ponendovi $\Delta_1 = 1$, $\Theta_1 = 4\alpha$, $\Theta = 4\beta$, $\Delta = 4\gamma$ si ritroveranno le formule di Cayley.

Per le notizie storiche si legga il dottissimo discorso del professore Gino Loria sopra *I poligoni di Poncelet,* Torino, 1889.

Capo Decimo.

LE SERIE DI JACOBI.

93. — Un polinomio razionale ed intero rispetto alla variabile e con le radici tutte semplici è decomponibile in fattori lineari; la qual proprietà si estende ad alcune funzioni trascendenti, come Giovanni Bernoulli ne mostrò gli esempi per le goniometriche seno e coseno, ed Abel insegnò a svolgere l'ellittiche sotto le forme di prodotti infiniti. Il geometra Carlo Gustavo Jacob Jacobi (nato a Postdam il 10 dicembre 1804 ed estinto a Berlino il 18 febbraio 1851) tradusse questi prodotti in serie ordinate secondo le funzioni goniometriche dei multipli dell'argomento, discoprendo una nuova trascendente, da cui venne a scaturire una vasta dottrina, pur feconda nella fisica matematica e nell'aritmetica superiore (*). La condizione $f(qz) = -\frac{1}{qz^2} f(z)$ definisce una serie sviluppabile secondo le potenze intere e negative della z; se debba essere impari scriveremo $f(z) = \sum_1^\infty \left(a_{2n+1} z^{2n+1} + \frac{\alpha_{2n+1}}{z^{2n+1}}\right)$; cambiandovi z in qz ed eseguendo il prodotto della trasformata per qz^2 si ottiene facilmente $qz^2 f(qz) = \sum \left(a_{2n+1} q^{2n} z^{2n+1} + \frac{\alpha_{2n+1}}{q^{2n} z^{2n+1}}\right)$, che identificata a $-f(z)$ determina $a_{2n+1} = -a_{2n-1} q^{2n}$, $\alpha_{2n+1} = -\alpha_{2n-1} q^{2n}$; facendovi $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, poi moltiplicando membro a membro l'eguaglianze risultanti troveremo $a_{2n+1} = -\alpha_{2n+1} = a_1 (-1)^{n-1} q^{n(n+1)}$, e quindi

$$\text{(I)} \quad f(z) = a_1 \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n-1} q^{n(n+1)} \left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right).$$

Operando in simil guisa, per la funzione pari $f_1(z)$ verificante la surriferita condizione si ricaveranno $a_{2n} = -\alpha_{2n} = a(-1)^n q^{n^2}$ e

$$\text{(II)} \quad f_1(z) = a_0 + a \sum_{n=0}^\infty (-1)^n q^{n^2} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right).$$

Sostituiscasi $z = e^{i\pi v} = \cos \pi v + i \operatorname{sen} \pi v$ nelle (I) e (II); applicando il teorema di Moivre si deducono $z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}} = 2 i \operatorname{sen} (2n+1) \pi v$,

---

(*) *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, §§ 61, 62, 63.

$z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} = 2\cos 2n\pi v$, e per i valori $c = a_1 i = q^{\frac{1}{4}}$, $a_0 = a_1 = 1$ le serie (I), (II) indicate con le notazioni di Jacobi divengono

$$(1) \qquad H(v) = \theta_1(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} sen\,(2n+1)\pi v,$$

$$(2) \qquad \Theta(v) = \theta_0(v) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} cos\, 2n\pi v,$$

che sono convergenti per i valori assoluti di q minori dell'unità; mutando v in $v \mp \frac{1}{2}$ si traggono le altre due serie

$$(3) \quad H_1(v) = \theta_2(v) = H\left(v - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} cos\,(2n+1)\pi v,$$

$$(4) \quad \Theta_1(v) = \theta_3(v) = \Theta\left(v + \frac{1}{2}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} cos\, 2n\pi v;$$

la costante q si dice *nomio* dal greco νόμος. Queste serie si chiamano funzioni *theta* o *jacobiane;* è evidente come la sostituzione $z = e^v = cos\,hv + sen\,hv$ nelle (I), (II) dia origine ad altre simili ordinate secondo le funzioni iperboliche dei multipli di v. Ponendo $v = \frac{2u}{\omega}$ si verificano l'eguaglianze

$$(5) \quad \begin{cases} H\left(u + \frac{\omega}{4}\right) = H_1(u), & \Theta\left(u + \frac{\omega}{4}\right) = \Theta_1(u), \\ H_1\left(u + \frac{\omega}{4}\right) = -H(u), & \Theta_1\left(u + \frac{\omega}{4}\right) = \Theta(u), \end{cases}$$

dalle quali discendono le seguenti proprietà

$$(6) \quad \begin{cases} H\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = -H(u), & \Theta\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = \Theta(u), \\ H_1\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = -H_1(u), & \Theta_1\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = \Theta_1(u); \end{cases}$$

dunque *le funzioni* $\Theta(u)$, $\Theta_1(u)$ *hanno il periodo* $\frac{\omega}{2}$ *e le* $H(u)$, $H_1(u)$ *il periodo* ω, *quadruplo di* K *integrale ellittico completo.*

Mediante l'esponenziale $e^{i\pi v}$ le medesime serie si possono scrivere

$$(7) \quad \begin{cases} i\,H(v) = \Sigma\,(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi i v}, & \Theta(v) = \Sigma\,(-1)^n q^{n^2} e^{2\pi n i v}, \\ H_1(v) = \Sigma\, q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi i v}, & \Theta_1(v) = \Sigma\, q^{n^2} e^{2\pi n i v}, \end{cases}$$

purchè ad n si attribuiscano tutti gl' interi da $-\infty$ a $+\infty$; ed a motivo di $q = e^{\log q}$ le funzioni jacobiane sono racchiuse nella serie $\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a n^2 + (2bn + c)v}$ con a, b, c grandezze costanti. Nel caso di $c = 0$ è facile ottenere l' equazione a derivate parziali $\frac{d^2 \theta}{d v^2} = 4 b^2 \frac{d \theta}{d a}$; per le theta $a = \log q$ e $b = \pi i$. Se poniamo $v = \frac{2u}{\omega}$, $q = e^{2\pi i \rho}$ e $\rho = \frac{\omega'}{\omega}$, le formule precedenti conducono alle relazioni

$$(8) \quad \frac{\Theta\left(u + \frac{\omega'}{2}\right)}{i H(u)} = \frac{H\left(u + \frac{\omega'}{2}\right)}{i \Theta(u)} = \frac{H_1\left(u + \frac{\omega'}{2}\right)}{\Theta_1(u)} = \frac{\Theta_1\left(u + \frac{\omega'}{2}\right)}{H_1(u)} = e^{-\frac{\pi i}{2\omega}(4u + \omega')}.$$

Cambiando u in $u + \frac{\omega'}{2}$, dalle (8) si conchiudono i rapporti

$$(9) \quad \frac{\Theta(u + \omega')}{-\Theta(u)} = \frac{H(u + \omega')}{-H(u)} = \frac{H_1(u + \omega')}{H_1(u)} = \frac{\Theta_1(u + \omega')}{\Theta_1(u)} = e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2u + \omega')},$$

che provano la costante $\omega' = 2 i K'$ non essere un periodo; inoltre le funzioni $H(u)$, $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$ possono esprimersi con un esponenziale e la trascendente $\Theta(u)$.

Nei *Comptes Rendus* dell'anno 1843 Cauchy indicò un metodo elementare per svolgere le serie theta in prodotti infiniti; osserviamo dall'identità algebrica (10) $\left(q^{-n} z + \frac{1}{q^{-n} z}\right)\left(q^n z + \frac{1}{q^n z}\right) = z^2 + \frac{1}{z^2} + q^{2n} + \frac{1}{q^{2n}}$ conseguirne la forma del prodotto di più fattori simili a quelli scritti nel primo membro e corrispondenti ai valori $1, 2, 3, \ldots, m$ attribuiti ad n, e la possibilità di convertirlo nella somma di m binomi $c_n\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$, dei quali l'ultimo ha per coefficiente $c_m = 1$, perchè pareggia il prodotto di tutti i primi termini dei fattori simili ai contenuti nel primo membro della (10); dunque moltiplicando per $z + \frac{1}{z}$ il prodotto e la sommatoria si avrà (11) $\prod_{-m}^{m}\left(q^n z + \frac{1}{q^n z}\right) = \sum_{0}^{m} c_n\left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right)$. Determineremo i coefficienti c_n con l'avvertire che il cambiamento di z in $q z$ dà la relazione

$$(11') \quad \prod_{-m}^{m}\left(q^{n+1} z + \frac{1}{q^{n+1} z}\right) = \sum_{1}^{m} c_n\left[(q z)^{2n+1} + \frac{1}{(q z)^{2n+1}}\right],$$

e moltiplicando i prodotti (11), (11') per i fattori non comuni onde ridurli eguali, si ottiene l'identità

$$(12) \qquad \left(q^{m+1} z + \frac{1}{q^{m+1} z}\right) \sum_0^m c_n \left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right) =$$

$$= \left(q^{-m} z + \frac{1}{q^{-m} z}\right) \sum_0^n c_n \left[(q\, z)^{2n+1} + \frac{1}{(q\, z)^{2n+1}}\right];$$

prendendo i coefficienti della potenza z^{2n} abbiamo $c_{n-1} q^{m+1} + c_n q^{-m-1} = c_{n-1} q^{2n-m-1} + c_n q^{2n+m+1}$, da cui si deduce

$$c_{n-1} = \frac{1}{q^{2n}} \left(\frac{1 - q^{2m+2n+2}}{1 - q^{2m-2n+2}}\right) c_n;$$

onde, a motivo di $c_m = 1$, potremo calcolare successivamente i numeri

$$c_{m-1},\ c_{m-2},\ \ldots,\ c_0 = \frac{1}{q^{m(m+1)}} \frac{(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+6})\ldots(1-q^{4m+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m})},$$

e dopo $$c_n = c_0\, q^{n(n+1)} \frac{(1-q^{2m})(1-q^{2m-2})\ldots(1-q^{2m-2n+2})}{(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+6})\ldots(1-q^{2m+2n+2})};$$

sostituendoli nella (11) e presi i limiti dei due membri per $m = \infty$, a motivo di $\lim \frac{1}{c_0} = \prod_1^\infty (1 - q^{2n})$, $\lim \frac{c_n}{c_0} = q^{n(n+1)}$ si conchiude lo sviluppo della serie impari in un prodotto infinito, cioè

$$(13) \qquad \sum_0^\infty q^{n(n+1)} \left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right) =$$

$$= \left(z + \frac{1}{z}\right) \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty q^{2n} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + q^{2n} + \frac{1}{q^{2n}}\right).$$

Per sciogliere lo stesso problema rispetto alla funzione pari basterà sostituire $n - \frac{1}{2}$ ed $m - \frac{1}{2}$ ai respettivi esponenti n, m delle relazioni (11), (12), (13), e distinti con c'_n i nuovi coefficienti troveremo $c'_{n-1} = \frac{1}{q^{2n-1}} \left(\frac{1 - q^{2m+2n}}{1 - q^{2m-2n+2}}\right) c'_n$; facendo $m = \infty$ nella identità $\frac{1}{c'_0} \prod_1^m \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + q^{2n-1} + \frac{1}{q^{2n-1}}\right) = \sum_0^m \frac{c'_n}{c'_0} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$ ne risulta

$$(14) \quad \sum_0^\infty q^{n^2} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty q^{2n-1} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + q^{2n-1} + \frac{1}{q^{2n-1}}\right).$$

La sostituzione $z = e^{\pi i v}$ nelle serie (13), (14) conduce alle formule

$$(15)\quad H_1(v) = 2\, q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty (1 + 2\, q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}),$$

$$(16)\quad \Theta_1(v) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty (1 + 2\, q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}),$$

ed il cambiamento di v in $v \mp \frac{1}{2}$ fornisce le altre due

$$(17)\quad H(v) = H_1\left(v - \frac{1}{2}\right) = 2\, q^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen} \pi v \prod_1^\infty (1 - 2\, q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \prod_1^\infty (1 - q^{2n}),$$

$$(18)\quad \Theta(v) = \Theta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty (1 - 2\, q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}).$$

Per i valori particolari $v = u = 0$, $v = \frac{1}{2}$ od $u = \frac{\omega}{4}$ ricaviamo

$$(19)\quad \begin{cases} \Theta(0) = \Theta_1\left(\frac{\omega}{4}\right) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1})^2, \\ \Theta_1(0) = \Theta\left(\frac{\omega}{4}\right) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2, \\ H_1(0) = H\left(\frac{\omega}{4}\right) = 2\, q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n})(1 + q^{2n})^2, \\ H(0) = - H_1\left(\frac{\omega}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Il prodotto $D = \prod \prod \left(1 - \dfrac{u}{m \frac{\omega}{2} + (2n+1) \frac{\omega'}{2}}\right)$ si annulla per u eguale a ciascun denominatore delle frazioni racchiuse in parentesi, essendo ogni coppia di valori interi attribuiti ad m, n presa fra i limiti $-\infty$ e $+\infty$. Ora il prodotto D è convertibile in un altro semplicemente infinito applicando la formula goniometrica

$$(20)\quad \cos \frac{2\pi (u - a)}{\omega} = \cos \frac{2\pi a}{\omega} \prod_{m=1}^\infty \left(1 - \frac{u}{a + (2m+1) \frac{\omega}{4}}\right),$$

nella quale a significa una costante, e $\cos \frac{2\pi a}{\omega}$ è il valore del primo membro per $u = 0$. Se in questa (20) poniamo $a = -\frac{\omega}{4} + (2n+1) \frac{\omega'}{2}$ troveremo $D = \prod \dfrac{\operatorname{sen} \left[(2n+1)\pi\rho - \frac{2\pi u}{\omega}\right]}{\operatorname{sen} (2n+1) \rho}$, dove per brevità $\rho = \frac{\omega'}{\omega}$;

moltiplicando i fattori corrispondenti agl' interi $2n+1$, $-(2n+1)$ si ottiene $D = \Pi \left(1 - \frac{sen^2 \frac{2\pi u}{\omega}}{sen^2 (2n+1)\pi\rho}\right)$; in cui sostituiremo $q = e^{2\pi i \rho}$, ovvero (21) $q^m + \frac{1}{q^m} = 2 \cos 2\pi m \rho$, $q^m - \frac{1}{q^m} = 2 i \, sen \, 2\pi m \rho$, e per $m = 2n+1$ risulterà

$$(22) \quad D = \prod_0^\infty \frac{1 - 2 q^{2n+1} \cos \frac{4\pi u}{\omega} + q^{4n+2}}{(1 - q^{2n+1})^2} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}.$$

Siccome D ammette per radici gli argomenti $m \frac{\omega}{2} + (2n+1) \frac{\omega'}{2}$, che riducono infinite le funzioni ellittiche snu, cnu, dnu, attribuiremo a queste le rispettive forme $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ analoghe alle funzioni algebrico-razionali fratte, ma che ne differiscono per avere i due termini con un' infinità di radici; la dimostrazione diretta si deve a Cauchy, inventore di un metodo generale per sviluppare le funzioni in prodotti infiniti. Considerando la snu essere il limite di $sn(u+\alpha)$ per $\alpha = 0$ scriveremo

$$A = \lim_{\alpha=0} sn\,\alpha \, \Pi\Pi \left(1 - \frac{u}{n\omega' + \frac{m\omega}{2} - \alpha}\right),$$

$$B = \Pi\Pi \left(1 - \frac{u}{(2m+1)\frac{\omega}{4} + n\omega'}\right),$$

$$C = \Pi\Pi \left(1 - \frac{u}{(2m+1)\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right).$$

In virtù della stessa formula (20) i numeratori A, B, C si possono esprimere quali prodotti semplicemente infiniti; così posto $a = -\frac{\omega}{4} + n\omega' - \alpha$ abbiamo $A = \lim_{\alpha=0} sn\,\alpha \, \Pi \frac{sen\left(2n\pi\rho - \frac{2\pi u}{\omega} - \frac{2\pi\alpha}{\omega}\right)}{sen\left(2\pi n\rho + \frac{2\pi\alpha}{\omega}\right)}$; eseguendo il prodotto dei fattori corrispondenti ai valori n, $-n$, e per $n=0$ ottenendosi $\lim_{\alpha=0} \left[\frac{sn\,\alpha}{\alpha} \frac{\alpha}{sen \frac{2\pi\alpha}{\omega}} sen \frac{2\pi}{\omega}(u+\alpha)\right] = \frac{\omega}{2\pi} sen \frac{2\pi u}{\omega}$,

si conchiude $A = -\frac{\omega}{2\pi} sen \frac{2\pi u}{\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{sen^2 \frac{2\pi u}{\omega}}{sen^2 2\pi n \rho}\right)$; e con simili calcoli ne risultano $B = cos \frac{2\pi u}{\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{sen^2 \frac{2\pi u}{\omega}}{cos^2 2\pi n \rho}\right)$, $C = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{sen^2 \frac{2\pi u}{\omega}}{sen^2 (2n+1)\pi \rho}\right)$, che per le relazioni (21) equivalgono alle

$$A = \frac{\omega}{2\pi} sen \frac{2\pi u}{\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} cos \frac{4\pi u}{\omega} + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},$$

$$B = cos \frac{2\pi u}{\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2q^{2n} cos \frac{4\pi u}{\omega} + q^{4n}}{(1+q^{2n})^2} = \frac{H_1(u)}{H_1(0)},$$

$$C = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2q^{2n+1} cos \frac{4\pi u}{\omega} + q^{4n+2}}{(1+q^{2n+1})^2} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)}.$$

A causa di $sn \frac{\omega}{4} = 1$, $dn \frac{\omega}{4} = k'$, dalle $snu = \frac{A}{D}$, $cnu = \frac{B}{D}$, $dnu = \frac{C}{D}$ è facile trarre i valori particolari

$$(24) \quad \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)\left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2 =$$
$$= \Theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{25} + \ldots,$$

$$(25) \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^2;$$

inoltre si ha la formula

$$\frac{1}{k} = sn\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{H\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right)\Theta(0)}{\Theta\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right)\Pi(1-q^{2n})^3} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\Theta\left(\frac{\omega}{4}\right)\Theta(0)}{H\left(\frac{\omega}{4}\right)\Pi(1-q^{2n})^3},$$

che mediante le (19) e la (25) diviene (26) $\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^2$; onde fra le funzioni ellittiche e le jacobiane ne conseguono le relazioni

$$(27)\quad snu = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)} = sen\,\frac{2\pi u}{\omega}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}},$$

$$(28)\quad cnu = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)} = \cos\frac{2\pi u}{\omega}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}},$$

$$(29)\quad dnu = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}},$$

dalle quali vediamo la funzione snu mutarsi nella cnu se ad u e q si sostituiscano $\frac{\omega}{4}-u$ e $-q$; così pure il solo cambiamento di segno a q converte il numero $\frac{\omega}{2\pi}$ nel prodotto $k'\frac{\omega}{2\pi}$ e la funzione dnu nel suo valore reciproco.

Ammessa col geometra Somoff la relazione

$$(30)\quad \psi(z) = \frac{1}{z-1}\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1-q^{2h-1}z}{1-q^{2h}z}\cdot\frac{1-q^{2h-1}z^{-1}}{1-q^{2h}z^{-1}} = \frac{a_0}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{1-q^{2n}z}+\frac{b_n}{z-q^{2n}}\right)$$

cerchiamo di esprimere i coefficienti a_0, a_n, b_n per la costante q; a motivo della proprietà $\psi\left(\frac{1}{z}\right) = -z\,\psi(z)$ si deduce $b_n = -a_n$; moltiplicando i due membri per $z-1$ e $z-q^{2n}$, indi attribuendo alla z i respettivi numeri 1 e q^{2n} si traggono le formule $a_0 = \prod_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1-q^{2h}}\right)^2$,

$$a_n = \frac{q^{2n-1}(1-q)}{1-q^{2n-1}}\prod_{h=1}^{n-1}\frac{1-q^{2h-2n-1}}{1-q^{2h-2n}}\prod_{h=n+1}^{\infty}\frac{1-q^{2h-2n-1}}{1-q^{2h-2n}}\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1-q^{2h+2n-1}}{1-q^{2h+2n}}.$$

Siccome dall'identità $\frac{1-q^{2h-2n-1}}{1-q^{2h-2n}} = \frac{1-q^{2n-2h+1}}{q(1-q^{2n-2h})}$ discende l'eguaglianza $\frac{q^{2n-1}(1-q)}{1-q^{2n}}\prod_{h=1}^{n-1}\frac{1-q^{2n-2h+1}}{1-q^{2n-2h}} = q^n\prod_{m=1}^{n}\frac{1-q^{2m+1}}{1-q^{2m}}$, ed inoltre si possono verificare con facili calcoli le seguenti

$$\prod_{h=n+1}^{\infty}\frac{1-q^{2h-2n-1}}{1-q^{2h-2n}} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}},\quad \prod_{h=1}^{\infty}\frac{1-q^{2h+2n-1}}{1-q^{2h+2n}} = \prod_{m=n+1}^{\infty}\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}},$$

ne risulteranno $a_n = q^n\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}}\right)^2 = a_0\,q^n$, $b_n = -a_0\,q^n$.

Così la relazione (30) moltiplicata per $2\,i\sqrt{z}$ acquisterà la forma

$$(31)\qquad \frac{2\,i}{\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^{4n-2}}{1-q^{2n}\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^{4n}}=$$

$$=\frac{2\,i}{\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,i\left(\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)q^n\,(1+q^{2n})}{1-q^{2n}\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^{4n}},$$

oppure il secondo membro in virtù della (30) si scriverà

$$\frac{2\,i}{\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}}+\sum_{n=1}^{\infty}q^n\left(\frac{2\,i\sqrt{z}}{1-q^{2n}\,z}-\frac{2\,i\sqrt{z}}{z-q^{2n}}\right)=$$

$$=\frac{2\,i}{\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}}+\sum 2\,i\;q^{(m+1)n}\left(\sqrt{z^{2m+1}}-\frac{1}{\sqrt{z^{2m+1}}}\right),$$

e per tutti i valori di n da 1 a $+\infty$ si ha $\sum q^{(m+1)n}=\frac{q^{m+1}}{1-q}$; facendo $z=e^{\frac{4\pi i u}{\omega}}$ a motivo delle formule (21), (23) troveremo

$$(32)\qquad \frac{1}{s\,n\,u}=\frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{1}{sen\,\frac{2\pi u}{\omega}}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\,(1+q^{2n})\,sen\,\frac{2\pi u}{\omega}}{1-2\,q^{2n}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n}}\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{1}{sen\,\frac{2\pi u}{\omega}}+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m+1}}{1-q}\,sen\,(4\,m-2)\,\frac{\pi u}{\omega}\right],$$

la quale per $u=\frac{\omega}{4}$ dà le serie particolari

$$(33)\qquad 1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}=1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\,q^{m+1}}{1-q}=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Cambiando u in $u+\frac{\omega'}{2}$ la z si muterà in $q\,z$, e dalla (31) ne seguirà

$$\frac{1}{s\,n\left(u+\frac{\omega'}{2}\right)}=\frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{2\,i\sqrt{q\,z}}{1-q\,z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\,i\,q^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{z}}{1-q^{2n+1}\,z}-\frac{2\,i\,q^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{z}}{z-q^{2n-1}}\right)\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}2\,i\,q^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{z}\left(\frac{1}{1-q^{2n-1}\,z}-\frac{1}{z-q^{2n-1}}\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\sum 2\,i\,q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)(2n-1)}\left(\sqrt{z^{2m+1}}-\frac{1}{\sqrt{z^{2m+1}}}\right),$$

onde a causa della relazione $sn\left(u+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k\,sn\,u}$ agevolmente si trova

$$(34)\quad sn\,u=\frac{8\pi\sqrt{q}}{k\,\omega}\,sen\,\frac{2\pi u}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1}(1+q^{2n-1})}{1-2\,q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}=$$

$$=\frac{8\pi}{k\,\omega}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sqrt{q}}{1-q^{2m+1}}\,sen\,(4\,m+2)\,\frac{\pi u}{\omega}=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\,\Pi\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^4\sum\frac{q^m}{1-q^{2m+1}}\,sen\,(4\,m+2)\,\frac{\pi u}{\omega}.$$

Sostituendo $\frac{\omega}{4}-u$ e $-q$ alle respettive grandezze u, q nelle formule (32), (34), queste si muteranno nelle seguenti

$$(35)\quad \frac{1}{cn\,u}=\frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{1}{\cos\frac{2\pi u}{\omega}}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(1+q^{2n})\cos\frac{2\pi u}{\omega}}{1-q^{2n}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n}}\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{1}{\cos\frac{2\pi u}{\omega}}+4\sum\frac{(-1)^m q^{m+1}}{1+q}\cos\,(4\,m-2)\,\frac{\pi u}{\omega}\right],$$

$$(36)\quad cn\,u=\frac{8\pi\sqrt{q}}{k\,\omega}\cos\frac{2\pi u}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n-1}(1-q^{2n-1})}{1-2\,q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\,\Pi\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m+1}}\cos\,(4\,m+2)\,\frac{\pi u}{\omega}=$$

$$=\frac{8\pi k'}{k\,\omega}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sqrt{q}}{1+q^{2m+1}}\cos\,(4\,m+2)\,\frac{\pi u}{\omega}.$$

Se invece della (30) si ponga

$$(37)\quad \varphi(z)=\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1+q^{2h-1}z}{1-q^{2h-1}z}\cdot\frac{1+q^{2h-1}z^{-1}}{1-q^{2h-1}z^{-1}}=a+\sum\left(\frac{a_n}{1-q^{2n-1}z}+\frac{b_n}{1-q^{2n-1}z^{-1}}\right)$$

avremo $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi(z)$ ed $a_n=b_n$; col moltiplicare i due membri per $1-q^{2n-1}z^{-1}$ e poi fare $z=q^{2n-1}$ mediante una dimostrazione simile a quella tenuta per la (30) si trova $a_n=2\,(-1)^{n-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2$,

indi a motivo dell' identità $(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1-q^{2n-1}z}+\frac{1}{1-q^{2n-1}z^{-1}}\right]=$ $=\sum(-1)^{n-1}q^{(2n-1)m}\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)$ e della sostituzione $z=e^{\frac{4\pi i u}{\omega}}$ otterremo

$$\Pi\frac{1+2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}=a+4\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos\frac{4m\pi u}{\omega};$$

determinando la costante a col porre $u=0$ ed applicare le formule (33), (25), si avrà $a=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2$; onde il precedente prodotto infinito, a causa della (29), conduce alla relazione

$$(38')\quad dn\,u=\frac{2\pi}{\omega}\left[1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos 4m\frac{\pi u}{\omega}\right],$$

oppure

$$dn\,u=\frac{2\pi}{\omega}\left[1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1-q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}\right)\right];$$

sottraendo quest' ultima dal suo valore particolare

$$dn\,0=1=\frac{2\pi}{\omega}\left[1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-q^{2n-1})}{(1-q^{2n-1})^2}\right]$$

deduciamo

$$(38'')\quad 1-dn\,u=\frac{16\pi}{\omega}sen^2\frac{2\pi u}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}q^{2n-1}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{4\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}.$$

Col semplice cambiamento di segno a q dalla (38') si trae

$$(39)\quad \frac{1}{dn\,u}=\frac{2\pi}{k'\omega}\left[1+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos 4m\frac{\pi u}{\omega}\right],$$

ed ancora in virtù della relazione $am\,u=\int_0^u dn\,u\,.\,du$ risulterà

$$(40)\quad am\,u=\frac{2\pi u}{\omega}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{m(1+q^{2m})}sen\frac{4m\pi u}{\omega}.$$

Se applichiamo le derivate logaritmiche alle formule (15),..., (18),.... e si eseguiscano i calcoli mediante le serie $log\,(1 - 2\,t\cos\varphi + t^2) = - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m} \cos m\varphi$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^{m(2n-1)} = \frac{q^m}{1-q^{2m}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn} = \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}$, per $v = \frac{2u}{\omega}$ troveremo

$$(41) \qquad \frac{H_1'(u)}{H_1(u)} = - \frac{2\pi}{\omega} \operatorname{tang} \frac{2\pi u}{\omega} + \frac{8\pi}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \operatorname{sen} \frac{4\pi m u}{\omega},$$

$$(42) \qquad \frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)} = \frac{8\pi}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \operatorname{sen} \frac{4\pi m u}{\omega},$$

$$(43) \qquad \frac{H'(u)}{H(u)} = \frac{2\pi}{\omega} \cot \frac{2\pi u}{\omega} + \frac{8\pi}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \operatorname{sen} \frac{4\pi m u}{\omega},$$

$$(44) \qquad \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{8\pi}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \operatorname{sen} \frac{4\pi m u}{\omega}.$$

Per le quali serie le derivate logaritmiche delle (27), (28), (29) si rappresentano con

$$(45) \qquad \frac{cn\,u\; dn\,u}{sn\,u} = \frac{2\pi}{\omega} \cot \frac{2\pi u}{\omega} - \frac{8\pi}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^m} \operatorname{sen} \frac{4\pi m u}{\omega},$$

$$(46) \qquad \frac{sn\,u\; dn\,u}{cn\,u} = \frac{2\pi}{\omega} \operatorname{tang} \frac{2\pi u}{\omega} + \frac{8\pi}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+(-1)^m q^m} \operatorname{sen} \frac{4\pi m u}{\omega},$$

$$(47) \qquad k^2 \frac{sn\,u\; cn\,u}{dn\,u} = \frac{16\pi}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m-1}}{1-q^{4m-2}} \operatorname{sen} \frac{4\pi(2m-1)u}{\omega},$$

e da queste si deducono le respettive derivate

$$(48) \quad k^2 cn^2 u + \left(\frac{dn\,u}{sn\,u}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi u}{\omega}} - 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\,q^m}{1+q^m} \cos \frac{4\pi m u}{\omega}\right],$$

$$(49) \quad dn^2 u + k'^2 \left(\frac{sn\,u}{cn\,u}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi u}{\omega}} + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\,q^m}{1+(-1)^m q^m} \cos \frac{4\pi m u}{\omega}\right],$$

$$(50) \quad -k^2 sn^2 u + k^2 \left(\frac{cn\,u}{dn\,u}\right)^2 = 4 \left(\frac{4\pi}{8}\right)^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(2m-1)\,q^{2m-1}}{1-q^{4m-2}} \cos \frac{4\pi(2m-1)u}{\omega}.$$

In particolare, facendo $u = \frac{\omega}{8}$ nella (46), ricavasi

$$(51) \qquad \frac{\omega}{2\pi} = 1 + 4 \left[\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \frac{q^7}{1-q^7} + \dots\right],$$

e per $u=0$ la serie (49) dà

$$(52)\quad \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 = 1+8\left[\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1+q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{4q^4}{1+q^4}+\ldots\right].$$

Dal confronto dell'eguaglianze (24) e (51) deduciamo l'identità

$$(53)\quad (1+2\,\Sigma\, q^{m^2})^2 = 1+4\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\frac{q^{2h+1}}{1-q^{2h+1}} = 1+4\,\Sigma\,(-1)^h\, q^{(2h+1)\alpha}$$

con h, m, α interi positivi. Lo sviluppo del primo membro ha la forma $1+4\,\Sigma\, q^{2x^2}+8\,\Sigma\, A_n\, q^{x^2+y^2}$, dove il coefficiente intero A_n indica il numero dei termini nei quali q ha l'esponente $x^2+y^2=n$, sendo x, y diversi fra loro; anche il secondo membro racchiuderà la stessa potenza q^n con coefficienti positivi o negativi per i valori pari od impari di h; onde il numero $2h+1=\frac{n}{\alpha}$ avrà la forma $4a_i+1$ o $4a_i+3$, e detti n', n'' i numeri di questi divisori primi il coefficiente di q^n sarà $4n'-4n''$. Contando per due le soluzioni $(x=a,\ y=b)$, $(x=b,\ y=a)$, esprimiamo con ν il numero delle soluzioni distinte e con ν' il valore 2 o zero a cui riducesi ν nel caso che un'ignota sia nulla; siccome il coefficiente di q^n nel primo membro pareggia $4\nu+2\nu'$, troveremo $2\nu+\nu'=2(n'-n'')$; e quando suppongasi $n''=0$ enuncieremo, *l'equazione* $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=\mathrm{n}=\Pi\,(4\,\mathrm{a}_i+1)$ *esser soddisfatta per tante soluzioni intere quante unità si racchiudano in* $2\,\mathrm{n}'$ *doppio numero dei fattori di* n: proposizione di Gauss.

L'identità

$$(54)\quad \left(1+\sum_{m=-\infty}^{+\infty} q^{m^2}\right)^4 = 1+8\sum_{h=1}^{\infty}\frac{h\,q^h}{1+(-1)^h\,q^h} = 1+8\sum_{h=1}^{\infty} h\,(-1)^{m(h+1)}\,q^{(m+1)h}$$

risulta dal paragone delle formule (24), (52); ora l'esponente di q nello sviluppo del primo membro presenta le forme $4x^2$, $3x^2+y^2$, $2x^2+2y^2$, $2x^2+y^2+z^2$, $x^2+y^2+z^2+u^2$ coi termini eguali o differenti; nel secondo membro l'esponente di q eguaglia un qualunque intero positivo n, attesochè m ed h possano assumere tutti i valori da 1 a $+\infty$; dunque *ogni numero intero equivale alla somma di quattro quadrati:* famoso teorema di Fermat. Se il numero $p=(m+1)h$ sia impari e $\varphi(p)$ simboleggi la somma dei suoi divisori, il coefficiente della potenza q^p eguaglierà $8\varphi(p)$; invece se l'esponente di q abbia la forma $2^\alpha p$, il coefficiente di q^p risulterà $24\,\varphi(p)$; infatti dall'ipotesi $(m+1)\,h=2^\alpha p$ con p impari traendosi $m(h+1)=2^\alpha p+m-h$, oltre il fattore 8, la somma dei coefficienti relativi allo stesso esponente diverrà $\Sigma\ h\,(-1)^{m(h+1)} = \Sigma\ h\,(-1)^{m-h}$; il numero h divisore dell'esponente $2^\alpha p$ avrà i valori p, $2p$, 2^2p, 2^3p, ..., $2^\alpha p$ e quelli

corrispondenti di m saranno $2^\alpha - 1$, $2^{\alpha-1} - 1$, ..., 0; dunque $\sum h\,(-1)^{m-h} = p - 2p - 2^2 p - \ldots\ldots - 2^{\alpha-1} p + 2^\alpha p = 3p$; e ne conseguirà la relazione

$$\left(1 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q^{m^2}\right)^4 = 1 + 8 \sum \varphi(p)\,(q^p + 3\,q^{2p} + 3\,q^{4p} + 3\,q^{8p} + \ldots\ldots);$$

così *il numero delle soluzioni intere di* $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = n$ *eguaglia la somma dei divisori di* p, *prodotto degl' impari contenuti in* n, *moltiplicata per* 8 *o per* 24 *secondochè* n *sia impari o pari.*

94. — Le serie jacobiane si notino brevemente con

$$\theta_0(x) = \sum (-1)^n q^{n^2} e^{2nix}, \qquad \theta_1(x) = i \sum (-1)^{n-1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ix},$$

$$\theta_2(x) = \sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ix}, \qquad \theta_3(x) = \sum q^{n^2} e^{2nix},$$

dove $x = \pi v$, e si assumono per n tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$. Considerando il prodotto

$$\theta_3(x)\,\theta_3(y) = \sum q^{n^2} e^{2nix} \times \sum q^{m^2} e^{2miy} = \sum \sum q^{m^2+n^2} e^{2i(nx+my)},$$

osserviamo ogni coppia d' interi m, n comporsi di due pari (od impari), ovvero di uno pari e di uno impari; nel primo caso faremo $n = r + s$, $m = r - s$ e nel secondo $n = r' + s' + 1$, $m = r' - s'$; quindi la precedente somma si scinderà nelle due parti $\sum \sum q^{2(r^2+s^2)} e^{2ri(x+y) + 2si(x-y)}$, $\sum \sum q^{2\left(r'+\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(s'+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2r'+1)(x+y)i + (2s'+1)(x-y)i}$, dove ai numeri r, s, r', s' attribuiremo tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$. Queste somme parziali equivalgono ai prodotti di due serie θ_3 e di due serie θ_2 con gli argomenti $x + y$, $x - y$ ed il nomio q^2, ovvero si ha la relazione

$$(1) \quad \theta_3(x)\,\theta_3(y) = \theta_3(x+y, q^2)\,\theta_3(x-y, q^2) + \theta_2(x+y, q^2)\,\theta_2(x-y, q^2);$$

e ponendo $x + y = X$, $x - y = Y$ ne consegue l' inversa proprietà

$$(1') \quad \theta_3(X, q^2)\,\theta_3(Y, q^2) + \theta_2(X, q^2)\,\theta_2(Y, q^2) = \theta_3\left(\frac{X+Y}{2}, q\right)\theta_3\left(\frac{X-Y}{2}, q\right).$$

Con lo stesso metodo si ottengono le seguenti

$$(2) \quad \theta_2(x)\,\theta_2(y) = \theta_2(x+y, q^2)\,\theta_3(x-y, q^2) + \theta_2(x-y, q^2)\,\theta_3(x+y, q^2),$$

$$(2') \quad \theta_2(X, q^2)\,\theta_3(Y, q^2) + \theta_2(Y, q^2)\,\theta_3(X, q^2) = \theta_2\left(\frac{X+Y}{2}, q\right)\theta_2\left(\frac{X-Y}{2}, q\right),$$

$$(3)\quad \theta_0(x)\,\theta_0(y)=\theta_3(x+y,q^2)\,\theta_3(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\,\theta_2(x-y,q^2),$$

$$(3')\quad \theta_3(X,q^2)\,\theta_3(Y,q^2)-\theta_2(X,q^2)\,\theta_2(Y,q^2)=\theta_0\left(\frac{X+Y}{2},q\right)\theta_0\left(\frac{X-Y}{2},q\right),$$

$$(4)\quad \theta_1(x)\,\theta_1(y)=\theta_3(x+y,q^2)\,\theta_2(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\,\theta_3(x-y,q^2),$$

$$(4')\quad \theta_3(X,q^2)\,\theta_2(Y,q^2)-\theta_2(X,q^2)\,\theta_3(Y,q^2)=\theta_1\left(\frac{X+Y}{2},q\right)\theta_1\left(\frac{X-Y}{2},q\right).$$

Scrivendo $\theta_3(x+y,q^2)=a$, $\theta_3(x-y,q^2)=b$, $\theta_2(x+y,q^2)=c$, $\theta_2(x-y,q^2)=d$, le formule (1), (2) vengono espresse da $\theta_3(x)\,\theta_3(y)=$ $=ab+cd$, $\theta_2(x)\,\theta_2(y)=ad+bc$; affiggendo gli apici alle variabili x, y e alle lettere dei secondi membri risultano eguaglianze simili, che moltiplicate insieme alle prime forniscono la relazione

$$\begin{aligned}&\theta_3(x)\,\theta_3(y)\,\theta_3(x')\,\theta_3(y')+\theta_2(x)\,\theta_2(y)\,\theta_2(x')\,\theta_2(y')=\\&=(ab+cd)(a'b'+c'd')+(ad+bc)(a'd'+b'c')=\\&=(aa'+cc')(bb'+dd')+(ac'+ca')(bd'+b'd).\end{aligned}$$

Ora, mediante le identità (1'), (2'), si traggono le espressioni

$$\begin{aligned}aa'+cc'&=\theta_3\left(\frac{x+y+x'+y'}{2}\right)\theta_3\left(\frac{x+y-x'-y'}{2}\right),\\ bb'+dd'&=\theta_3\left(\frac{x-y+x'-y'}{2}\right)\theta_3\left(\frac{x-y-x'+y'}{2}\right),\\ ac'+ca'&=\theta_2\left(\frac{x+y+x'+y'}{2}\right)\theta_2\left(\frac{x+y-x'-y'}{2}\right),\\ bd'+b'd&=\theta_2\left(\frac{x-y+x'-y'}{2}\right)\theta_2\left(\frac{x-y-x'+y'}{2}\right);\end{aligned}$$

introducendo i simboli $2z=x+y+x'+y'$, $2u=x+y-x'-y'$, $2z'=x-y+x'-y'$, $2u'=x-y-x'+y'$ ne scaturisce il teorema (*)

$$(5)\quad\begin{aligned}&\theta_3(x)\,\theta_3(y)\,\theta_3(x')\,\theta_3(y')+\theta_2(x)\,\theta_2(y)\,\theta_2(x')\,\theta_2(y')=\\&=\theta_3(z)\,\theta_3(u)\,\theta_3(z')\,\theta_3(u')+\theta_2(z)\,\theta_2(u)\,\theta_2(z')\,\theta_2(u').\end{aligned}$$

Aumentando di π o di $\frac{\pi}{2}$ ciascuno degli argomenti x, y, x', y', a motivo delle formule $\theta_0\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\theta_3(x)$, $\theta_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\theta_0(x)$,

(*) Questa formula di Jacobi si trova per la prima volta in una lettera da lui diretta ad Hermite il 6 agosto 1845 e pubblicata alla pagina 176 del volume XXXII del Giornale di Crelle. — Vedasi un più ampio sviluppo del medesimo teorema nell'opera del prof. ALFREDO ENNEPER, *Elliptische functionen theorie und geschichte*. Halle, 1876.

$\theta_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\theta_2(x)$, $\theta_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\theta_1(x)$, ne discendono le analoghe proprietà

$$(6)\qquad \theta_3(x)\,\theta_3(y)\,\theta_3(x')\,\theta_3(y')-\theta_2(x)\,\theta_2(y)\,\theta_2(x')\,\theta_2(y')= \\ =\theta_0(z)\,\theta_0(u)\,\theta_0(z')\,\theta_0(u')+\theta_1(z)\,\theta_1(u)\,\theta_1(z')\,\theta_1(u'),$$

$$(7)\qquad \theta_0(x)\,\theta_0(y)\,\theta_0(x')\,\theta_0(y')+\theta_1(x)\,\theta_1(y)\,\theta_1(x')\,\theta_1(y')= \\ =\theta_3(z)\,\theta_3(u)\,\theta_3(z')\,\theta_3(u')-\theta_2(z)\,\theta_2(u)\,\theta_2(z')\,\theta_2(u'),$$

$$(8)\qquad \theta_0(x)\,\theta_0(y)\,\theta_0(x')\,\theta_0(y')-\theta_1(x)\,\theta_1(y)\,\theta_1(x')\,\theta_1(y')= \\ =\theta_0(z)\,\theta_0(u)\,\theta_0(z')\,\theta_0(u')-\theta_1(z)\,\theta_1(u)\,\theta_1(z')\,\theta_1(u').$$

Dalle quali si possono ricavare moltissime conseguenze: per esempio, facendo $x'=-x$, $y'=-y$, a causa di $z=z'=0$, $u=x+y$, $u'=x-y$ e di $\theta_1(0)=0$ troviamo

$$(9)\quad \theta_3^2(x)\,\theta_3^2(y)-\theta_2^2(x)\,\theta_2^2(y)=\theta_0^2(x)\,\theta_0^2(y)-\theta_1^2(x)\,\theta_1^2(y)= \\ =\theta_0^2(0)\,\theta_0(x+y)\,\theta_0(x-y),$$

$$(10)\quad \theta_3^2(x)\,\theta_3^2(y)+\theta_1^2(x)\,\theta_1^2(y)=\theta_0^2(x)\,\theta_0^2(y)+\theta_2^2(x)\,\theta_2^2(y)= \\ =\theta_3^2(0)\,\theta_3(x+y)\,\theta_3(x-y),$$

$$(11)\quad \theta_3^2(x)\,\theta_3^2(y)-\theta_2^2(x)\,\theta_2^2(y)=\theta_0^2(x)\,\theta_0^2(y)-\theta_1^2(x)\,\theta_1^2(y)= \\ =\theta_3^2(0)\,\theta_3(x+y)\,\theta_3(x-y).$$

E per $y=x$ la (9) dà la formula di duplicazione

$$(12)\quad \theta_0(2x)=\frac{1}{\theta_0^3(0)}\left[\theta_0^4(x)-\theta_1^4(x)\right]=\frac{1}{\theta_0^3(0)}\left[\theta_3^4(x)-\theta_2^4(x)\right],$$

come per $x=0$ emerge il teorema (13) $\theta_3^4(0)=\theta_2^4(0)+\theta_0^4(0)$, ..., ec.

Dalle surriferite eguaglianze (1), $\theta_3(x)\theta_3(y)=ab+cd$, $\theta_0(x)\theta_0(y)=$ $=ab-cd$, si ricava $\theta_3^2(x)\,\theta_3^2(y)-\theta_0^2(x)\,\theta_0^2(y)=4\,abcd$, che per $x=y$ diviene $\theta_3^4(x)-\theta_0^4(x)=4\,\theta_3(2x,q^2)\,\theta_2(2x,q^2)\,\theta_3(q^2)\,\theta_2(q^2)$, dove abbiamo scritto il solo nomio in parentesi quando x sia nulla. Se nella (2') facciamo $X=Y=2x$ deducesi $2\,\theta_3(2x,q^2)\,\theta_2(2x,q^2)=$ $=\theta_2(2x,q)\,\theta_2(q)$, e questa per $x=0$ si nota con $2\,\theta_3(q^2)\,\theta_2(q^2)=\theta_2^2(q)$; onde risulta quest' altra formula di duplicazione

$$(14)\quad \theta_3^4(x)-\theta_0^4(x)=\theta_2(2x,q)\,\theta_2^3(q).$$

Mutando poi x in $2x$, q in q^4, e attribuendo ad n tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$, le serie $\theta_3(x)=\Sigma\, q^{n^2}\cos 2nx$, $\theta_2(x)=\Sigma\, q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos\,(2n+1)\,x$ forniscono le due identità

$$(15)\quad \theta_3(2x,q^4)+\theta_2(2x,q^4)=\theta_3(x,q),\quad \theta_3(2x,q^4)-\theta_2(2x,q^4)=\theta_0(x,q),$$

le quali espressioni sostituite nel primo membro della (14) la convertono in $8\,\theta_2(2x, q^4)\,\theta_3(2x, q^4)\,[\theta_2^2(2x, q^4)+\theta_3^2(2x, q^4)] = \theta_2^3(q)\,\theta_2(2x, q)$, e col cambiamento di x in $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ si ottiene la relazione $8\,\theta_1(x, q^4)\,\theta_0(x, q^4)\,[\theta_1^2(x, q^4)+\theta_0^2(x, q^4)] = \theta_2^3(q)\,\theta_1(x, q)$; di cui la derivata rispetto ad x per il valore $x=0$, a causa di $\theta_1(q)=0$, somministra l'eguaglianza (16) $8\,\theta_1'(q^4)\,\theta_0^3(q^4) = \theta_2^3(q)\,\theta_1'(q)$. Ora dalla (13), scrivendo q^4 in luogo di q, si ottiene (17) $\theta_3^4(q^4)-\theta_2^4(q^4)=\theta_0^4(q^4)$, che in virtù delle formule (15) applicate al caso di $x=0$, riducesi alla

$$(18)\quad [\theta_3^2(q^4)+\theta_2^2(q^4)]\,\theta_0(q)\,\theta_3(q) = \theta_0^4(q^4);$$

siccome la (17) equivale a $[\theta_3^2(q^4)+\theta_0^2(q^4)]\,[\theta_3^2(q^4)-\theta_0^2(q^4)] = \theta_2^4(q^4)$, a motivo dell'espressioni di $\theta_3(q)$, $\theta_0(q)$ risultanti dalla (15) per $x=0$ scaturisce l'identità (19) $8\,[\theta_3^2(q^4)+\theta_0^2(q^4)]\,\theta_3(q^4)\,\theta_2(q^4) = \theta_2^4(q^4)$; il confronto delle (18), (19) mena all'eguaglianza

$$(20)\quad 8\,\theta_0^4(q^4)\,\theta_2(q^4)\,\theta_3(q^4) = \theta_0(q)\,\theta_2^4(q)\,\theta_3(q).$$

Dividendo membro a membro questa per la (16) e ponendo $\theta_0(q)\,\theta_2(q)\,\theta_3(q)\,\frac{1}{\theta_1'(q)} = f(q)$ troveremo la proprietà $f(q^4)=f(q)$; applicandola successivamente agli esponenti 4^2, 4^3, ..., 4^n si conchiude $f(q^{4^n})=f(q)$, dove n simboleggia un intero positivo; ed essendo $0<q<1$ si avrà $\lim\limits_{n=\infty} q^{4^n}=0$; onde risulta $f(q)=f(0)=\frac{1}{\pi}$, a causa degli sviluppi $\theta_0 = 1+2\sum\limits_1^\infty(-1)^n q^{n^2}$, $\theta_2 = 2\sum\limits_0^\infty q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}$, $\theta_3 = 1+2\sum\limits_1^\infty q^{n^2}$, $\theta_1' = 2\pi\sum\limits_0^\infty(-1)^n(2n+1)\,q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}$; viene così provata l'elegante proposizione di Jacobi (21) $\pi\,\theta_0\,\theta_2\,\theta_3 = \theta_1'$.

95. — Per dimostrare la relazione esistente fra le funzioni di Jacobi e le σu di Weierstrass premetteremo alcune conseguenze dell'operazione (1) $\varphi(v) = 12\,g_3\frac{dv}{dg_2}+\frac{2}{3}\,g_2^2\frac{dv}{dg_3}$ incontrata al numero 87. Suppongansi v e ψv funzioni delle variabili indipendenti u, g_2, g_3; moltiplicando la (1) per $\psi' v$ e poi aggiungendola con l'eguaglianza $\varphi(\psi u) = 12\,g_3\frac{d\psi u}{dg_2}+\frac{2}{3}\,g_2^2\frac{d\psi u}{dg_3}$, attesochè ψv sia funzione composta, a motivo della nota regola $d\psi v = d\psi u + dv\,\psi' v$, otterremo (2) $\varphi(\psi u)+\varphi(v)\,\psi' v = \varphi(\psi v)$, e ponendo $p'u$ in luogo di ψu avremo $\varphi(p'v) = \varphi(p'u)+p''v\,\varphi(v)$. Si determina la $\varphi(p'u)$ derivando rispetto ad u la relazione $\varphi(pu) = 4p^2-\frac{2}{3}\,g_2+2p'\zeta$ (pag. 261); e ricavandosi

$\varphi(p'u) = 4pp' + 2p''\zeta$, la precedente diverrà $\varphi(p'v) = 4pp' + 2p''\zeta + p''v\varphi(v)$; la quale per $v = u = \omega$, a causa di $p'\omega = 0$, fornisce (3) $\varphi(\omega) = -2\zeta(\omega) = -2\eta$. In simil maniera, sostituendo ζu alla ψu, in virtù dell'eguaglianza $\varphi(\zeta u) = 2p\zeta - p' + \frac{1}{6} g_2 u$ (pagina 262) e della (2), troviamo $\varphi(\zeta v) = pv\varphi(v) + 2p\zeta - p' + \frac{1}{6} g_2 u$, che per $u = v = \omega$ conduce alla (4) $\varphi(\eta) = \frac{1}{6} g_2 \omega$. Inoltre, simboleggiando con w un'altra funzione delle u, g_2, g_3, per la (1) discende l'identità $\varphi(vw) = v\varphi(w) + w\varphi(v)$, e quindi conseguono (5) $\varphi(\eta\omega) = -2\eta^2 + \frac{1}{6} g_2 \omega^2$, (6) $\varphi(a) = -\frac{\pi^2}{\omega^2}$, a motivo di $a = \log q = 2\pi i \frac{\omega'}{\omega}$ e di $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$. Esprimendo con Δ il binomio $g_2^3 - 27 g_3^2$, discriminante della cubica $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$, facilmente risultano $\varphi(\Delta) = 0$, $\varphi(\Delta\omega^{12}) = -24\omega^{11}\eta\Delta$; se t è una funzione delle ω, ω', mediante le formule (1) e (3) si stabiliscono (7) $\varphi(t) = -2\left(\eta \frac{dt}{d\omega} + \eta' \frac{dt}{d\omega'}\right) = -\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{dt}{da}$, ed in particolare (8) $\frac{d}{da}(\log \Delta\omega^{12}) = \frac{24}{\pi^2}\eta\omega$, (9) $\frac{d(\eta\omega)}{da} = 2\frac{\omega^2}{\pi^2}\left(\eta^2 - \frac{1}{12} g_2 \omega^2\right)$.

Ora nell'equazione (10) $\frac{d^2\theta}{dv^2} + 4\pi^2 \frac{d\theta}{da} = 0$ (pag. 279), verificata dalle funzioni theta, poniamo (11) $\theta = C e^{-2\lambda v^2} f(v, a)$, dove le grandezze C, λ dipendono dal numero $a = \log q = 2\pi i \frac{\omega'}{\omega}$; a motivo delle derivate parziali $\frac{d^2\theta}{dv^2} = Ce^{-2\lambda v^2}\left(\frac{d^2 f}{dv^2} - 8\lambda v \frac{df}{dv} - 4\lambda f + 16\lambda^2 v^2 f\right)$, $\frac{d\theta}{da} = e^{-2\lambda v^2}\left(C\frac{df}{da} + f\frac{dC}{da} - 2Cfv^2\frac{d\lambda}{da}\right)$, la (10) si trasformerà in

$$(12)\quad \frac{d^2 f}{dv^2} - 8\lambda v \frac{df}{dv} + f\left(16v^2\lambda^2 - 4\lambda - 8\pi^2 v^2 \frac{d\lambda}{da} + 4\pi^2 \frac{d\log C}{da}\right) + 4\pi^2 \frac{df}{da} = 0,$$

che per i valori $\lambda = \eta\omega$, $C = (\Delta\omega^{12})^{\frac{1}{8}}$ e l'applicazione delle (8), (9) si riduce alla più semplice

$$(13)\quad \frac{d^2 f}{dv^2} + 8\eta\omega\left(f - v\frac{df}{dv}\right) + 4\pi^2\frac{df}{da} + \frac{4}{3} f g_2 v^2 \omega^4 = 0.$$

Nel caso di $v = \frac{u}{2\omega}$ pongasi $\omega f(v, a) = F(2\omega v, \omega, \omega') = y$, funzione delle variabili u, ω, ω'; dedurremo le derivate parziali

$$\frac{df}{dv} = \frac{1}{\omega}\frac{dF}{dv} = 2\frac{dy}{du}, \quad \frac{d^2 f}{dv^2} = \frac{1}{\omega}\frac{d^2F}{dv^2} = 4\omega\frac{d^2y}{du^2},$$

$$\omega\frac{df}{da}\frac{da}{d\omega} + f = 2v\frac{dF}{du} + \frac{dF}{d\omega} = v\frac{df}{dv} + \frac{dy}{d\omega}, \quad \omega\frac{df}{da}\frac{da}{d\omega'} = \frac{dy}{d\omega'};$$

da queste ultime, per le surriferite formule, otteniamo

$$\eta\left(f - v\frac{df}{dv}\right) - \frac{\omega}{2}\frac{df}{da}\varphi(a) = \eta\frac{dy}{d\omega} + \eta'\frac{dy}{d\omega'} = -\frac{1}{2}\varphi(y),$$

onde la (13) si converte nell'equazione

$$(14)\quad \frac{d^2 y}{du^2} - \varphi(y) + \frac{1}{12}g_2 u^2 y = 0,$$

che provammo al numero 87 esser verificata per $y = \sigma u$; dunque la relazione fra le $\theta(v)$, $\sigma(v)$ è (15) $\theta(v) = \Delta^{\frac{1}{8}}\omega^{\frac{1}{2}} e^{-2\eta\omega v^2}\sigma(2\omega v)$.

Nel presente paragrafo, seguendo l'Halphen, abbiamo per brevità indicati con ω ed ω' due semiperiodi della funzione pu, che debbono sostituirsi per i simboli ω_1, ω_3 introdotti al numero 85.

In virtù della proprietà $\sigma(u+2\omega_\alpha) = -\sigma u\, e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}$, pag. 261, Weierstrass ammise tre funzioni complementarie di σu definite per la formula (16) $\sigma_\alpha(u) = \dfrac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)} e^{-\eta_\alpha u}$ con $\alpha = 1, 2, 3$; in generale si ha (17) $e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_\alpha(u) = \dfrac{\theta_{\alpha+1}(v)}{\theta_{\alpha+1}(0)}$, convenendo di porre zero in luogo dell'indice 4; infatti dall'eguaglianza (15), $e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma(u)\Delta^{\frac{1}{8}}\omega^{\frac{1}{2}} = m\theta_1(v)$, col dividere i due membri per $u = 2\omega v$ e prendere i limiti per $u = v = 0$ risulterà la costante $m = \dfrac{2\omega\Delta^{\frac{1}{8}}\omega^{\frac{1}{2}}}{\theta_1'(0)}$, e quindi (18) $e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma u = 2\omega\dfrac{\theta_1(v)}{\theta_1'(0)}$.

Per i valori ω, ω' attribuiti ad u si deducono $e^{-\frac{1}{2}\eta\omega}\sigma\omega = 2\omega\dfrac{\theta_1\left(\frac{1}{2}\right)}{\theta_1'(0)}$, $e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}\omega'^2}\sigma\omega' = 2\omega\dfrac{\theta_1\left(\frac{\omega'}{2\omega}\right)}{\theta_1'(0)}$; nella (18), cambiando u in $\omega - u$, e poi in $\omega' + u$, a motivo della (16) e delle precedenti eguaglianze si traggono

$$(19)\quad e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_1(u) = \frac{\theta_1\left(\frac{1}{2} - v\right)}{\theta_1\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\theta_2(v)}{\theta_2(0)},\qquad (20)\quad e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_3(u) = \frac{\theta_0(v)}{\theta_0(0)};$$

e questa, per la sostituzione di $u + \omega$ in luogo di u, diviene

$$(21)\quad e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_2(u) = \frac{\theta_3(v)}{\theta_3(0)}.$$

Capo Undecimo.

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA.

96. — Rappresentino u, v due funzioni reali delle variabili reali x, y ed i la radice quadrata dell'unità negativa; la funzione $f(z) = u + iv$ della $z = x + iy$ si dice *analitica*, secondo Riemann, quando il rapporto $\frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy}$ risulti indipendente dagl' incrementi dx, dy (*). Ora, essendo $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$, $dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy$, si avrà $\frac{du}{dz} + i\frac{dv}{dz} = \frac{\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} + \left(\frac{du}{dy} + i\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}}$; da cui apparisce la derivata della funzione $u + iv$ esser suscettibile di una infinità di valori che dipendono dal rapporto $\frac{dy}{dx}$, e ridursi immutabile ove esista la condizione $\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = \frac{1}{i}\left(\frac{du}{dy} + i\frac{dv}{dy}\right) = -i\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy}$, che si scinde nelle due eguaglianze

$$(1)\quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx}.$$

Il sommo geometra Agostino Luigi Cauchy (nato a Parigi il 21 agosto 1789 e morto a Sceaux il 22 maggio 1857) disse *monogena* la funzione analitica definita da questo sistema, perchè ammette l'unica derivata $f'(z) = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}$ in qualunque punto M indice della z; così, per esempio, $f(z) = \cos(x+iy)$ è una funzione monogena, e trovansi

$$u = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \cos x, \quad v = \frac{1}{2}(e^{-y} - e^{y}) \operatorname{sen} x;$$

servandosi y costante, l'indice M di z descrive una parallela all'asse Ox, e l'indice N della $f(z)$ ha per luogo l'ellisse $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$; dove

(*) Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, 1851.

$a = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $b = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, e per ogni valore attribuito ad y risultano ellissi omofocali a motivo di $a^2 - b^2 = 1$. Invece rimanendo x costante, l'indice M descrive una parallela ad Oy e l'indice N ha per suo luogo l'iperbole $\frac{u^2}{cos^2 x} - \frac{v^2}{sen^2 x} = 1$, omofocale alle dette ellissi. Se M percorra l'elemento $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, il punto N traccierà l'elemento $ds' = \sqrt{du^2 + dv^2}$, ed in virtù dei differenziali

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy, \quad dv = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy = -\frac{du}{dy} dx + \frac{du}{dx} dy,$$

per le (1) ne discende la relazione $ds' = ds \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}$; onde gli archi infinitesimi $\widehat{NN'}$, $\widehat{MM'}$ stanno in una ragione determinata, che non dipende dai differenziali dx, dy; ovvero ai lati infinitesimi del triangolo $MM'M''$ corrispondono quelli del simile $NN'N''$, e perciò due linee NN', NN'' descritte da N si segano sotto il medesimo angolo delle linee MM', MM'' tracciate da M. Dall'eguaglianze del sistema (1) si traggono $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx\, dy}$, $\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{d^2 v}{dx\, dy}$, quindi ne consegue (2) $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$, e similmente per la v; la funzione u verificante la (2) si chiama *armonica*, e la sua trasformata per raggi vettori reciproci $x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}$, $y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2}$ rimane pure armonica.

Una funzione è *uniforme* quando si possa determinare per ogni valore attribuito alla variabile indipendente.

Cauchy disse *monodroma* la funzione uniforme u in una parte s del piano, se a cominciare da un valore u_0 la u prenda valori successivi finiti e continui nella regione s lungo una linea qualunque situata in questa e torni all'iniziale u_0. Le funzioni razionali intere e fratte della variabile z, le trascendenti semplici $sen\, z$, $cos\, z$, a^z sono monodrome in tutta l'estensione del piano; invece le funzioni irrazionali, logaritmiche,.... sono multiformi e possono acquistare valori diversi per un medesimo valore della z. Un punto A del piano si chiama *critico*, se l'indice di z partendo dal punto M_0 corrispondente al valore u_0 della funzione u descriva una circonferenza infinitesima col centro in A, e tornando in M_0 faccia prendere ad u un valore diverso da u_0. Così le funzioni $u = \sqrt{z - a}$, $u = log(z - a)$ hanno per punto critico A rappresentativo di a; ove l'indice M descriva una linea chiusa c che non contenga nè passi per A, la funzione u si conserverà monodroma in tutta l'area compresa dalla c, ma se l'indice M percorra

la circonferenza avente il raggio $AM = r$, in virtù dell'equipollenza geometrica $OM - OA = AM$, oppure $z - a = r(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$, la funzione $u = \sqrt{z-a}$, acquistando in M il valore $u_0 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\right)$, dopo che l'indice di z abbia descritto m giri attorno ad A, la u prenderà il valore $r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + m\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2} + m\pi\right)\right] = $ $= (-1)^m r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\right) = (-1)^m u_0$; onde per m impari risulta di segno opposto ad u_0. Parimente per $u = \log(z-a)$ facendo $z - a = r e^{i\varphi}$ si trova $u = i\varphi + \log r$, e quando l'indice M abbia percorso m giri attorno ad A nel senso positivo del piano, n in senso opposto, e poi rieda al punto iniziale (r, φ), il valore di u diverrà $\log r + i\,[\varphi + 2\pi(m-n)]$.

Una funzione $f(z)$ è *regolare* se in un cerchio descritto col raggio piccolissimo r e col centro in un punto t si conservi monodroma, finita e continua insieme alle sue derivate e per i valori prossimi a t si svolga come il polinomio intero $a_0 + a_1(z-t) + a_2(z-t)^2 + \ldots + a_m(z-t)^m$. I punti nei quali la funzione uniforme, o le sue derivate, divengono infinite o discontinue si chiamano pure *critici*, ovvero *singolari*.

Se la funzione $f(z)$ sia continua in una parte del piano fuorchè nel punto a, e si sviluppi in serie ordinata secondo le potenze di $z-a$, con esponenti interi positivi e negativi, essendo il numero di questi ultimi finito a cominciare dal maggiore $-n$, il punto singolare a si dice *polo dell'ordine* n. Se n eguagli l'unità, il coefficiente di $(z-a)^{-1}$ fu chiamato da Cauchy il *residuo della funzione* f(z) *relativo al polo* a; supponendo $f(z) = \frac{p_1}{z-a} + \Sigma\,\frac{p_m}{(z-a)^m}$ dove m è intero e prende valori positivi e negativi diversi da uno, si valuti l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$ lungo una circonferenza infinitesima avente il centro nel punto rappresentativo di a; basterà porre $z = a + r e^{i\theta}$ con r costante e piccolissimo, poichè sendo $dz = r i e^{i\theta} d\theta$ si troverà per $\lim r = 0$ ridursi l'integrale al coefficiente p_1.

Il residuo di $f(z)$, che corrisponde al punto singolare a, fu pur definito da Cauchy *essere il coefficiente di* $\frac{1}{\mathrm{h}}$ *nello sviluppo di* f(a+h) *secondo le potenze di* h; per esempio, il residuo di $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ corrispondente alla radice semplice a di $\psi(z)$ eguaglia $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, perchè identico al moltiplicatore di $\frac{1}{h}$ nel quoziente $\dfrac{\varphi(a) + h\,\varphi'(a) + \frac{h^2}{2}\varphi''(a) + \ldots}{h\,\psi'(a) + \frac{h^2}{2}\psi''(a) + \ldots}$ delle funzioni $\varphi(a+h)$, $\psi(a+h)$ sviluppate per la serie di Taylor.

Si dice *punto singolare essenziale,* secondo Weierstrass, quello che riduce indeterminata la funzione ed ammette un' infinità di poli nello spazio circonvicino; così la funzione $\frac{1}{sen \frac{1}{z}}$ ha per punto singolare essenziale $z = 0$, ed i suoi poli sono dati per $z = \frac{1}{m\pi}$, dove m è un intero qualunque; detto α un arco piccolissimo, i valori di $\frac{1}{z}$ espressi da $2n\pi + \alpha$, $(2n+1)\pi - \alpha$ tendono all' infinito per n crescente.

97. — Se la funzione analitica $f(z)$ e la sua derivata $f'(z)$ siano uniformi e continue, l' integrale $\int_c f(z)\,dz$ preso lungo il contorno c equivale alla somma $\int (u\,dx - v\,dy) + i\int (v\,dx + u\,dy)$; ora ciascuno di questi integrali preso fra i limiti z_0, z_1, che corrispondono a due punti M_0, M_1 del contorno, sarà indipendente dalla linea d' integrazione, quando sussistano le condizioni (1) del n. 96, $\frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx}$. Infatti si consideri un' altra linea c' congiungente M_0, M_1, l' integrale $\int_{z_0}^{z_1} (u\,dx + v\,dy)$ subirà la variazione

$$\int_{z_0}^{z_1} (\delta u \,.\, dx + u \,.\, \delta\, dx + \delta v \,.\, dy + v \,.\, \delta\, dy);$$

integrando per parti i termini $u.\delta\,dx$, $v.\delta\,dy$ si scriverà la precedente $\int_{z_0}^{z_1} (\delta u\,dx - du\,\delta x + \delta v\,dy - dv\,\delta y) + (u\,\delta x + v\,\delta y)_{z_0}^{z_1}$; ovvero sostituendo le variazioni $\delta u = \frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y$, $\delta v = \frac{dv}{dx}\delta x + \frac{dv}{dy}\delta y$ e i differenziali $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$, $dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy$, la variazione dell' integrale definito si ridurrà alla forma

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)(dx\,\delta y - dy\,\delta x);$$

poichè la quantità $(u\,\delta x + v\,\delta y)_{z_0}^{z_1}$ diviene zero, annullandosi δx e δy ai limiti z_0, z_1; dunque, si conchiude, affinchè l' integrale proposto abbia un valore indipendente dalla linea c dovrà esser nulla la differenza $\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}$; quindi per i due surriferiti $\int (u\,dx - v\,dy)$, $\int (v\,dx + u\,dy)$ si stabiliranno le condizioni $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0$, $\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dx} = 0$.

Se la funzione $f(z)$ sia monodroma, finita e continua in una regione del piano contenuta entro una curva chiusa c priva di punti multipli, poichè gli estremi di un segmento c' di questa curva sono comuni all' altro segmento $c - c'$, avremo l'eguaglianza $\int_{c'} f(z)\,dz = \int_{c-c'} f(z)\,dz$, e prendendo c' infinitesimo si deduce $\int_c f(z)\,dz = 0$; dunque *se una funzione sia uniforme e continua in una parte del piano racchiusa in un contorno* c, *l' integrale della funzione preso lungo la linea* c *è zero.* Il teorema sussiste pure nel caso di un'area limitata da una linea rientrante, poichè decomponendo l'area in trapezi infinitesimi $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, ..., con le corde parallele AA', BB', CC', DD', ..., notando con i simboli $(AA')+(A'B')+(B'B)+(BA)=0$, $(BB')+(B'C')+(C'C)+(CB)=0$, $(CC')+(C'D')+(D'D)+(DC)=0$, ... i valori di $\int f(z)\,dz$ ottenuti prendendo per linee d'integrazione i perimetri dei medesimi trapezi, aggiungendoli membro a membro, soppresse le quantità eguali e di segno opposto si troverà $(A'B') + (B'C') + (C'D') + \ldots\ldots + (DC) + (CB) + (BA) + (AA') = 0$; o brevemente $(A'B'C'D' \ldots\ldots DCBAA') = 0$, che rappresenta il valore dell' integrale determinato secondo il contorno della linea c. In simil modo supponendo la linea chiusa $A'B'C'D'A'$ situata entro l'area limitata dalla curva $ABCDA$ conducendo la retta AA' si troverà $(ABCDA) = (AA'B'C'D'A'A) = (A'B'C'D'A')$ a motivo di $(AA') + (A'A) = 0$. Se nell' area chiusa dal contorno c esistono m poli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, e negli altri punti dell' area la funzione sia uniforme conducendo $m-1$ trasversali curvilinee AC, ED, FG, ... del contorno c, in modo che l'area venga divisa in m segmenti $ABCA$, $ACDEA$, $EDGFE$, ..., tali che ciascuno racchiuda un sol polo nell' interno, si otterranno l'eguaglianze $(ABCA) = 2\pi i p_1$, $(ACDEA) = 2\pi i p_2$, $(EDGFE) = 2\pi i p_3$, ...; con l'aggiungerle a motivo delle quantità nulle $(AC)+(CA)$, $(ED)+(DE)$, ..., abbiamo $(ABCD \ldots A) = 2\pi i (p_1 + p_2 + \ldots + p_m)$; dunque *se la* f(z) *ammetta* m *poli nell' interno dell' area chiusa da un contorno* c *e negli altri punti sia uniforme, l' integrale di* f(z) *preso lungo la linea* c *eguaglia il prodotto di* $2\pi i$ *per la somma dei residui* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ *relativi ai poli della funzione.*

Supponghasi $f(z)$ avere una radice r multipla dell'ordine n; a causa dello sviluppo $f(z) = A_0(z-r)^n + A_1(z-r)^{n+1} + A_2(z-r)^{n+2} + \ldots$ si trova la derivata logaritmica $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-r} + \frac{A_1 + 2A_2(z-r) + \ldots}{A_0 + A_1(z-r) + \ldots}$, da cui apparisce r esser polo della funzione $\frac{f'(z)}{f'(z)}$ con il residuo n;

parimente della $f(z)$ sia α un polo dell'ordine m; prendendo la derivata logaritmica di $f(z)=(z-\alpha)^{-m}[B_0+B_1(z-\alpha)+B_2(z-\alpha)^2+\ldots]$ si trae $\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{m}{z-\alpha}+\frac{B_1+2B_2(z-\alpha)+\ldots}{B_0+B_1(z-\alpha)+\ldots}$, e quindi α è pure polo di $\frac{f'(z)}{f(z)}$ col residuo $-m$; dunque se $f(z)$ entro il contorno c ammetta alcuni poli ed alcune radici, per i teoremi dimostrati si conchiude $\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\mu$, significando μ la differenza fra i numeri dei poli e delle radici contati coi loro ordini di moltiplicità. Con lo stesso metodo si prova la relazione $\int_c z\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(\Sigma r_n-\Sigma\alpha_n)$, in cui r_n, α_n rappresentano ogni radice ed ogni polo della $f(z)$, da ripetersi tante volte nella sommatoria quant'è l'ordine della respettiva moltiplicità.

La funzione $f(t)$ sia uniforme e continua nell'area piana s limitata dal contorno c; per ogni punto z interno ad s Cauchy ha scoperto la proprietà fondamentale (1) $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(t)\,dt}{t-z}$; si dimostra descrivendo col centro in z e col raggio r un cerchio infinitesimo γ, posto $t=z+re^{i\theta}$ l'integrale racchiuso nel secondo membro e valutato lungo il contorno c nel senso positivo del piano eguaglia lo stesso integrale preso lungo la circonferenza γ e nel medesimo senso, cioè $i\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})\,d\theta=2\pi i f(z)$. Attribuendo alla variabile z l'incremento Δz, ricaveremo dalla (1) il limite di $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ per $\Delta z=0$, ovvero la formula $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}$, e mediante successive derivazioni risulterà (2) $f^{(n)}(z)=\frac{1.2.3\ldots.n}{2\pi i}\int_c\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$. Fissando un qualunque punto a interno all'area s, in virtù dell'identità algebrica $\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-a}+\frac{z-a}{(t-a)^2}+\ldots..+\frac{(z-a)^n}{(t-a)^n(t-z)}$ e delle formule surriferite, Cauchy dedusse lo sviluppo

$$(3)\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^n(z-a)^n\int_c\frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}}+\rho_{n+1}=$$

$$=f(a)+\sum_1^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\rho_{n+1}.$$

La qual serie, nel caso delle grandezze reali, coincide con la serie di Taylor e per $a = 0$ diviene quella di Maclaurin; entrambe estese alla variabile complessa, rimarranno convergenti nel cerchio descritto col centro in a e che non racchiude alcun punto singolare, quando il resto $\rho_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^{n+1} \frac{f(t)\, dt}{t-z}$ abbia il modulo infinitesimo.

Le funzioni $f(z)$ finite in tutti i punti del piano e sviluppabili in serie convergenti per qualunque valore di z si distinguono col nome di *olomorfe*. Suppongasi $f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m + A_{m+1} z^{m+1} + \ldots$ ed il modulo di $\frac{1}{z^m} f(z)$ sempre minore di un numero positivo C per valori grandissimi di $R = mod\ z$; a causa di $A_{m+h} = f^{(m+h)}(0) = \frac{1.2.3\ldots(m+h)}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)\, dt}{t^{n+1}}$ si trae $mod\ A_{m+h} < \frac{C}{R^h}$, ed $A_{m+h} = 0$ per $R = \infty$, $h \geq 1$; dunque *nell' ipotesi di* mod $\left(\frac{f(z)}{z^m} \right)$ *minore di una quantità fissa* C *ed* m *intero positivo, la* f(z) *si riduce ad un polinomio intero del grado* m *rispetto a* z, *e nel caso di* m = 0 *ad una grandezza indipendente da* z; proposizione di Liouville.

Se la $f(t)$ sia uniforme e continua nello spazio piano compreso fra due linee convesse c, c', la prima interna alla seconda, e z rappresenti un punto di questa superficie anulare, disegnando una circonferenza γ infinitesima col centro in z, per il teorema di Cauchy i valori dell' integrale $\int \frac{f(t)\, dt}{t-z}$ presi lungo le linee c, c', γ descritte nel senso positivo, cioè che l'area chiusa da ciascuna curva giaccia alla sinistra del mobile, hanno una somma nulla; onde $(c') - (c) - (\gamma) = 0$, e poichè $(\gamma) = 2\pi i f(z)$, si conchiude (4) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'} \frac{f(t)\, dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)\, dt}{t-z}$; nel caso di due circonferenze $c' > c$ col centro comune all'origine, il primo integrale si svolge in una serie ordinata per le potenze positive e crescenti di $\frac{z}{t}$, essendo $mod\ z > mod\ t$, ed il secondo integrale per le potenze negative di $\frac{z}{t}$; onde la serie $f(z)$ è convergente nella corona circolare; teorema del prof. Laurent.

Eseguendo la sostituzione (5) $z = \rho\, e^{\frac{\pi i v}{\omega}}$, la serie (4) si converte nella (6) $F(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \rho^n e^{\frac{\pi i n v}{\omega}}$, che dimostra esser 2ω un periodo della funzione; aggruppando due a due i termini relativi ai valori di n eguali e di segno opposto, la $F(v)$ si sviluppa ordinata per i coseni o seni dei multipli dell' argomento, secondochè sia funzione pari od impari; originano così le *serie di Fourier*. Ponendo $\rho = \frac{l}{2}(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)$,

$v = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$, il secondo membro della (5) si ridurrà alla potenza di e determinata dall'esponente $\log\rho - \frac{2\pi r}{l}\,\text{sen}(\alpha-\theta) + \frac{2\pi r}{l}\,i\cos(\alpha-\theta)$; se l'indice di z percorra la circonferenza $2\pi\rho$, l'indice di v descriverà la retta $\frac{2\pi r}{l}\,\text{sen}\,(\alpha-\theta) = costante$ inclinata all'asse reale per l'angolo θ; alle circonferenze c, c' limitanti la corona circolare corrispondono due rette parallele, nella cui striscia non racchiudente alcun punto critico sussiste la convergenza della serie (6).

98. — Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ simboleggino le radici semplici di una funzione olomorfa $f(z)$, ed il quoziente $f(z) : \Pi\,(z-a_n)$ non si annulli per alcuna di esse, la sua derivata logaritmica $\psi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \Sigma\,\frac{1}{z-a_n}$ è olomorfa in tutto il piano; moltiplicando i due membri per dz ed integrando, Cauchy giunse alla formula $f(z) = C\,e^{\psi(z)}\,\Pi\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$, dove C è una costante.

Il prof. Weierstrass, perfezionando questo principio, estese alle trascendenti la decomposizione in fattori lineari della variabile z; dimostrò *potersi costruire il prodotto* $u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \ldots$ *con un numero qualunque di date radici* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *aventi i loro moduli* a'_n *che crescono insieme ad* n *sino all'infinito.* Egli considera $u_n = \left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{s_n}$ qual *fattore primario*, essendo $s_n = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}$, e $\log u_n = \log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) + s_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n - \frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+1} - \ldots = r_n$ il resto della serie in cui si svolge $\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$, convergente per $z' = mod\,z$ minore di $a'_n = mod\,a_n$. Or ponendo $\alpha_n = \frac{z'}{a'_n}$ si avrà $r'_n < \frac{1}{n}\,\frac{\alpha_n{}^n}{1-\alpha_n{}^n}$; i moduli $r'_n, r'_{n+1}, \ldots$ dei resti formano pure una serie convergente nel cerchio descritto col raggio a'_n, perchè sono più piccoli delle rispettive grandezze $\frac{1}{n}\,\frac{\alpha_n{}^n}{1-\alpha_n}, \frac{1}{n+1}\,\frac{\alpha_{n+1}^{n+1}}{1-\alpha_{n+1}}, \ldots$, nelle quali il limite di ciascuna alla precedente è zero per $n=\infty$; e siccome u_n equivale ad e^{r_n}, risulta il prodotto infinito $u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \ldots$ essere una funzione determinata di z. Se questa ancora avesse m radici nulle, si scriverebbe z^m qual primo fattore del prodotto infinito.

Per funzione *meromorfa* o frazionaria s'intende il rapporto di due funzioni intere; le radici a_i del denominatore, diverse da quelle del numeratore, sono i poli della funzione fratta, che si può svolgere secondo la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n(z-a_i)^n$ all'intorno del punto a_i, e si suppongono *isolati,* cioè posti a distanze finite fra loro.

Una linea chiusa c sia descritta in modo che possa contenere tutti i cerchi infinitesimi aventi i loro centri nei punti singolari a_i; il valore (c) dell'integrale $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(t)\,dt}{t-z}$ preso lungo il contorno c è una funzione olomorfa $G(z)$, ciascun valore (a_i) dello stesso integrale relativo alla circonferenza infinitesima, in virtù dell'identità
$$\frac{1}{z-t}=\frac{1}{z-a_i}+\frac{t-a_i}{(z-a_i)^2}+\ldots\ldots+\frac{(t-a_i)^{n-1}}{(z-a_i)^n}+\left(\frac{t-a_i}{z-a_i}\right)^n\frac{1}{z-t}$$
e della sostituzione $t=a_i+re^{i\theta}$, è sviluppabile in una serie convergente $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ ordinata secondo le potenze di $(z-a_i)^{-1}$. Mediante questo principio, il geometra Mittag-Leffler stabilì il teorema *potersi determinare una funzione uniforme coi punti critici* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *dati in numero qualunque, e tali che i lor moduli* a'_n *crescano insieme ad* n *sino all'infinito;* ed invero, significando $f_i(z)$ la somma di $m+1$ termini della serie $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$, basterà assegnare l'intero m, in guisa che il modulo della differenza $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)-f_i(z)$ risulti minore del termine positivo ε_i di una serie convergente; supponendo *modulo* $\left(\frac{z}{a_i}\right)<1$, allora la serie $\sum_{i=1}^{n}\left[G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)-f_i(z)\right]$ risulterà convergente, sarà funzione uniforme e finita per tutto il piano, eccetto nei punti critici, ancorchè le si aggiunga l'olomorfa $G(z)$.

Il prodotto infinito composto dei fattori primari $\left(1-\frac{u}{n}\right)e^{\frac{u}{n}}$ ammette per sue radici tutti i numeri interi positivi e negativi escluso lo zero; i fattori esponenziali spariscono quando si moltiplicano le coppie simili ad $e^{\frac{u}{n}}e^{-\frac{u}{n}}$, onde rimane il prodotto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)$ da Bernoulli ed Euler dimostrato eguale a $\frac{sen\,\pi u}{\pi u}$; così per $n=\infty$ e t diverso da zero la formula

$$(1)\quad \prod_{-n}^{+n}\left(1-\frac{t}{n}\right)e^{\frac{t}{n}}=\frac{sen\,\pi t}{\pi t}$$

esprime la funzione periodica semplice avente l'unità per periodo; prendendone la derivata logaritmica si genera la serie

$$(2)\quad \frac{1}{t}+\Sigma\left(\frac{1}{t-n}+\frac{1}{n}\right)=\pi\cot\pi t,$$

la cui derivata prima è

$$(3)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t-n)^2}=\frac{\pi^2}{sen^2\,\pi t}.$$

In virtù dell' identità $\left(1-\frac{u}{n-t}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)=1-\frac{u+t}{n}$ e della relazione (1) si deducono l'eguaglianze

$$\Pi\left(1-\frac{u}{n-t}\right)e^{\frac{u}{n-t}}\ \Pi\left(1-\frac{t}{n}\right)e^{\frac{t}{n}}\ \Pi\, e^{\frac{u}{t-n}+\frac{u}{n}}=$$

$$=\Pi\left(1-\frac{u+t}{n}\right)e^{\frac{u+t}{n}}=\frac{sen\,\pi\,(u+t)}{\pi\,(u+t)};$$

ora il prodotto infinito $\Pi\, e^{\frac{u}{t-n}+\frac{u}{n}}$ equivale alla potenza di e, che ha l'esponente $u\ lim\ \Sigma\left(\frac{1}{t-n}+\frac{1}{n}\right)=u\left(\pi\cot\pi\, t-\frac{1}{t}\right)$ a causa delle serie (2); perciò dalla surriferita eguaglianza si ricava

$$(4)\qquad \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{u}{n-t}\right)e^{\frac{u}{n-t}}=\frac{sen\,\pi\,(u+t)}{sen\,\pi\, t}\,e^{-\pi u \cot\pi t};$$

nel primo membro si è scritto il fattore $\left(1+\frac{u}{t}\right)e^{-\frac{u}{t}}$ fra quelli del prodotto, perchè corrispondente ad $n=0$.

La funzione sigma di Weierstrass ha tutte le radici della forma $s=2m\omega_1+2n\omega_3$, dove ω_1, ω_3 simboleggiano i due periodi ed m, n numeri interi compresi fra $-\infty$ e $+\infty$; il prodotto $\sigma(u)=u\prod_{-n}^{+n}\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{u^2}{2s^2}}$ può ridursi ad un altro semplicemente infinito applicando la formula (4); cambiandovi n in m, u in $\frac{u}{2\omega_1}$, indi ponendo $t=-n\rho$, $\rho=\frac{\omega_3}{\omega_1}$, troveremo

$$\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}}=\frac{sen\,\pi\left(n\rho-\frac{u}{2\omega_1}\right)}{sen\,\pi\, n\rho}\,e^{\frac{\pi u}{2\omega_1}\cot\pi n\rho}\qquad \text{per } n \text{ diverso da zero};$$

l'altro fattore $\prod_{-m}^{+m} e^{\frac{u^2}{2s^2}}$ di $\sigma(u)$ pareggia la potenza di e che ha l'esponente $\frac{u^2}{8\omega_1^2}\ lim\ \Sigma\,\frac{1}{(m+n\rho)^2}=\frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2\, sen^2\pi\, n\rho}$ in virtù della serie (3).

I fattori primari corrispondenti ad $n=0$ hanno per prodotto

$$\Pi\left(1-\frac{u}{2m\omega_1}\right)e^{\frac{u}{2m\omega_1}}\ \Pi\, e^{\frac{u^2}{8m^2\omega_1^2}}=\frac{2\omega_1}{\pi u}\,sen\,\frac{\pi u}{2\omega_1}\,e^{\frac{\pi^2u^2}{24\omega_1^2}},$$

come risulta dal fare $t=\frac{u}{2\omega_1}$ nella (1) e dalla nota sommatoria $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^2}=2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{3}$. Raccogliendo i valori dei prodotti parziali abbiamo

$$\sigma(u)=\frac{2\omega_1}{\pi}\,e^{\frac{\pi^2u^2}{24\omega_1^2}}\,sen\,\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen\,\pi\left(n\rho-\frac{u}{2\omega_1}\right)}{sen\,\pi\, n\rho}\,e^{\frac{\pi u}{2\omega_1}\cot\pi n\rho+\frac{\pi^2u^2}{8\omega_1^2 sen^2\pi n\rho}},$$

ed aggruppando i fattori corrispondenti a $-n$, $+n$ si conchiude

$$(5)\quad \sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi}\, e^{\frac{\pi^2 u^2}{4\omega_1^2}\left(\frac{1}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sen^2 \pi n \rho}\right)}\, sen\,\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{sen^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{sen^2 \pi n \rho}\right).$$

La derivata logaritmica di questa è la serie

$$(6)\quad \zeta(u) = \frac{\pi^2 u}{2\omega_1^2}\left[\frac{1}{6}+\sum_1^{\infty}\frac{1}{sen^2\pi n\rho}\right]+\frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1}-\frac{\pi}{2\omega_1}\,sen\,\frac{\pi u}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sen^2\pi n\rho - sen^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}},$$

da cui per $u=\omega_1$ si ricava la costante

$$(7)\quad \eta_1 = \zeta\,\omega_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1^2}\left(\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sen^2\pi n\rho}\right);$$

onde la (5) diviene

$$(8)\quad \sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi}\,sen\,\frac{\pi u}{2\omega_1}\,e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{sen^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{sen^2\pi n\rho}\right),$$

e mediante la (6) avremo la relazione

$$(9)\quad p(u) = -\frac{d}{du}\,\zeta u = -\frac{\eta_1}{\omega_1}+\frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{sen^2\left(\dfrac{\pi u}{2\omega_1}-\pi n\rho\right)}.$$

Introducendo il nomio $q=e^{\pi i\rho}$ con $i\rho = -\dfrac{K'}{K}$, le formule (6), (8), (9) si cambiano nelle seguenti

$$(10)\quad \sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi}\,sen\,\frac{\pi u}{2\omega_1}\,e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},$$

$$(11)\quad \zeta(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1}+\frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1}+\frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\,sen\,\dfrac{\pi u}{\omega_1}}{1-2q^{2n}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}+q^{4n}},$$

$$(12)\quad p(u) = -\frac{\eta_1}{\omega_1}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{sen^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}-2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}(1+q^{4n})\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}-2q^{4n}}{\left(1-2q^{2n}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}+q^{4n}\right)^2}.$$

99. — Si esamini la variazione dell'integrale (1) $u=\displaystyle\int_0^z\frac{dz}{\varphi(z)}$, in cui $\varphi(z)=\sqrt{g(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ ammette i quattro punti critici A, B, C, D rappresentativi delle costanti a, b, c, d; g è un coefficiente, e per $z=0$ si prende il radicale col segno positivo; dicasi u_1 il

valore di u quando l'indice M di z abbia descritto il segmento OZ che non passa per alcun punto critico.

Se il mobile M percorra il segmento OA', sendo A' un punto prossimo ad A, indi la circonferenza descritta col centro A e raggio infinitesimo $r = AA'$ e poi torni all'origine, il cammino percorso OAO si chiama *contorno elementare* o *laccinolo* ed il valore corrispondente di u è $2(OA)$; infatti, partendo dal punto O e giungendo in A', il suo valore differirà da OA per una quantità piccolissima; dopo un giro intorno ad A il radicale muta di segno e l'indice di z muovendosi lungo $A'O$, l'elemento dz assume il segno opposto a quello tenuto nel senso OA'; onde il valore di u al termine di $A'O$ è identico al valore (OA), e mediante la sostituzione $z = a + re^{i\theta}$ si dimostra esser nullo il residuo integrale rispetto alla circonferenza infinitesima. Il segno del radicale essendo negativo, se l'indice di z ripetesse il cammino OAO, u varierebbe della quantità $-2(OA)$, annullandosi il radicale riprende il segno positivo; dunque se l'indice di z descriva m volte il contorno OAO, il valore di u sarà zero, oppure $2(OA)$, secondochè m sia pari od impari. Ponendo per brevità $2(OA) = \alpha$, $2(OB) = \beta$, $2(OC) = \gamma$, $2(OD) = \delta$, l'integrale u, dopo il percorso $OA\ OB\ OZ$, sarà divenuto $\alpha - \beta + u_1$, attesochè il radicale $\varphi(z)$ al termine del cammino OAO acquista il segno opposto, ed alla fine del seguente OBO ritorna ad avere il segno primitivo, onde $\alpha - \beta$ è un periodo della u. Così i quattro punti critici A, B, C, D danno luogo ai sei periodi $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, $\alpha - \delta$, $\beta - \gamma$, $\beta - \delta$, $\gamma - \delta$ riducentisi ai primi due; infatti facendo $\alpha - \beta = \omega$, $\alpha - \gamma = \omega'$ si trae $\beta - \gamma = \omega' - \omega$; inoltre descrivendo con un raggio grandissimo ρ una circonferenza e tirando i raggi OR_1, OR_2, OR_3, OR_4 dividenti il circolo in quattro settori, ognun dei quali racchiuda un sol punto critico, in virtù del teorema di Cauchy risulta l'integrale preso lungo la circonferenza equivalere alla somma $(OR_1R_2O) + (OR_2R_3O) + (OR_3R_4O) + (OR_4R_1O) = (OAO) + (OBO) + (OCO) + (ODO) = \alpha - \beta + \gamma - \delta$, e facendo $z = \rho e^{i\theta}$ l'integrale u preso lungo la circonferenza ρ si annulla per $\lim \rho = \infty$; onde ne consegue $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$, da cui otteniamo $\alpha - \delta = \beta - \gamma = \omega' - \omega$, $\beta - \delta = \omega' - 2\omega$, $\gamma - \delta = -\omega$, oppure $\beta = \alpha - \omega$, $\gamma = \alpha - \omega'$, $\delta = \alpha + \omega - \omega'$; perciò, simboleggiando con m, n, p, q, h, h' numeri interi, se l'indice di z abbia percorso la linea $m \,.\, OAO + n \,.\, OBO + p \,.\, OCO + q \,.\, ODO + OZ$, l'integrale u acquisterà il valore $m\alpha + n(\alpha - \omega) + p(\alpha - \omega') + q(\alpha + \omega - \omega') + (-1)^{m+n+p+q} u_1$, riducibile ad una delle due forme $h\omega + h'\omega' + u_1$, $h\omega + h'\omega' + \alpha - u_1$, secondochè $m + n + p + q$ sia pari o dispari.

Fig. 36ª.

Nel caso particolare di $b=-a$, $d=-c$, i punti A, B ed i punti C, D sendo simmetrici rispetto all'origine O, risultano $\beta=-\alpha$, $\delta=-\gamma$ e i due periodi $\omega=2\alpha$, $\omega'=\alpha-\gamma$.

Ad ogni valore di u corrisponde un solo valore della funzione inversa $z=f(u)$ definita da (2) $\frac{dz}{du}=\sqrt{g(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ e dal valore iniziale $+\sqrt{g\,a\,b\,c\,d}$ di questa relativo a $z=u=0$; col porre $z=a+t^2$ si ha $\frac{dt}{du}=\sqrt{g(a-b+t^2)(a-c+t^2)(a-d+t^2)}$, che prova essere z uniforme e monodroma rispetto ad u nelle prossimità dei punti critici; facendo poi $z=\frac{1}{v}$ risulta $\frac{dz}{dv}=\sqrt{g(1-av)(1-bv)(1-cv)(1-dv)}$, onde z si conserva uniforme per i valori piccolissimi dati al modulo di v, o per i grandissimi dati a quello di z. Suppongasi ε un polo semplice della funzione, ovvero $z=\frac{p}{u-\varepsilon}+p_0+p_1(u-\varepsilon)+\ldots.$, e $\frac{dz}{du}=-\frac{p}{(u-\varepsilon)^2}+p_1+\ldots.$; sostituendo questi sviluppi nell'equazione differenziale (2) innalzata a quadrato, identificando i coefficienti delle potenze $(u-\varepsilon)^{-4}$, $(u-\varepsilon)^{-3}$ nei due membri, si trovano $p=\pm\frac{1}{\sqrt{g}}$, $p_0=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$; dunque la z ammette due poli con residui eguali e di segno opposto; nel caso di $a+b+c+d=0$ sarà nullo p_0. Anche la funzione z definita da $\frac{dz}{du}=\sqrt{g(z-a)(z-b)(z-c)}$ è uniforme e monodroma rispetto ad u in tutto il piano; sibbene ammette un polo doppio, ovvero $z=\frac{p}{(u-\varepsilon)^2}+p_0+p_1(u-\varepsilon)+\ldots.$, e come sopra operando si ottengono $p=\frac{4}{g}$, $p_0=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

In virtù delle relazioni dimostrate $f(h\,\omega+h'\,\omega'+u)=$ $=f(h\,\omega+h'\omega'+\alpha-u)=f(u)$ si conchiude essere z una funzione doppiamente periodica con le due radici $u=0$, $u=\alpha$. Simboleggiando i due periodi per $\omega=p+q\sqrt{-1}$, $\omega'=p'+q'\sqrt{-1}$ e supponendo p, q, p', q' numeri reali, s'immagini diviso il piano in una rete di parallelogrammi congrui, ciascuno dei quali abbia i lati delle lunghezze $\sqrt{p^2+q^2}$, $\sqrt{p'^2+q'^2}$ e con le inclinazioni *arc tang* $\frac{q}{p}$, *arc tang* $\frac{q'}{p'}$ sull'asse reale Ox. Il rapporto $\frac{\omega}{\omega'}$ deve essere immaginario, altrimenti dimostrò Jacobi nel volume XIII del Giornale di Crelle ridursi la funzione ad una periodica semplice; infatti suppongasi $\frac{\omega}{\omega'}=\frac{m}{m'}$ coi numeri m, m' interi e primi fra loro; scrivendo $\omega=m\,\omega''$, $\omega'=m'\omega''$ si avrebbe $h\,\omega+h'\omega'=(h\,m+h'm')\,\omega''$ e la funzione ammetterebbe il solo periodo ω''; nell'ipotesi d'irrazio-

nalità potremmo avvicinarci ad $\frac{\omega}{\omega'}$ per una certa frazione a termini interi $\frac{m}{n}$ avente con $\frac{\omega}{\omega'}$ una differenza piccolissima, e ponendo $\omega = m\,\omega''$ si trarrebbe $\frac{\omega'}{n} < \omega'' < 2\,\frac{\omega'}{n}$; al crescere di n il periodo ω'' diverrebbe infinitesimo, $f'(u) = 0$ e la funzione sarebbe costante. L'ipotesi di tre periodi immaginari e distinti, o non uniti da un'eguaglianza lineare ed omogenea, fu discussa da Jacobi, e con sottile raziocinio ridotta ad ammettere per la funzione uniforme un periodo il cui modulo sia infinitesimo; quindi si giunge alla stessa conclusione precedente.

Or si consideri un parallelogrammo $ABCD$ coi lati equipollenti ai respettivi periodi ω, ω'; per la teoria dei numeri complessi, il valore di u corrispondente ad un punto M del piano si dice l'*affisso* di M; nel caso di M interno al parallelogrammo indicando con $AP = t\,\omega$, $PM = v\,\omega'$ le coordinate di M referite ai lati adiacenti AB, AD e con $OA = a$ l'affisso di A, a motivo della somma geometrica $OM = OA + AP + PM$, risulta $u = a + t\,\omega + v\,\omega'$, dove i numeri t, v sono positivi e minori dell'unità; per qualunque altro parallelogrammo $A'B'C'D'$ della rete si ha il valore $u' = OM' = a + (h + t)\,\omega + (h' + v)\,\omega' = a + h\,\omega + h'\omega' + t\,\omega + v\,\omega' = OM + h\,\omega + h'\omega'$, sendo h, h' interi ed $a + h\,\omega + h'\omega'$ l'affisso di A'; dunque nei punti omologhi M, M' la funzione z ha lo stesso valore, ed in ogni parallelogrammo assume tutti i valori possibili. *Ogni funzione duplo-periodica intera si riduce ad una costante,* perchè il suo modulo si conserva sempre minore di un dato numero positivo in ogni parallelogrammo dei periodi quale $ABCD$, e quindi in tutto il piano a motivo dell'ipotesi. Il geometra Liouville, nel 1844, fondò su questa verità la teorica generale delle funzioni ellittiche, o meromorfe con due periodi. Per brevità si chiamano *zeri* le radici dell'equazione $f(u) = 0$ ed *infiniti* le radici di $\frac{1}{f(u)} = 0$. Valutando l'integrale $\int f(u)\,du$ lungo il perimetro $ABCD$ si trovano le relazioni

$$(AB) = \int_u^{u+\omega} f(u)\,du,$$

$$(BC) = \int_{u+\omega}^{u+\omega+\omega'} f(u)\,du = \int_u^{u+\omega'} f(u+\omega)\,du,$$

$$(CD) = \int_{u+\omega+\omega'}^{u+\omega'} f(u)\,du = -\int_u^{u+\omega} f(u+\omega')\,du,$$

$$(DA) = \int_{u+\omega}^{u} f(u)\,du = -\int_u^{u+\omega'} f(u)\,du;$$

aggiungendole si ottiene $(AB)+(BC)+(CD)+(DA)=0$; dunque applicando il teorema di Cauchy deduciamo il principio di Hermite: *i residui dei poli di una funzione uniforme nel parallelogrammo dei periodi avere una somma nulla.* Inoltre dalle proposizioni dimostrate al n. 97, osservando la funzione $\frac{f'(u)}{f(u)}$ esser periodica come $f(u)$, ne consegue ancora nel detto parallelogrammo *il numero dei poli pareggiare il numero delle radici, e la somma di queste equivalere alla somma dei poli o differirne di uno o più multipli dei periodi.*

Se una funzione $f(u)$ verifica l'eguaglianze $f(u+\omega)=f(u)\,e^{au+b}$, $f(u+\omega')=f(u)\,e^{a'u+b'}$, si dirà di *prima,* di *seconda* e di *terza specie,* secondochè siano 1° le costanti $a=a'=b=b'=0$, 2° $a=a'=0$, 3° tutte e quattro a, a', b, b' diverse da zero. In questo caso, prendendo le derivate logaritmiche, troveremo

$$\frac{f'(u+\omega)}{f(u+\omega)}=\frac{f'(u)}{f(u)}+a, \quad \frac{f'(u+\omega')}{f(u+\omega')}=\frac{f'(u)}{f(u)}+a';$$

a causa dell'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(u)}{f(u)}du=\mu$, ch'esprime la differenza fra il numero delle radici di $f(u)$ ed il numero dei suoi poli situati entro il parallelogrammo dei periodi; con un ragionamento simile a quello tenuto per il principio di Hermite si ricava

$$\int_u^{u+\omega'} a\,du-\int_u^{u+\omega} a'\,du=a\omega'-a'\omega=\pi i\mu;$$

per esempio, ζu avendo un sol polo col residuo uno e le costanti $a=2\eta$, $a'=2\eta'$, conduce alla proprietà $\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi i}{2}$

100. — Come una frazione algebrico-razionale, il cui denominatore abbia solo radici diseguali $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, è decomponibile nella somma delle frazioni $\frac{A_i}{z-a_i}$, così *una funzione trascendente* F(x) *coi due periodi* $\frac{\omega}{2}=2\,\mathrm{K}$, $\omega'=2\,\mathrm{i}\,\mathrm{K}'$ *si scinde in elementi semplici per la formula* (1) $\mathrm{A_0}+\Sigma[\mathrm{A\,f(x-a)+A_1f'(x-a)}+$ $+\mathrm{A_2f''(x-a)}+\ldots+\mathrm{A_nf^{(n)}(x-a)}]$; *dove* f(x) *simboleggia il prodotto dell'esponenziale* $\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{x}}$ *e della funzione jacobiana* $\mathrm{C}\,\frac{\mathrm{H(x+\alpha)}}{\mathrm{H(x)}}$, α, λ, C *sono grandezze costanti,* a, b, c, ..., l *i poli di* F(x), *ed i coefficienti* $\mathrm{A_n}$ *con lo stesso indice hanno le loro somme eguali a zero.*

Questo teorema del sommo analista Carlo Hermite fu per la prima volta enunciato in una sua lettera scritta il 29 giugno 1876 al geometra L. Fuchs e pubblicata nel tomo LXXXII del Giornale di Crelle. Infatti la funzione $f(x) = C \frac{H(x+\alpha)}{H(x)} e^{\lambda x}$ nel rettangolo dei periodi ammette l'unico polo $x = 0$, ed in virtù delle note proprietà $H\left(x+\frac{\omega}{2}\right) = -H(x)$, $H(x+\omega') = -H(x)\, e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2x+\omega')}$ ponendo $e^{\frac{\lambda\omega}{2}} = \mu$, $e^{\lambda\omega' - \frac{4\pi i \alpha}{\omega}} = \mu'$, si traggono le relazioni $f\left(x+\frac{\omega}{2}\right) = \mu f(x)$, $f(x+\omega') = \mu' f(x)$, $f\left(x-\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\mu} f(x)$, $f(x-\omega') = \frac{1}{\mu'} f(x)$.

Sia $F(z)$ una funzione della seconda specie, coi poli $a, b, c, \ldots, l$, e soggetta alle condizioni $F\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \mu F(z)$, $F(z+\omega') = \mu' F(z)$; è facile verificare come il prodotto $F(z) f(x-z)$ ammetta i due periodi $\frac{\omega}{2}$, ω' rispetto alla variabile z qualunque sia il valore di x. Il residuo della $f(x)$ per $x=0$ essendo $C \frac{H(\alpha)}{H'(0)}$ può ridursi eguale all'unità col prendere $C = \frac{H'(0)}{H(\alpha)}$; onde risulta $f(x) = \frac{H'(0)\, H(x+\alpha)}{H(\alpha)\, H(x)} e^{\lambda x}$; il prodotto $F(z) f(x-z)$ ha per suoi poli tanto il valore x perchè appartiene alla $f(x-z)$, quanto le grandezze $a, b, c, \ldots, l$ poli della $F(z)$ e punti ordinari della $f(x-z)$; il residuo del polo x è $-F(x)$ qual valore dell'espressione $-F(z) \frac{H'(0)\, H(x-z+\alpha)}{H(\alpha)\, H'_z(x-z)} e^{\lambda(x-z)}$ per $z=x$. Si troverà il residuo del polo a facendo $z = a+h$ e cercando il coefficiente di $\frac{1}{h}$ nel prodotto $F(a+h) f(x-a-h)$; ora lo sviluppo di $F(a+h)$ oltre i termini ordinati secondo le potenze positive e crescenti di h racchiude i seguenti $\frac{A}{h} + A_1 D_h\left(\frac{1}{h}\right) + A_2 D_h^2\left(\frac{1}{h}\right) + \ldots + A_n D_h^n\left(\frac{1}{h}\right)$, ovvero $\frac{A}{h} - \frac{A_1}{h^2} + \frac{1.2\, A_2}{h^3} + \ldots + (-1)^n \frac{1.2.3 \ldots n\, A_n}{h^n}$; inoltre, essendo

$$f(x-a-h) = f(x-a) - h f'(x-a) + \frac{h^2}{2} f''(x-a) + \ldots + (-1)^n \frac{h^n}{2.3 \ldots n} f^{(n)}(x-a),$$

il cercato coefficiente di $\frac{1}{h}$ equivarrà all'espressione $A f(x-a) + A_1 f'(x-a) + A_2 f''(x-a) + \ldots + A_n f^{(n)}(x-a)$; operando in simil guisa per ciascuno degli altri poli $b, c, \ldots, l$ ed avvertendo la somma dei residui della funzione $F(z) f(x-z)$ dover esser nulla, si conchiude la verità del principio.

Se le costanti α, λ siano entrambe zero, oppure $\lambda=0$, $2\alpha=m\omega$, si avranno $\mu=\mu'=1$, e la formula (1) diviene illusoria. In questo caso, svolgendo $H(x+\alpha)$ secondo le potenze crescenti di α supposto infinitesimo, si ottiene

$$\frac{H(x+\alpha)}{H(x)}=1+\alpha\frac{H'(x)}{H(x)}+\frac{\alpha^2}{2}\frac{H''(x)}{H(x)}+\ldots,$$

e per la serie di Maclaurin facilmente risulta

$$\frac{H'(0)}{H(\alpha)}=\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\frac{H''(0)}{H(\alpha)}-\frac{\alpha^2}{2.3}\frac{H''(0)}{H(\alpha)}-\ldots;$$

posto $\lambda=0$ dedurremo $f(x)=\frac{1}{\alpha}+\frac{H'(x)}{H(x)}+\alpha S$, indicando con αS la somma dei successivi termini; anche i coefficienti A_n sono funzioni di α e si esprimono con serie della forma $A=p+p'\alpha+\ldots$, e perciò ne consegue $\Sigma A f(x-a)=\frac{1}{\alpha}\Sigma p+\Sigma p'+\Sigma p\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}+\ldots$. Osservando la somma dei residui di una funzione doppiamente periodica esser nulla, e dall' eguaglianza $f'(x)=D_x\frac{H'(x)}{H(x)}+\alpha D_x S$ ricavando $f^{(n)}(x)=D_x^n\frac{H'(x)}{H(x)}$ per $\alpha=0$, vedremo la formula (1) convertirsi in

$$F(x)=\Sigma p'+\Sigma\left[p\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}+p_1 D_x\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}+\ldots+p_n D_x^n\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}\right], \tag{2}$$

cioè nella (1) devesi alla $f(x-a)$ sostituire la derivata logaritmica della funzione jacobiana $H(x-a)$.

Le coordinate (3) $x=x_0+\sum_{n=1}^{n}A_n\frac{H'(t-a_n)}{H(t-a_n)}$, $y=y_0+\sum_{n=1}^{n}B_n\frac{H'(t-a_n)}{H(t-a_n)}$, soggette alle condizioni (4) $\Sigma A_n=0$, $\Sigma B_n=0$, definiscono una linea algebrica dell' ordine n; attesochè combinandole insieme all' equazione $ax+by+c=0$ di una trasversale, risulti una funzione duplo-periodica della variabile t con gli n infiniti $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, e però ammetta n zeri entro il rettangolo dei periodi $2K$, $2iK'$. Le relazioni (4) contengono $2n$ residui, e quindi $2n-2$ coefficienti arbitrari; aggiungendovi le costanti x_0, y_0, il nomio q della funzione $H(t)$ e le $n-1$ differenze a_2-a_1, a_3-a_1, ..., a_n-a_1, si vedrà esservi $3n$ parametri nel sistema (3), (4). Derivando le formule (3) rispetto a t otteniamo

$$x'_t=\Sigma A_n\left[\frac{H''(t-a_n)}{H(t-a_n)}-\frac{H'^2(t-a_n)}{H^2(t-a_n)}\right],\quad y'_t=\Sigma B_n\left[\frac{H''(t-a_n)}{H(t-a_n)}-\frac{H'^2(t-a_n)}{H^2(t-a_n)}\right], \tag{5}$$

e siccome l'equazione della tangente nel punto (x, y) è $Y - y = \frac{y'_t}{x'_t}(X - x)$, le coordinate di un punto della curva polare si esprimono con $\frac{-y'_t}{x y'_t - y x'_t}$, $\frac{x'_t}{x y'_t - y x'_t}$; onde gli argomenti dei suoi punti di segamento con la trasversale sono determinati per l'equazione (6) $a y'_t - b x'_t + c(y x'_t - x y'_t) = 0$, in cui sostituendo le (3), (5) si otterrà una funzione duplo-periodica rispetto a t coi poli doppi a_1, a_2, a_3, ..., a_n, e perciò con $2n$ zeri. Inoltre i valori di t, che annullano contemporaneamente x'_t, y'_t, verificano la (6) e corrispondono ai punti di regresso della curva (3); dunque notando con d ed r i respettivi numeri dei punti doppi e dei regressi, la curva polare è dell'ordine $2n - r$, e questo numero indica pure la classe della linea ellittica (3); in virtù delle formule di Plücker si trova $2n - r = n(n-1) - 2d - 3r$; quindi per la curva (3) ne discende la semplice proprietà $d + r = \frac{n(n-3)}{2}$; facendo $n = 3$ risulta la cubica definita dall'equazioni (3) non contenere alcun punto doppio o di regresso.

INDICE.

ERRATA.

A pag.	lin.	in vece di	si legga
1	18	r ed $r-\rho$	r e ρ
2	29	arco	area
5	6	$\frac{dX}{dx}=\frac{dy^2}{dx^2}(2u-1)^2$	$\frac{dX}{dx}=\frac{dy}{dx}(2u-1)$
8	4	$-\frac{1}{5}x \quad +\frac{1}{5}$	$3x \quad -3$
»	12	$=3l^2p+lq$	$=3lp+lq$
11	16	$q=-\left(\frac{l}{h}+\frac{g}{f}\right)$	$q=\frac{l}{h}+\frac{g}{f}$
12	5	cicloide	trocoide
22	28	OV	OP''
23	1	VP	VP''
39	12	$k^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$	$=-sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\varphi'$
»	14	k^2	$-k^2$
40	6, 8	$\frac{tang\,\alpha}{\Delta\,\alpha}$	$\frac{tang\,\alpha}{2\,\Delta\,\alpha}$
41	5, 6	x	u
44	8	$sen\,\varphi_0$	$sen^2\,\varphi_0$
45	22	1868	1768
47	22	$[P-Q(x-y)^2]^2$	$[P-Q(x-y)]^2$
48	10	$-\frac{k^2 sen^2\varphi}{2},\ -\frac{k^2 sen^2\varphi'}{2}$	$-\frac{k^2}{2}sen\,2\varphi,\ -\frac{k^2}{2}sen\,2\varphi'$
»	14	$-\frac{k^2}{2}$	$-k^2$
83	8	$sen^2\frac{1}{2}\nu$	$sen^2\frac{1}{2}\mu$
86	13	φ	$2\varphi'$
123	20	e tangenti	ai piani tangenti
132	17	di prima specie	di prima e seconda specie
187	1	$d^2S_1=$	$d^2S_1\cos(P,R)=$
254	19	$u+v+w$	$u+v+w=0$